DOI: 10.17117/na.2015.07.1033

Поступило в редакцию: 20.07.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.07.1033.pdf>

Титов В.Г.

Клеточные автоматы для приближённого вычисления элементарных функций

Titov V.G.

Cellular automata for approximate calculation of the elementary functions

Рассматривается создание клеточных автоматов для приближённого вычисления функций $\ln x$, $\sin x$. Дается сравнение клеточных автоматов по точности вычисления

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, клеточный автомат, разностное уравнение, функция

The creation of cellular automata for the approximate calculation functions $\ln x$, $\sin x$ is considered. The comparison of cellular automata accuracy calculation is given

Key words: differential equation, cellular automaton, difference equation, function

Титов Владимир Геннадьевич

Кандидат технических наук, ведущий программист
Институт машиноведения УрО РАН
г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34

Titov Vladimir Gennadevich

Candidate of Engineering Sciences, Lead
Programmer
Institute of Engineering Science
Ekaterinburg, Komsomolskaya st., 34

Введение. Для вычисления элементарных функций используются степенные, рациональные и другие разложения, а также дифференциальные уравнения [1, 2].

Многие методы решения дифференциальных уравнений переводятся на язык клеточных автоматов, где допускают дальнейшее развитие, приобретают наглядную форму, удобную для вычислений и программирования.

В статье показано создание клеточных автоматов для приближенного вычисления некоторых элементарных функций. На основе этих клеточных автоматов можно создать программы для приближенного вычисления соответствующих элементарных функций. Делается сравнение клеточных автоматов по точности вычисления.

Клеточные автоматы изучаются и используются в математике, теории вычислимости, физике, теоретической биологии, микромеханике. Применение клеточных автоматов для приближенного вычисления элементарных функций в литературе не обнаружено.

Клеточные автоматы для приближенного вычисления $y(x)=\ln x$. Составим из первой и второй производных функции $y(x)=\ln x$ обыкновенное дифференциальное уравнение (1).

$$y'(x)=1/x ; y''(x)=-1/x^2 ; y'''=-y'^2 \quad (1)$$

Чтобы найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_0)=\ln x_0$, делим интервал $(x_0, x_m]$ на m промежутков длины $\Delta x=(x_m-x_0)/m$ и, заменяя $y'(x) \approx \Delta y/\Delta x$, $y''(x) \approx \Delta^2 y/\Delta x^2$, получаем разностное уравнение (2)

$$(y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k)/\Delta x^2 = -((y_{k+1}-y_k)/\Delta x)^2 \quad (k=0,1,\dots,m-2; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (2)$$

с дополнительными условиями $y_0=\ln x_0$, $y_1=\ln(x_0+\Delta x)$. Равенство (2) эквивалентно (3), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+2}=2y_{k+1}-y_k-(y_{k+1}-y_k)^2 \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) можно получить другое разностное уравнение (4), если Δy заменить на $y_k - y_{k-1}$

$$(y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k)/\Delta x^2 = -((y_k-y_{k-1})/\Delta x)^2 \quad (k=1,2,\dots,m-2; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (4)$$

с дополнительными условиями $y_0=\ln x_0$, $y_1=\ln(x_0+\Delta x)$, $y_2=\ln(x_0+2\Delta x)$. Равенство (4) эквивалентно (5), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+2}=2y_{k+1}-y_k-(y_k-y_{k-1})^2 \quad (5)$$

Составим из первой и третьей производных функции $y(x)=\ln x$ обыкновенное дифференциальное уравнение (6).

$$y'''(x)=2/x^3 ; y'''=2y'^3 \quad (6)$$

Чтобы найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию $y(x_0)=\ln x_0$, делим интервал $(x_0, x_m]$ на m промежутков длины $\Delta x=(x_m-x_0)/m$ и, заменяя $y'(x) \approx \Delta y/\Delta x$, $y'''(x) \approx \Delta^3 y/\Delta x^3$, получаем разностное уравнение (7)

$$(y_{k+3}-3y_{k+2}+3y_{k+1}-y_k)/\Delta x^3 = 2((y_{k+1}-y_k)/\Delta x)^3 \quad (k=0,1,\dots,m-3; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (7)$$

с дополнительными условиями $y_0=\ln x_0$, $y_1=\ln(x_0+\Delta x)$, $y_2=\ln(x_0+2\Delta x)$. Равенство (7) эквивалентно (8), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+3}=3y_{k+2}-3y_{k+1}+y_k+2(y_{k+1}-y_k)^3 \quad (8)$$

В табл. 1 приведены отличия между $y(x)=\ln x$ и клеточными автоматами (3), (5), (8) при разных значениях m , $x_0=1$, $x_m=2$.

Таблица 1. Отличия между $y(x)=\ln x$ и клеточными автоматами (3), (5), (8) при разных значениях m , $x_0=1$, $x_m=2$

m	КА (3)	КА (5)	КА (8)
10	1.4028*10 ⁻²	3.7446*10 ⁻²	3.3367*10 ⁻²
102	1.5205*10 ⁻³	4.5129*10 ⁻³	5.6231*10 ⁻³
103	1.5329*10 ⁻⁴	4.5937*10 ⁻⁴	5.9244*10 ⁻⁴
104	1.5341*10 ⁻⁵	4.6019*10 ⁻⁵	5.953*10 ⁻⁵
105	1.5342*10 ⁻⁶	4.6025*10 ⁻⁶	3.8345*10 ⁻⁵

Наименьшие отличия у клеточного автомата (3). Сдвиг по Δy дал клеточный автомат (4), у которого отличия увеличились. Использование третьей

производной функции дало клеточный автомат (8), у которого наибольшие отличия. Увеличение m уменьшает отличие.

Клеточные автоматы для приближенного вычисления $y(x)=\sin x$. Составим из функции $y(x)=\sin x$ и ее производной обыкновенное дифференциальное уравнение (9).

$$y'(x)=\cos x=(1-\sin^2 x)^{1/2}; y'=(1-y^2)^{1/2} \quad (9)$$

Чтобы найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $y(x_0)=\sin x_0$, делим интервал $[x_0, x_m]$ на m промежутков длины $\Delta x=(x_m-x_0)/m$ и, заменяя $y'(x) \approx \Delta y/\Delta x$, получаем разностное уравнение (10)

$$(y_{k+1}-y_k)/\Delta x=(1-y_k^2)^{1/2} \quad (k=0,1,\dots,m-1; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (10)$$

с дополнительным условием $y_0=\sin x_0$. Равенство (10) эквивалентно (11), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+1}=y_k+\Delta x(1-y_k^2)^{1/2} \quad (11)$$

Для решения уравнения (9) можно получить другое разностное уравнение (12), если y заменить на y_{k-1}

$$(y_{k+1}-y_k)/\Delta x=(1-y_{k-1}^2)^{1/2} \quad (k=1,2,\dots,m-1; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (12)$$

с дополнительными условиями $y_0=\sin x_0, y_1=\sin(x_0+\Delta x)$. Равенство (12) эквивалентно (13), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+1}=y_k+\Delta x(1-y_{k-1}^2)^{1/2} \quad (13)$$

Составим из функции $y(x)=\sin x$ и ее второй производной обыкновенное дифференциальное уравнение (14).

$$y''(x)=-\sin x; y''=-y \quad (14)$$

Чтобы найти решение уравнения (14), удовлетворяющее условию $y(x_0)=\sin x_0$, делим интервал $[x_0, x_m]$ на m промежутков длины $\Delta x=(x_m-x_0)/m$ и, заменяя $y''(x) \approx \Delta^2 y/\Delta x^2$, получаем разностное уравнение (15)

$$(y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k)/\Delta x^2=-y_k \quad (k=0,1,\dots,m-2; \Delta x=(x_m-x_0)/m) \quad (15)$$

с дополнительными условиями $y_0=\sin x_0, y_1=\sin(x_0+\Delta x), y_2=\sin(x_0+2\Delta x)$. Равенство (15) эквивалентно (16), которое формально совпадает с определением клеточного автомата.

$$y_{k+2}=2y_{k+1}-y_k(1+\Delta x^2) \quad (16)$$

В табл. 2 приведены отличия между $y(x)=\sin x$ и клеточными автоматами (11), (13), (16) при разных значениях $m, x_0=0, x_m=1$.

Таблица 2. Отличия между $y(x)=\sin x$ и клеточными автоматами (11), (13), (16) при разных значениях $m, x_0=0, x_m=1$

m	КА (11)	КА (13)	КА (16)
10	$1.7085 \cdot 10^{-2}$	$5.1126 \cdot 10^{-2}$	$3.9567 \cdot 10^{-2}$
102	$1.6676 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$4.1855 \cdot 10^{-3}$
103	$1.6636 \cdot 10^{-4}$	$4.9916 \cdot 10^{-4}$	$4.2052 \cdot 10^{-4}$
104	$1.6632 \cdot 10^{-5}$	$4.9896 \cdot 10^{-5}$	$4.2071 \cdot 10^{-5}$
105	$1.6632 \cdot 10^{-6}$	$4.9894 \cdot 10^{-6}$	$4.2074 \cdot 10^{-6}$

Наименьшие отличия у клеточного автомата (11). Сдвиг по Δy дал клеточный автомат (13), у которого отличия увеличились. Использование второй

производной функции дало клеточный автомат (16), у которого наибольшие отличия. Увеличение m уменьшает отличие.

Закключение. Для приближенного вычисления элементарной функции могут быть созданы различные клеточные автоматы. Источниками клеточных автоматов могут быть дифференциальные и разностные уравнения. Если на основе клеточного автомата требуется создать программу для приближенного вычисления функции, то рекомендуется использовать дифференциальное уравнение с минимальным порядком. Для повышения точности вычисления рекомендуется уменьшать шаг вычисления.

Список литературы:

1. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М: Мир, 1977. 584 с.
2. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М: Физматгиз, 1961. 238 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М: Наука, 1968. 720 с.

© 2015, Титов В.Г.

Клеточные автоматы для приближённого
вычисления элементарных функций

© 2015, Titov V.G.

Cellular automata for approximate calculation of the
elementary functions