DOI: 10.17117/na.2015.01.172

Поступило в редакцию: 30.01.2015

<http://ucom.ru/doc/na.2015.01.172.pdf>

Галимьянов А.Ф., Горская Т.Ю. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-дифференциальным оператором

Galimjanov A.F., Gorskaya T.Yu.
The generalized method of Bubnov-Galerkin method for
equations with fractional differential operator

В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова-Галеркина для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. Задана структура численного решения и получена оценка погрешности приближенного решения по метрике энергетического пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Для частного случая дробно-дифференциального уравнения приведена оценка сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дробные производные Вейля, операторы дробного дифференцирования

Горская Татьяна Юрьевна

Кандидат технических наук, доцент
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
г. Казань, ул. Зеленая, 1

Галимьянов Анис Фуатович

Кандидат физико-математических наук, доцент
Казанский федеральный университет
г. Казань, ул. Кремлевская, 18

The paper presents the results of a theoretical study of application Bubnov-Galerkin method for finding the numerical solution of equations with operators of fractional differentiation. Given the structure of the numerical solution and an estimate of the error of the approximate solution to the energy metric space generated by the operator of fractional differentiation. For the special case of fractional differential equations give an estimate of the convergence of the approximate solution to the exact solution of the original problem

Key words: differential equations, fractional derivatives Weyl operators of fractional differentiation

Gorskaya Tatyana Yurievna

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
Kazan State University of Architecture and Engineering
Kazan, Green st., 1

Galimjanov Anis Fuatovich

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Kazan Federal University
Kazan, Krimlin st., 18

Введение

В настоящее время весьма активно проводится изучение уравнений с дробно-дифференциальными операторами. Существует ряд теоретических и прикладных задач, которые приводят к необходимости решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. К таким задачам относятся задачи диффузии, электрохимических процессов. Данные задачи, как правило, точ-

но не решаются, поэтому весьма остро стоят вопросы разработки и применения приближенных методов решения с последующим их теоретическим обоснованием для этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений (см., напр. [1-8]). Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остается открытым вопрос теоретического обоснования применения приближенных методов для более общего класса подобных задач.

В работе предлагается обобщенный метод Бубнова-Галеркина для нахождения приближенного решения дробно-дифференциальных уравнений. Получены оценки сходимости приближенного решения к точному решению по метрике энергетического пространства, порожденного дробно-интегральным оператором. Построенный вычислительный метод проиллюстрирован на частном примере и приведена оценка метода.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, u, f \in L_2[0, 2\pi], \quad (1)$$

где $D^{(\alpha)} = \frac{(D_+^{(\alpha)} + D_-^{(\alpha)})}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$ выражается с помощью операторов дробного дифференцирования $D_{\pm}^{(\alpha)}$, определяемых для дробных производных Вейля для функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$ по формулам:

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{(\alpha)} \varphi)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, x > a, \\ (D_{b-}^{(\alpha)} \varphi)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, x < b, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Производные (2) принято также называть производными Римана-Лиувилля порядка α , левосторонним и правосторонним, соответственно. u – неизвестная, а f – заданная функции из пространства $L_2[0, 2\pi]$. T – некоторый оператор, для которого $(D^{(\alpha)} + T)$ – линейный оператор, и, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Оператор $D^{(\alpha)}$ действует по правилу:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\alpha u_k e^{ikx}. \quad (3)$$

Здесь u_k – суть коэффициенты Фурье для функции u .

Рассмотрим случай, когда дробная производная (2) порядков $\alpha \geq 1$, тогда ее выражение задается следующим образом.

Число α – дробный порядок производной можно представить в виде:

$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, через сумму целой и дробной частей соответственно. Если α – целое число, то под дробной производной будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha, D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Если же число α – не целое, то целесообразно ввести производные:

$$D_{a+}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{a+}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{b-}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f.$$

Таким образом, дробные производные высших порядков задаются как:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha] + 1,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha] + 1.$$

Для оператора (3) справедливы следующие леммы.

Лемма 1. $D^{(\alpha)}$ – положительно определенный оператор.

Доказательство. Известно [9], что $D^{(\alpha)}$ будет положительно определенным оператором, если выполняется условие: $(D^{(\alpha)}u, u) > 0$. Кроме того, система e^{ikx} полна в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, то справедливо:

$$(D^{(\alpha)}u, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (D^{(\alpha)}u, e^{ikx}) (u, e^{ikx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k^2 > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. $D^{(\alpha)}$ – симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $D_+^{\alpha}u$ и v для любых $u, v \in L_2[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} (D_+^{\alpha}u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ikx} dt v(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ik(x-t)} dt v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-ik)^{\alpha} e^{ikx} dx u(t) dt = (u, D_-^{\alpha}v). \end{aligned}$$

Аналогично для D_-^{α} имеем: $(D_-^{\alpha}u, v) = (u, D_+^{\alpha}v)$.

Так как оператор $D^{(\alpha)}$ является суммой симметричных операторов D_+^{α} и D_-^{α} , то он является также симметричным оператором.

Учитывая это, введем скалярное произведение и норму соответственно:

$$[u, v] = (D^{(\alpha)}u, v), [u] = (D^{(\alpha)}u, u)^{1/2}.$$

В явном виде скалярное произведение будет выражено как:

$$[u, v] = (D^{(\alpha)}u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k |k|^{\alpha} e^{ikx} v(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k v_k.$$

Пополняя $D(D^{(\alpha)})$ по введенной норме, получим энергетическое пространство, обозначим которое, согласно [9], через H_D .

Умножая исходное уравнение (1) на произвольную функцию $v \in D(D^{(\alpha)})$, получим следующее уравнение:

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \quad (4)$$

Уравнение (4) допускает обобщенную постановку задачи. Обобщенным решением уравнения (1) назовем функцию $u \in H_D$, удовлетворяющую уравнению (4) для любой функции $v \in H_D$.

Метод Бубнова-Галеркина

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в энергетическом пространстве H_D выбирается система базисных функций $\varphi_j, j = 1..N$. Приближенное решение ищется в виде полинома по выбранной системе базисных функций в виде:

$$u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j. \quad (5)$$

Неизвестные коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида:

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), k = 1 \dots N. \quad (6)$$

Учитывая представление (5) и линейность введенного и обыкновенного скалярных произведений, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N a_j [\varphi_j, \varphi_k] + \sum_{j=1}^N a_j (T\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k), k = 1 \dots N. \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть 1) уравнение (1) имеет единственное решение при данной правой части. 2) Форма $L(u, v) = [u, v] + (Tu, v)$ является H_D – определенной и H_D – ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$L(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, L(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \gamma_0, \gamma_1 \equiv \text{const}.$$

3) Последовательность подпространств H_N – линейных оболочек функций $\varphi_j, j = 1..N$ – является предельно плотной в H_D .

Тогда при любом конечном N система (6) однозначно разрешима и приближенное решение u_N сходится к точному решению u при $N \rightarrow \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности:

$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u, N),$$

где $\varepsilon(u, N)$ – заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству:

$$\min_{c_j} \left\| D^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right) \right\|.$$

Список литературы:

1. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2013. V. 16. № 3. Pp. 670-681.
2. Barton T.A., Purnaras I.K. Lp-solutions of singular integro-differential equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2012. № 386. Pp. 830-841.
3. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 2013. № 18. Pp. 1203-1213.
4. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // *Applied Mathematics and Computation*, 2013. № 219. Pp. 6750-6760.
5. Saeed R.K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2008. V. 2, №. 1. Pp. 114-124.

6. Горская Т.Ю., Ожегова А.В. О сходимости проекционного метода для уравнения задачи движения // Известия КГАСУ, 2013, 2(24). С. 175-189.
7. Галимянов А.Ф., Сайфуллина Д.Э. Квадратурный метод решения интегрального уравнения смешанного типа. // Изв. Вузов. Математика. 2009. №12. С. 22-27.
8. Галимянов А.Ф., Горская Т.Ю. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором // Известия КГАСУ, 2014, 3(30). С. 398-402.
9. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

References:

1. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. V. 16. № 3. Pp. 670-681.
2. Barton T.A., Purnaras I.K. Lp-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2012. № 386. Pp. 830-841.
3. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2013. № 18. Pp. 1203-1213.
4. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // Applied Mathematics and Computation, 2013. № 219. Pp. 6750-6760.
5. Saeed R.K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008.V. 2, №. 1. Pp. 114-124.
6. Gorskaya T.U., Ozhegova A.V. On the convergence of the projection method for an equation of the goals of the movement // News KGASU. 2013. № 2(24). Pp. 175-189.
7. Galimyanov A.F., Saifullina D.E. Quadrature method for solving integral equations of mixed type // Math. Universities. Mathematics. 2009. № 12. Pp. 22-27.
8. Galimyanov A.F., Gorskaya T.U. The generalized method of Bubnov-Galerkin method for equations with fractional integral operator // News KGASU. 2013. № 3(30). Pp. 398-402.
9. Marchuk G.I. Agoshkov V.I. Introduction in proyektzionno-net methods. M: Science, 1981. 416 p.

© 2015, Галимянов А.Ф., Горская Т.Ю.
Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для
уравнений с дробно-дифференциальным
оператором

© 2015, Galimjanov A.F., Gorskaya T.Yu.
The generalized method of Bubnov-Galerkin method
for equations with fractional differential operator