DOI: 10.17117/na.2015.07.1001

Поступило в редакцию: 31.07.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.07.1001.pdf>

Арванова С.М. О краевой задаче со смещением для уравнения Бицадзе-Лыкова

Arvanova S.M.

About the regional task with shift for Bitsadze-Lykova equation

В работе поставлена и исследована нелокальная задача для уравнения влагопереноса. Доказывается существование и единственность решения задачи
Ключевые слова: уравнение влагопереноса, краевая задача, задача со смещением, дробные интегралы, дробные производные

In this paper a nonlocal problem for a diffusion transfer equation. The existence and uniqueness solutions of boundary value problem are proved
Key words: diffusion transfer equation, boundary value problem, problem with shifted variable, fractional integrals, fractional derivatives

Арванова Саният Мухамедовна

Аспирант

Институт прикладной математики и автоматизации

г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Arvanova Saniyat Mukhamedovna

Postgraduate

Institute of applied mathematics and automation
Nalchik, Shortanova st., 89 A

Рассмотрим уравнение влагопереноса

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0, \quad (1)$$

в конечной области Ω , ограниченной характеристиками $AC: x - \frac{1}{2}y^2 = 0$, $BC: x + \frac{1}{2}y^2 = 1$, $AD: x - \frac{1}{2}(-y)^2 = 0$, $BD: x + \frac{1}{2}(-y)^2 = 1$ уравнения (1).

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y=0$.

Задача С. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Omega_2 \cup J) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющее условиям

$$a_1(x) D_{0x}^{\frac{1}{2}} u_1[\theta_0^1(x)] + b_1(x) u_{1y}(x, 0) = c_1(x), \forall x \in \bar{J}, \quad (2)$$

$$a_2(x) x^{-\frac{1}{2}} u_2[\theta_0^2(x)] + b_2(x) D_{0x}^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} u_2[\theta_1^2(x)] = c_2(x), \quad (3)$$

где $a_i(x), b_i(x), c_i(x)$ – заданные функции из класса $C^1(\bar{J}) \cap C^3(J)$, $i = 1, 2$; причем $a_i^2(x) + b_i^2(x) \neq 0$; $\theta_0^i(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$, с AC и AD , $\theta_1^2(x)$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x, 0)$ с характеристикой BD , D_{ax}^α – оператор дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования порядка α с началом в точке $a[1]$:

$$D_{ax}^{\alpha} \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \alpha < 0, \\ \varphi(x), \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), \alpha > 0. \end{cases}$$

Задача С относится к классу краевых задач со смещением [2].

Теорема. Пусть в области Ω выполнены условия

$$b_1(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1(x) \neq 0, a_1(x) \neq 0; \quad (4)$$

$$\left[\frac{b_1(x)}{a_1(x)} \right]' \geq 0, b_1(1) > \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1(1); \quad (5)$$

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}} b_2(x)}{(1-x) a_2(x)} \right]' \geq 0, a_2(x) \neq 0, b_2(x) \neq 0; \quad (6)$$

$$(1-x) a_2(x) + \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}} b_2(x) \neq 0. \quad (7)$$

то задача С имеет и притом единственное решение.

Доказательство. Переходя к доказательству единственности решения задачи, будем полагать, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \pm 0} u(x, y) &= \tau(x), \\ \lim_{y \rightarrow \pm 0} u_y(x, y) &= v(x), \end{aligned}$$

Удовлетворяя решение задачи Коши [3] для уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 условиям (2) и (3), получим

$$v(x) = -\frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} D_{0x}^{\frac{1}{2}} \tau(x) + \frac{c_1(x)}{\mu_1(x)}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{\sqrt{\pi} a_2(x)}{2 \mu_2(x)} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) + \\ &+ \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \frac{b_2(x)}{\mu_2(x)} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v(x) + x^{\frac{1}{2}} (1-x) \frac{c_2(x)}{\mu_2(x)}. \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\mu_1(x) = b_1(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_1(x), \mu_2(x) = (1-x) a_2(x) + \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}} b_2(x).$$

Из (8) и (9) при $c_i(x) = 0$ следует:

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} D_{0x}^{\frac{1}{2}} \tau(x), \\ \tau(x) &= \frac{\sqrt{\pi} a_2(x)}{2 \mu_2(x)} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \frac{b_2(x)}{\mu_2(x)} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v(x). \end{aligned}$$

Докажем, что решение задачи С единственно при выполнении условий (4)-(7) теоремы.

Рассмотрим интеграл

$$J_1^* = \int_0^1 \tau(x) v(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} dx \left[\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Обозначим

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = \tau_1(x).$$

С учетом формулы обращения интегрального уравнения Абеля, воспользовавшись известной формулой [4]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos kt dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos \frac{\mu\pi}{2} \quad (k > 0, 0 < \mu < 1),$$

полагая в ней $k = |x - \xi|$, $\mu = \frac{1}{2}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} J_1^* = & - \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} dt \left\{ \frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} \left(\int_0^1 \tau_1(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \left[\frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} \right]' \left(\int_0^x \tau_1(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 dx \right\} - \\ & - \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} dt \left\{ \frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} \left(\int_0^1 \tau_1(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \left[\frac{a_1(x)}{\mu_1(x)} \right]' \left(\int_0^x \tau_1(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

При выполнении условий теоремы получим $J_1^* \leq 0$.

Далее рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J_2^* &= \int_0^1 \tau(x) v(x) dx = \\ &= \gamma_2 \int_0^1 \tau(x) \left[\sqrt{\pi}(1-x) \frac{a_2(x)}{\mu_2(x)} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) + x^{\frac{1}{2}} \frac{b_2(x)}{\mu_2(x)} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} J_2^* = & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} dt \int_0^1 \left[\frac{(1-x)a_2(x)}{\mu_2(x)} \right]' \left(\int_0^x v(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 dx - \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} dt \int_0^1 \left[\frac{(1-x)a_2(x)}{\mu_2(x)} \right]' \left(\int_0^x v(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 dx + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} dt \int_0^1 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} b_2(x)}{\mu_2(x)} \right]' \left(\int_0^x v(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} dt \int_0^1 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} b_2(x)}{\mu_2(x)} \right]' \left(\int_0^x v(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 dx.$$

При выполнении условий теоремы получим $J_2^* \geq 0$. Получаем

$$\int_0^1 \tau(x) v(x) dx = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\tau(x) = 0$ и, следовательно, $v(x) = 0$ и $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_1 и Ω_2 как решения задачи с нулевыми данными. Таким образом, решение сформулированной задачи единственно.

Доказательство существования решения задачи С проводится методом интегральных уравнений. После некоторых преобразований вопрос существования решения задачи редуцирован к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

Если для сингулярного интегрального уравнения

$$B(x)v(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v(\xi) d\xi}{\xi - x} + \int_0^1 K(x, \xi) v(\xi) d\xi = f(x), \quad (11)$$

где

$$B(x) = \frac{\mu_1(x)\alpha(x)}{a_1(x)} + 2\sqrt{\pi} \frac{(1-x)a_2(x)}{\mu_2(x)},$$

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{A(x) - A(t)}{(x-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{dt}{(\xi-t)^{\frac{1}{2}}}, \text{ при } \xi \geq x; \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^x \frac{A_1(x) - A_1(t)}{(x-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{dt}{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\xi} \frac{A(x) - A(t)}{(x-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{dt}{(\xi-t)^{\frac{1}{2}}}, \text{ при } \xi \leq x, \end{cases}$$

$$A(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}} b_2(x)}{\mu_2(x)}; A(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}} b_2(t)}{\mu_2(t)}; A_1(x) = (1-x) \frac{a_2(x)}{\mu_2(x)};$$

$$A_1(t) = (1-t) \frac{a_2(t)}{\mu_2(t)}.$$

$$f(x) = \frac{c_1(x) - \mu_1(x)}{a_1(x)} - \gamma_1 \Gamma \left(\frac{1-a}{4} \right) D_{0x}^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} (1-x) \frac{c_2(x)}{\mu_2(x)}.$$

ядро $K(x, t) \in C(\bar{J} \times \bar{J}) \cap C^2(J \times J)$, правая часть $f(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, то уравнение (11) приводится к уравнению Фредгольма второго рода при $B(x) \neq 0$. Из возможности приведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности искомого решения следует суще-

ствование решения поставленной задачи С. По найденному $v(x)$ определяется $\tau(x)$ и решение $u(x, y)$ задачи в областях Ω_i как решения задачи Коши.

Список литературы:

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. 272с.
2. Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т.187. № 4. С. 736-739.
3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Итоги науки. М.: Издательство академии наук СССР. 1959. 164 с.
4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гостехиздат, 1953. 379 с.

© 2015, Арванова С.М.

О краевой задаче со смещением для уравнения
Бицадзе-Лыкова

© 2015, Arvanova S.M.

About the regional task with shift for Bitsadze-
Lykova equation