DOI: 10.17117/na.2015.08.1102

Поступила (Received): 20.08.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.08.1102.pdf>

Жумадилова Ж.Б., Жумадилова М.Б.
Исследование движения манипуляционных роботов
при постоянно действующих возмущениях

Zhumadilova Zh.B., Zhumadilova M.B.
Motion Study robotic manipulator under
constantly acting perturbations

Предложенный метод исследования устойчивости манипуляционных роботов при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности, представляется полезным при решении конкретной практической задачи, так как составление точных дифференциальных уравнений, адекватных реальному процессу, невозможно. Постоянно действующие возмущения, малые в среднем и исчезающие на бесконечности, в частности, могут иметь вид одного импульса, начинающегося в момент t_0 и длящегося Δt

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, стабилизация, фазовые системы, манипуляционные роботы

Жумадилова Жаркын Бапановна

Кандидат физико-математических наук, доцент
 Казахский гуманитарно-юридический университет
 г. Астана, Кургальджинское шоссе, 8

Жумадилова Мереке Бапановна

Кандидат технических наук, профессор
 Каспийский государственный университет
 технологий и инжиниринга им. Ш. Есенова
 г. Актау, 32 микрорайон

The proposed method of studying the stability of robotic manipulator under constantly acting perturbations, on average, small and vanishing at infinity, it is useful in solving a particular practical problem, since the compilation of accurate differential equations adequate to the real process, it is impossible. Permanent perturbation small on average and vanishing at infinity, in particular, may take the form of a single pulse, beginning at the moment and continuing

Key words: Lyapunov stability, stabilization phase system, handling robots

Zhumadilova Zharkyn Bapanovna

Candidate of Physico-mathematical Sciences,
 Associate Professor
 Kazakh humanitarian law university
 Kazakhstan, Astana, Korqalzhyn highway, 8

Zhumadilova Mereke Bapanovna

Candidate of Engineering Sciences, Professor
 Caspian state university of technologies and
 engineering named Sh. Esenova
 Kazakhstan, Aktau, 32 mkr.

Как известно, основным методом исследования устойчивости невозмущенного решения и при постоянно действующих возмущениях является второй метод Ляпунова. В статье получены достаточные условия устойчивости решения невозмущенного движения при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающим на бесконечности.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

где правые части этих уравнений непрерывны в области

$$t \geq 0, \quad |x| \leq H \quad (2)$$

и допускают существование единственного решения при наперед заданных начальных условиях t_0 в области (2), $X(t, 0) \equiv 0$.

При составлении для рассматриваемой материальной системы дифференциальных уравнений движения (1) не учитываются силы, малые по сравнению с основными силами, действующими на эту систему. Эти силы, называемые возмущениями, могут действовать мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния рассматриваемой материальной системы при неизменных дифференциальных уравнениях движения (1), могут действовать и непрерывно, что будет означать, во-первых, изменение начальных значений, во-вторых, что составленные дифференциальные уравнения (1) отличаются от истинных, что в них не учтены некоторые малые поправочные члены.

Пусть возмущения действуют непрерывно, тогда, наряду с уравнениями (1) рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + R(t, x), \quad (3)$$

где функции $R_1, R_2, \dots, R_n$ характеризуют эти постоянно действующие возмущения, и, в отличие от функций $X_1, X_2, \dots, X_n$ практически никогда неизвестны. Эти функции, вообще говоря, не обращаются в нуль при $x = 0$. Относительно них лишь предполагаем, что они обеспечивают существование единственного решения для уравнений (3), определенного в области (2) и удовлетворяющего наперед заданным начальным условиям, взятым из этой области. Кроме того, предполагаем, что функции $R_1, R_2, \dots, R_n$ удовлетворяют в области (2) условию

$$\int_{t_0}^T |R_s(\tau, x_1, \dots, x_n)| d\tau < \rho, \quad s = \overline{1, n} \quad (4)$$

где ρ - достаточно малое положительное число.

Постоянно действующие возмущения (п.д.в.), характеризуемые функциями $R_1, R_2, \dots, R_n$, удовлетворяющими условию (4), будем называть малыми в среднем и исчезающими на бесконечности, т.е.

Определение 1. Невозмущенное решение называется устойчивым при п.д.в., малых в среднем и исчезающих на бесконечности, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существуют два таких других положительных числа δ и ρ , зависящих от ε и t_0 , что всякое возмущенное решение $x_s = x_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, удовлетворяющее в начальный момент $t = t_0$ условию

$$|x_s(t_0)| \leq \delta, \quad s = \overline{1, n} \quad (5)$$

удовлетворяет при $t \geq t_0$ условию

$$|x_s(t)| < \varepsilon, \quad s = \overline{1, n} \quad (6)$$

каковы бы ни были функции $R_1, R_2, \dots, R_n$ в возмущенных уравнениях, лишь бы они в области (2) удовлетворяли условию (4).

Как известно, основным методом исследования устойчивости невозмущенного решения и при постоянно действующих возмущениях является второй метод Ляпунова. Рассмотрим функцию $V(t, x)$, Заданную в области (2). Мы будем предполагать, что функция $V(t, x)$ обладает в указанной области непрерывными частными производными по всем переменным и что они обращаются в нуль при $x=0$.

Условимся полную производную от функции $V(t, x)$ по t в силу возмущенных уравнений (3) обозначать через $\frac{dV}{dt}$, т.е.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} (X_s + R_s),$$

А полную производную от функций V по t в силу уравнений (1) без возмущений обозначать через V' , т.е.

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если для уравнений без возмущений (1) существует функция $V(t, x) = V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая что

- 1) $V(t, x) \geq c_1^2 \|x\|^2$, $c_1 = \text{const} > 0$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$;
- 2) $V'(t, x) \leq 0$;
- 3) $\|grad_x V(t, x)\| \leq c_2^2 \|x\|$ или $\left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| < c_2^2 \|x\|$, $c_2 = \text{const} > 0$,

то возмущенное решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

Доказательство. Согласно условию теоремы функция V определенно положительная в области (2), а функция $V'(t, x)$ -отрицательная в этой области.

Введем в рассмотрение функцию $v(t, x)$, равную положительному значению корня квадратного из функции $V(t, x)$:

$$v(t, x) = [V(t, x)]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Если $V(t, x)$ определенно положительная, то $v(t, x)$ также определенно положительная. Далее,

$$\frac{d}{dt} [v(t, x)]^2 = 2v(t, x) \frac{dv(t, x)}{dt} = \frac{dV(t, x)}{dt},$$

поэтому при $x \neq 0$

$$\frac{dv(t, x)}{dt} = \frac{1}{2} [V(t, x)]^{-\frac{1}{2}} \frac{dV(t, x)}{dt} = \frac{1}{2} \left[v(t, x)^{-1} \frac{dV(t, x)}{dt} \right] \quad (8)$$

и если $\frac{dV(t, x)}{dt}$ -отрицательна, то $\frac{dv(t, x)}{dt}$ также отрицательна.

Отсюда следует, что если $V(t, x)$ -функция Ляпунова для некоторой системы, то $v(t, x)$ также функция Ляпунова для этой же системы.

Из условия теоремы следует, что

$$v(t, x) \geq c_1 \|x\|, \quad v'(t, x) \leq 0 \quad (9)$$

Далее, так как

$$\text{grad}_x v(t, x) = \frac{1}{2} [v(t, x)]^{-1} \text{grad}_x V(t, x),$$

то

$$\|\text{grad}_x v(t, x)\| \leq \frac{1}{2} \frac{c_2^2 \|x\|}{c_1 \|x\|},$$

т.е.

$$\|\text{grad}_x v(t, x)\| \leq \overline{c_2}, \quad \overline{c_2} = \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{c_1}, \quad (10)$$

или

$$\left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} \right| < \overline{c_2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad c_2 < \infty \quad (11)$$

Так как частные производные первого порядка по переменным $x_1, \dots, x_n$ ограничены, то из теоремы о среднем значении следует, что функция $v(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Действительно, при этом

$$v(t, x) = x_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \dots + x_n \left(\frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$$

где производные вычислены в точке $(\Theta x_1, \dots, \Theta x_n)$, $(0 < \Theta < 1)$. В силу ограниченности производных $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, отсюда следует, что для любого положительного числа β можно найти другое положительное число γ такое, что при всех значениях $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяющих условиям $t \geq t_0, |x_s| \leq \gamma, s = \overline{1, n}$ будет выполняться неравенство

$$|v(t, x)| \leq \beta.$$

Обозначим через α точный нижний предел функции $c_1 \|x\|$ в области $|x_s| \geq \varepsilon, s = \overline{1, n}$, где ε - произвольное, наперед заданное положительное число, меньшее H , т.е.

$$\alpha = \sqrt{n} \varepsilon c_1.$$

Тогда очевидно

$$v(t, x) \geq 0 \text{ при } t \geq t_0, |x_s| \geq \varepsilon, s = \overline{1, n} \quad (12)$$

Пусть l - положительное число, меньшее α . Выберем начальные значения $x_1^0, \dots, x_n^0$ величин $x_1, \dots, x_n$ как функции времени t , удовлетворяющие возмущенным уравнениям согласно условиям

$$|x_s^0| \leq \delta(\varepsilon), s = \overline{1, n},$$

Положительное число $\delta(\varepsilon)$ настолько мало, что выполняются неравенства

$$v(t_0, x) < l \text{ при } |x_s^0| \leq \delta < \varepsilon, s = \overline{1, n} \quad (13)$$

Покажем, что при всех $t \geq t_0$ будем иметь

$$|x_s(t)| < \varepsilon, s = \overline{1, n},$$

если только в неравенствах (4) β выбрано следующим образом

$$\rho < \frac{\alpha - l}{nc_2} \quad (14)$$

Имеем

$$\frac{dv}{dt} = v' + \sum_{s=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_s} R_s,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0}^t v' dt + \int_{t_0}^t \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_s} R_s \right) dt,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dv}{dt} dt < nc_2 \rho, v(t, x(t)) - v(t_0, x^0) = \int_{t_0}^t \frac{dv}{dt} dt,$$

$$v(t, x) < l + nc_2 \rho.$$

С учетом (14) из последнего неравенства получим

$$v(t, x(t)) < \alpha,$$

Откуда на основании (12) следует, что при всех $t \geq t_0$ будем иметь (в виду существования малого высшего предела)

$$|x_s(t)| < \varepsilon, s = \overline{1, n}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что теорема 1 справедлива и для автономной системы, где

$$X_s = X_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_s(x) \quad (15)$$

в уравнениях (1), (23). При этом будем рассматривать функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x)$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если для уравнения без возмущений (1), (15) существует функция $V(x)$ такая, что

$$1) V(x) > 0 \text{ при } x \neq 0, V(0) = 0;$$

$$2) V'(x) \leq 0;$$

$$3) \|grad_x V(x)\| \leq c_2^2 \|x\| \text{ или } \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \right| < c_2^2 \|x\|, c_2 = const > 0,$$

То возмущенное решение устойчиво при п.д.в. ,малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

Доказательство. Сначала определим в области (2)

$$C_1^2 = \inf_x \frac{V(x)}{\|x\|^2}.$$

$$\text{Тогда } V(x) \geq C_1^2 \|x\|^2.$$

Далее, как и в теореме 1, введем функцию $v(x) = [V(x)]^{\frac{1}{2}}$ и получим неравенства

$$v(x) \geq c_1 \|x\|, v'(x) \leq 0,$$

$$\left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| < \overline{c_2}, \overline{c_2} = \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{c_1} < \infty, i = \overline{1, n}.$$

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с доказательством теоремы 1, где $l = \max v(x^0)$ при $|x_s^0| \leq \delta < \varepsilon$, $s = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Список используемых источников:

1. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука. 282 с.
2. Половинкин А.И. Автоматизация поискового конструирования. М.: Радио и связь, 1981. 235 с.
3. Евгеньев Г.Б. Системология инженерных знаний. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 154 с.

© 2015, Жумадилова Ж.Б., Жумадилова М.Б.
Исследование движения манипуляционных роботов
при постоянно действующих возмущениях

© 2015, Zhumadilova Zh.B., Zhumadilova M.B.
Motion Study robotic manipulator under constantly
acting perturbations