Буренин А. А., Матвеев В. П., Ткачева А. В.
A. A. Burenin, V. P Matveenko, A. V. Tkacheva

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ СБОРКИ ДВУХСЛОЙНОГО ВАЛА
СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ**

**TEMPERATURE VOLTAGES WHEN ASSEMBLING THE TWO-LAYER SHAFT
WITH THE HOT CHARGING METHOD**

Буренин Анатолий Александрович – член-корреспондент Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallurgov, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.
Mr. Anatoliy A. Burenin – Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.

Матвеев Валерий Павлович – академик Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Пермь); 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел.: +7 (342) 237-84-61. E-mail: mvp@icmm.ru.

Mrs. Valery P. Matveenko – Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director of the Institute of Continuum Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Perm); 614013, Perm, 1 Academician Korolev str.; tel.: +7 (342) 237-84-61. E-mail: mvp@icmm.ru.

Ткачева Анастасия Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallurgov, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Ms. Anastasia V. Tkacheva – PhD in Physics and Mathematics, researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Аннотация. Изучена эволюция температурных напряжений в процессе сборки биметаллического вала способом горячей посадки трубы на вал. Показано, что при использовании условий максимальных приведённых касательных напряжений в качестве пластического потенциала имеется возможность провести расчёты без дискретизации областей пластического течения. Предложенный алгоритм расчётов последовательными шагами по времени позволяет указать время и место возникновения пластических областей и их исчезновения в процессе нагрева и последующего остывания.

Summary. The evolution of temperature stresses when assembling bimetallic rolls is studied. It is shown that when using the conditions of maximum reduced tangential stresses as a plastic potential, it is possible to perform calculations without discretizing the regions of plastic flow. The proposed algorithm for calculating successive steps in time allows specifying the time and place of plastic areas occurrence and their disappearance when heating and subsequent cooling.

Ключевые слова: упругость, идеальная пластичность, условия пластичности Ишлинского – Ивлева, температурные напряжения, сборка с натягом, горячая посадка.

Key words: elasticity, ideal plasticity, conditions of plasticity of Ishlinsky – Ivlev, temperature stresses, tight fit assembly, hot charging.

УДК 539.374

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

Технологическая операция сборки металлоконструкций из цилиндрических деталей способом их горячей посадки восходит к предложению выдающегося инженера-механика, экстраординарного академика Петербургской академии наук А. В. Гадолина. Предложенный им способ повышения прочностных свойств стволов артиллерийских орудий без увеличения веса состоял именно в двухслойной сборке как раз способом горячей посадки. Такая конструкция позволяла выдерживать повышенные давления пороховых газов и потому приводила к существенному увеличению дальности стрельбы. С тех пор горячая посадка является одной из основных в ряду технологических операций сборки с натягом. Методическое обеспечение расчётов данной технологии базируется в основном на теории температурных напряжений в упругих телах [1; 2], то есть проявлением в процессе сборки пластических свойств материалов сопрягаемых деталей пренебрегают. Оправдание тому находят в существенном усложнении математического аппарата, который требует более сложных вычислительных алгоритмов и программ расчётов [18; 3]. Возникающие и продвигающиеся по деформируемым элементам сборки упругопластические границы разделяют расчётную область на части, в которых деформирование подчинено разным системам уравнений. Граничные поверхности при этом остаются необходимым элементом решения краевых задач теории, положение их следует отслеживать в процессе расчётов. Также алгоритмически обязаны отслеживаться моменты времени и места возникновения и исчезновения таких граничных поверхностей. Непостоянство границ расчётных областей, их деление и смыкание существенно затрудняет использование наработанных процедур и методов численных расчётов. Только современные вычислительные возможности позволили решить ряд простейших задач теории термоупругопластичности [4 – 7; 13; 15 – 17] и теории неустановившихся температурных напряжений в условиях горячей посадки [8; 9; 12; 14] в частности.

Существенные упрощения в математическом аппарате теории и его алгоритмизации для численных расчётов достигаются при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов. К последним относятся классические условия пластичности [10; 11] максимальных касательных напряжений (условие Треска – Сен-Венана) и максимальных приведённых касательных напряжений (условие Ишлинского – Ивлева). Но в таком случае встречаем иную сложность: в процессе эволюции температурных напряжений уже пластические области могут разделяться на части, в которых пластическое течение подчиняется разным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряжённых состояний разным граням и рёбрам поверхности нагружения. Следовательно, число подвижных граничных поверхностей увеличивается, как и число расчётных областей, где интегрировать необходимо разные системы уравнений и сопрягать такие решения на подвижных границах. Тем не менее в [9] с использованием условия Треска – Сен-Венана было показано, что во всех возможных случаях одномерную систему уравнений в задаче горячей посадки трубы на вал можно записать в перемещениях и проинтегрировать. Таким способом следуют конечные соотношения, позволяющие представить напряжения и деформации в каждый рассчитываемый момент времени в зависимости от распределения температуры по элементам сборки. Таким способом удаётся избежать дискретизации расчётных областей и в условиях зависимости предела текучести от температуры отследить возникновения и исчезновения различных областей течения, включая повторные (обратные) пластические течения.

Здесь рассмотрим посадку трубы на вал так же, как и в [9], но с двумя существенными отличиями. Первое такое отличие приближает задачу теории температурных напряжений в упругопластических телах к технологическим условиям операции сборки горячей посадкой непосредственно в промышленности, а именно: до момента посадки охватываемая деталь сборки (труба) уже имеет в себе необратимые (пластические) деформации, вызванные её нагревом по внутренней поверхности, а распределение температуры по её радиусу неоднородно (в отличие от [9]). Второе отличие связано с использованием кусочно-линейного условия пластического течения Ишлинского – Ивлева, а не условия Треска – Сен-Венана. Это вносит новые особенности [7] в методику рас-

чётов, так как пластические области могут зарождаться не только на контактной поверхности (как в [9]), но и внутри области деформирования.

Исходные соотношения математической модели. Постановка задачи

Деформации e_{ij} полагаются малыми и складывающимися из обратимой e_{ij}^e и необратимой (пластической) составляющих e_{ij}^p :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации вместе с температурой T задают напряжения σ_{ij} в материале

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e. \quad (2)$$

В (2) λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули материала тела; α – коэффициент линейного расширения; T_0 – начальная (комнатная) температура, при которой осуществляется свободное состояние. Пластические деформации растут в условиях соответствия напряжённых состояний поверхности $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ нагружения в пространстве напряжений. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [10] уравнение поверхности нагружения является пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \varphi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \varphi > 0. \quad (3)$$

В качестве поверхности нагружения здесь принимаем поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4)$$

Предел текучести k в (3) и (4) считаем зависимым от температуры:

$$k = k_0 \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_0} \right)^2. \quad (5)$$

В (5) k_0 – предел текучести при температуре T_0 ; T_p – температура плавления материала.

Прежде чем перейти к операции посадки нагреем охватывающую трубу. В случае посадки крупногабаритных деталей нагрев трубы осуществляют подводом тепла к её внутренней поверхности. Так, если длинная труба имеет размеры $R \leq r \leq R_2$, то подводом тепла добиваются, чтобы радиус её внутренней поверхности оказался равен радиусу вала $r = R_1$. Процесс нагрева задаётся уравнением теплопроводности

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}); \quad (6)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} T_{,t} \Big|_{r=R_1} &= q, \\ \psi_1 T_{,r} \Big|_{r=R_2} &= \chi (T - T_0), \\ T \Big|_{t=0} &= T_0. \end{aligned} \quad (7)$$

В (6) и (7) a – коэффициент температуропроводности; q – скорость подвода тепла; ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала трубы; χ – коэффициент теплоотдачи от поверхности трубы в окружающую среду. Последний существенно зависит от геометрии трубы, теплофизических свойств окружающей среды и др. Далее будем считать его постоянным. Равенство $R = R_1$ достигается в некоторый момент времени $t = t_*$, являющийся моментом посадки трубы на вал, находящийся при температуре T_0 . Краевыми условиями для последующего процесса теплопроводности будут

$$\begin{aligned} T^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= T^{(2)} \Big|_{r=R_1}, \\ \psi_2 T^{(2)} \Big|_{r=R_1} &= \psi_1 T^{(1)} \Big|_{r=R_1}, \\ \psi_1 T^{(1)} \Big|_{r=R_2} &= \chi (T_0 - T), \end{aligned} \quad (8)$$

где $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ – температура трубы и вала соответственно; ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала вала.

Распределение температуры по сборке определяется численно без дополнительных трудностей в любой момент времени решением уравнения (6) с условиями (7) (до момента посадки) или (8) (после момента посадки). Далее считаем его известным (найденным). В предлагаемом алгоритме расчётов распределение температуры приходится вычислять на каждом последовательном временном шаге расчётов.

Деформирование охватывающей трубы до посадки

При нагреве трубы в ней растут деформации и, следовательно, напряжения. Первоначально деформирование обратимо: $e_{ij} = e_{ij}^e$. Следуя (2) в используемой далее цилиндрической системе координат (r, φ, z) , имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) e_r + \lambda e_\varphi - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu) e_\varphi + \lambda e_r - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \sigma_r &= \lambda (e_r + e_\varphi) - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_0}; \quad e_r = u_{r,r}; \quad e_\varphi = r^{-1} u_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка (9) в уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (10)$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для u_r :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{\alpha T_0 K}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (11)$$

Полагая, что в данный момент времени $\theta(r)$, известной из решения температурной задачи (6)–(7), для распределения перемещения и напряжений после интегрирования (11) запишем следующее:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{3\alpha K T_0}{(\lambda + 2\mu)r} \int_R^r x \theta(x, t) dx + \frac{r}{2} C_1(t) + \frac{C_2(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1(t) - 2\mu r^{-2} C_2(t) - 6\alpha \mu T_0 \int_R^r x \theta(x, t) dx, \\
 \sigma_\varphi &= (\lambda + \mu) C_1(t) + 2\mu r^{-2} C_2(t) + 6\alpha \mu K (\lambda + \mu)^{-1} T_0 \left(\int_R^r x \theta(x, t) dx - \theta(x, t) \right), \\
 \sigma_z &= \lambda C_1(t) - 6\alpha \mu K (\lambda + \mu)^{-1} T_0 \theta(x, t).
 \end{aligned} \tag{12}$$

В расчётный момент времени значения функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находим, выполняя граничные условия:

$$\sigma_r \Big|_{r=R} = \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0. \tag{13}$$

Следовательно, на каждом шаге по времени следует определить распределение температуры $\theta(r)$ решением задачи (6)–(7) и, воспользовавшись зависимостями (12), решить систему линейных алгебраических уравнений (13) для вычисления значений C_1 и C_2 . После этого задачу на данном временном шаге можно считать решённой, а распределения температуры, перемещений и напряжений по радиусу трубы найденными. В отличие от температурной задачи в решении механической наличие зависимостей (12) позволяет обойтись без дискретизации расчётной области $R \leq r \leq R_2$. Далее будет показано, что подобная процедура возможна даже при наличии разных областей пластического течения.

Продолжая такие расчёты, далее последовательными шагами по времени замечаем, что на границе $r = R$ в некоторый момент времени $t_1 > 0$ выполняется условие пластичности Ильюнского – Ивлева (4) в форме $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$. На рис. 1 показано сечение наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Рис. 1. Сечение поверхности нагружения девиаторной плоскостью

При $t > t_1$ имеем развивающуюся область пластического течения $R \leq r \leq n_1(t)$ (см. рис. 1) с продвигающейся по материалу трубы упругопластической границей $r = n_1(t)$; напряжённые со-

стояния в этой области фиксируются своей принадлежностью данной грани наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений.

Соотношения закона Дюамеля – Неймана (2) переписуются в пластической области в форме

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)(u_{r,r} - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{r,r} - e_r^p) + (\lambda + 2\mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u_r + u_{r,r} - e_\varphi^p - e_r^p) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (14)$$

Необратимые деформации исключаем из (14), выполняя условие пластичности $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$ и ассоциированный закон пластического течения, следствием которого на данной грани призмы Ивлева является соотношение $e_r^p = -2e_\varphi^p$. Таким способом уравнение равновесия (10) в области течения приводится к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} &= \frac{2}{3K} \left(\frac{2\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ h &= \sqrt{\frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 2\mu}}.\end{aligned}\quad (15)$$

Считаем, что в рассматриваемый момент времени распределения температуры $\theta(r)$ и, следовательно, $k(r)$ предварительно найдены решением температурной задачи (6)–(7). Тогда, после интегрирования (15), найдём

$$\begin{aligned}u_r(r, t) &= 1,5h^{-1}((h+1)\Phi(r, s, h) + (h-1)\Phi(r, s, -h)) + \\ &+ (3Kh)^{-1}((2h-1)\Psi(r, s, h) - (2h+1)\Psi(r, s, -h)) - (2hr^h)^{-1}C_1^{(2)}(t) + r^h C_2^{(2)}(t), \\ \sigma_r &= 1,5K(hr)^{-1}(h^2 - 1)(\Phi(r, s, -h) - \Phi(r, s, h)) - \\ &- (3hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Psi(r, s, h) + (h+1)(2h+1)\Psi(r, s, -h)) + \\ &+ (h-1)(2hr^{h+1})^{-1}KC_1^{(2)}(t) + (h+1)(r^{h-1})KC_2^{(2)}(t), \\ \sigma_\varphi &= -\Psi(r, s, -h)(3Krh)^{-1}(2h+1)(K(h+1) + \mu) - \\ &- \Psi(r, s, h)(3Krh)^{-1}(2h-1)(K(1-h) + \mu) + \\ &+ 1,5\Phi(r, s, -h)(h-1)(rh)^{-1}(K(h+1) + \mu) + \\ &+ 1,5\Phi(r, s, h)(h+1)(rh)^{-1}(K(1-h) + \mu) - \\ &- 2k - (K(1-h) + \mu)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(2)}(t) + (K(h+1) + \mu)(r^{h-1})C_2^{(2)}(t), \\ e_r^p &= -2e_\varphi^p = 2\alpha T_0\theta - 2(2\mu + \lambda)(3\mu K)^{-1}k + \\ &+ (4h^2 - 1)(9Khr)^{-1}(\Psi(r, s, h) - \Psi(r, s, -h)) + \\ &+ (2hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Phi(r, s, -h) - (h+1)(2h+1)\Phi(r, s, h)) + \\ &+ (2h+1)(6hr^{h+1})^{-1}C_1^{(2)}(t) + 3^{-1}(2h-1)(r^{h-1})C_2^{(2)}(t). \\ \Phi(r, s, h) &= \alpha T_0 r^{-h} \int_s^r \rho^h \theta(\rho) d\rho; \quad \Psi(r, s, h) = r^{-h} \int_s^r \rho^h k(\rho) d\rho; \quad s = R.\end{aligned}\quad (16)$$

Теперь, как и ранее, следует в (16) определить значение функций $C_1^{(2)}(t)$, $C_2^{(2)}(t)$ в этот рассматриваемый момент времени, выполняя соответственно переписанные граничные условия (13).

Неизвестным оказывается и положение упругопластической границы $n_1(t)$ в этот же момент времени, но при этом добавляются условия на упругопластической границе (выход на грань поверхности нагружения, непрерывность напряжений σ_r , перемещений u_r , обратимых и необратимых деформаций). Своего перерасчёта для данного момента времени требуют и $C_1^{(1)}(t)$, $C_2^{(1)}(t)$.

Для пяти таких неизвестных из краевых условий и условий на упругопластической границе следует пять алгебраических уравнений. Такой перерасчёт приходится производить на каждом временном шаге расчётов. Далее на нём останавливаться не будем, несмотря на то что число неизвестных и уравнений будет расти вследствие появления новых областей течения и областей обратимого деформирования при присутствии в них необратимых деформаций.

В некоторый последующий момент времени $t_2 > t_1$ на упругопластической границе наряду с условием пластичности $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$ выполнится ещё и условие $\sigma_r + \sigma_\varphi - 2\sigma_z = 4k$. Данное обстоятельство является расчётным фактом. В этот момент времени от продолжающей продвигаться поверхности $r = n_1(t)$ начинают своё движение две поверхности: $r = n_2(t)$ и $r = n_3(t)$. Причём если поверхность $r = n_3(t)$ является новой упругопластической границей, движущейся в сторону внешней поверхности трубы, то поверхность $r = n_2(t)$ движется в обратную сторону. Таким способом зарождаются две области пластического течения (см. рис. 2). В области $n_2(t) \leq r \leq n_3(t)$ течение происходит в соответствии с напряжениями, удовлетворяющими условию грани призмы Ивлева $\sigma_r + \sigma_\varphi - 2\sigma_z = 4k$, то есть уже иной грани (см. рис. 1). Пластическое течение в области $n_2(t) \leq r \leq n_1(t)$ задаётся напряжениями, соответствующими ребру призмы Ивлева (см. рис. 1 и 2).

В это же время в области $R \leq r \leq n_2(t)$ продолжается пластическое течение с напряжениями, удовлетворяющими условию их принадлежности прежней грани поверхности нагружения: $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$. В каждой из вновь образовавшихся областей необратимого деформирования с помощью следствия ассоциированного закона пластического течения можно уравнение равновесия записать в перемещениях и проинтегрировать, как это происходило при выводе (15) и получении зависимостей (16). Опуская такие несложные вычисления, запишем аналог (16) для вновь образовавшихся областей пластического течения. В пластической области $n_2(t) \leq r \leq n_1(t)$ (ребро призмы Ивлева) будем иметь

$$\begin{aligned}
 u_r &= -\frac{2}{3K}(\Psi(r, s, 1) + \Psi(r, s, -1)) + 3\Phi(r, s, 1) + \frac{r}{2K}C_1^{(3)}(t) + \frac{C_2^{(3)}(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= -\frac{4}{3r}\Psi(r, s, -1) + C_1^{(3)}(t), \\
 \sigma_\varphi &= -\frac{4}{3r}\Psi(r, s, -1) - \frac{4}{3}k(r) + C_1^{(3)}(t), \\
 \sigma_z &= -\frac{4}{3r}\Omega(r, s, -1) - \frac{8}{3}k(r) + C_1^{(3)}(t), \\
 e_r^p &= -3r^{-1}\Phi(r, s, 1) + 2\alpha T_0\theta(r) - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{3\mu K}k(r) + \frac{2}{3rK}(\Psi(r, s, 1) - 3^{-1}\Psi(r, s, -1)) + \\
 &\quad + \frac{C_1^{(3)}(t)}{6K} - \frac{C_2^{(3)}(t)}{r^2} - p_r(r), \\
 e_\varphi^p &= \frac{4}{9Kr}\Psi(r, s, -1) + \frac{2(3K + 2\mu)}{9\mu K}k(r) - \alpha T_0\theta(r) - \frac{C_1^{(3)}(t)}{3K} - p_\varphi(r), \\
 s &= n_2(t).
 \end{aligned} \tag{17}$$

активный нагрев материала с внутренней стороны трубы

Рис. 2. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей пластического деформирования

Аналогично для пластической области $n_1(t) \leq r \leq n_3(t)$ (грань призмы Ивлева) запишем

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{3K}{K+\mu} \Phi(r, s, 1) - \frac{2}{3(K+\mu)} \Psi(r, s, 1) + \frac{1}{2} r C_1^{(4)}(t) + \frac{C_2^{(4)}(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= \frac{4\mu}{3r(K+\mu)} \Psi(r, s, 1) - \frac{6\mu K}{r(K+\mu)} \Phi(r, s, 1) + K C_1^{(4)}(t) - \frac{2\mu C_2^{(4)}(t)}{r^2}, \\
 \sigma_\varphi &= \frac{4\mu}{3(K+\mu)} \left(k(r) - \frac{\Psi(r, s, 1)}{r} \right) + \frac{6\mu K}{K+\mu} \left(\frac{\Phi(r, s, 1)}{r} - \alpha T_0 \theta(r) \right) + K C_1^{(4)}(t) + \frac{2\mu C_2^{(4)}(t)}{r^2}, \\
 e_r^p(r, t) &= \frac{\alpha T_0 K}{2(K+\mu)} \theta(r) - \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu(K+\mu)} k(r) + \frac{1}{6} C_1^{(4)}(t), \quad s = n_1(t).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для вычислений значений функций времени в рассчитываемый момент времени и положений граничных поверхностей $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ теперь следует разрешить систему одиннадцати алгебраических уравнений, следующих из краевых условий и условий на таких продвигающихся поверхностях.

Зависимости (17) включают в себя накопленные при предыдущем необратимом деформировании при напряжениях, соответствующих грани $2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z = 4k$ призмы Ивлева, деформации p_r и p_ϕ . Это деформации $e_r^p(t, r)$ и $e_\phi^p(t, r)$ в момент прихода к данной точке с текущей координатой r поверхности $n_2(t)$. В процессе расчётов массивы накопленных, но далее со временем не изменяющихся необратимых деформаций следует алгоритмически формировать для целей дальнейших расчётов. Это является неотъемлемой частью построенного алгоритма расчётов и его программной реализации. Далее на таком обстоятельстве останавливаться не будем, но оно постоянно будет иметь своё место.

С увеличением времени нагрева быстро (по сравнению с другими) перемещается поверхность $r = n_2(t)$ и достигает внутренней поверхности трубы. Далее пластическое течение (см. рис. 2) будет происходить только в двух пластических областях: $R \leq r \leq n_2(t)$ и $n_1(t) \leq r \leq n_3(t)$ в соответствии с зависимостями (17) и (18), а температура на поверхности $r = R$ достигает требуемого технологического уровня. Нагревание прекращается и готовится операция посадки. За последний промежуток времени происходит разгрузка трубы. Тщательные расчёты показывают, что на поверхности $r = R$ зарождается упругопластическая разгружающая граница $r = n_4(t)$, а граничные поверхности $n_1(t)$ и $n_3(t)$ начинают своё движение в обратную сторону (см. рис. 2, е). При таком их продвижении необходимо учитывать накопленные ранее необратимые деформации вида $p_r(r)$ и $p_\phi(r)$ в качестве необходимых начальных условий для последующего их расчёта. Наличие их сказывается и в записи уравнения равновесия в перемещениях, так при движении теперь разгружающей упругопластической границы $r = n_3(t)$ последняя оставляет область обратимого деформирования, но уравнение (11) и зависимости (12) в этой области уже несправедливы. Они обязаны быть дополнены присутствием накопленных необратимых деформаций. При дальнейшем остывании на поверхности $r = R$ возникает новая разгружающая упругопластическая граница $r = n_5(t)$ (см. рис. 2, д). Двигаясь навстречу поверхности $r = n_1(t)$ и $r = n_3(t)$, приводит к исчезновению области пластического течения. При недостаточности времени до посадки трубы на вал последнее может не произойти. Полагаем всё же, что такого промежутка времени достаточно и посадка произойдёт в то время, когда пластические области в материале трубы прекратят своё существование.

Предположение о малости деформаций не позволяет проследить за изменением объёма трубы при нагревании, далее будем считать, что в момент посадки трубы на вал её внутренний радиус совпадает с радиусом вала: $R = R_1$.

До момента посадки считаем, что вал находится в свободном состоянии при однородной температуре $T = T_0$ ($\theta = 0$). Первоначально и вал, и труба деформируются обратимо (термоупруго) (см. рис. 2, и). Но с некоторого момента времени, как указывают расчёты, в материале трубы начинается пластическое течение при напряжениях, соответствующих грани $2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z = -4k$ призмы Ивлева. Знак «минус» в правой части уравнения этой грани в пространстве главных напряжений указывает, что данное повторное пластическое течение является обратным, оно может приводить к понижению в уровне необратимых деформаций. Развитие повторного пластического течения связано с продвижением новой упругопластической границы $r = n_6(t)$. В записи уравнения равновесия для данной области $R_1 \leq r \leq n_6(t)$ (см. рис. 2, j) следует учитывать массив накопленных ранее необратимых деформаций $p_r(r)$ и $p_\phi(r)$. Так же, как и ранее, на каждом временном шаге расчётов граничным условиям удовлетворяем при вычислении значений неизвест-

ных функций времени, следующих при интегрировании уравнения равновесия. К таким условиям добавляется условие на упругопластической границе $r = n_6(t)$, и таким способом указываем положение границ в каждый момент времени. Дальнейшее остывание сборки порождает разгружающую упругопластическую границу $r = n_7(t)$ (см. рис. 2, *k*), которая в своём продвижении по материалу трубы догоняет упругопластическую границу $r = n_6(t)$, и далее материал трубы и вала деформируется обратимо (см. рис. 2, *l*) до полного остывания сборки.

Объём настоящей статьи не позволяет графически проиллюстрировать эволюции напряжённых состояний в течение всей технологической операции. Укажем здесь только распределение итоговых остаточных напряжений. На рис. 3 такое распределение безразмерных напряжений приведено при следующих исходных параметрах задачи: температура нагрева поверхности $r = R$ трубы $310\text{ }^{\circ}\text{C}$; геометрические размеры трубы и вала $R_1 = 0,05\text{ м}$, $R_2 = 0,1\text{ м}$; постоянные материала трубы $\rho = 2,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$; $\chi = 130\text{ Вт/(мК)}$; $c_p = 0,922\text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$; $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6}$; $k_0 = 255\text{ МПа}$; $T_p = 660\text{ }^{\circ}\text{C}$; $E = 72\text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$; постоянные материала вала $\rho = 2,7 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$; $\chi = 188\text{ Вт/(мК)}$; $c_p = 0,903\text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$; $\alpha = 23,4 \cdot 10^{-6}$; $k_0^{(1)} = 210\text{ МПа}$; $T_p = 660\text{ }^{\circ}\text{C}$; $E = 70\text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$.

Заключение

Здесь замечено, что в расчётах неустановившихся температурных напряжений хотя бы в одномерных задачах имеется возможность провести расчёты в каждый момент времени без дискретизации изменяющихся расчётных областей. Такую возможность предоставляет использование классических пластических потенциалов (условие пластичности Треска – Сен-Венана и Ишлинского – Ивлева). Однако такое изменение несёт в себе качественное отличие: если переход к течению в состояниях полной пластичности (в условиях ребра наклонной призмы Треска) всегда [9] начинается с границы деформируемого тела, то аналогичный переход (к условию ребра наклонной призмы Ивлева) необходимо осуществлять на упругопластических границах (см. рис. 2, *c*). Рекомендовать кусочно-линейные классические условия пластичности для конкретных расчётов затруднительно, оба они имеют свои преимущества и недостатки. Условие Треска – Сен-Венана, как правило, даёт наименьший уровень температурных напряжений, а условие Ишлинского – Ивлева – наибольший [7]. То же относится и к натягу в сборке.

Подготовленный на основе результатов настоящей статьи программный модуль позволяет отслеживать появление и исчезновение областей пластического течения, автоматически формирует массив распределения накопившихся и далее не изменяющихся необратимых деформаций для целей его интегрирования в областях обратимого деформирования с присутствием необратимых и в областях изменившегося характера пластического течения.

Рис. 3. Остаточные напряжения в материале сборки

Главной задачей в подготовке настоящей публикации было указание характерных особенностей в постановках (зарождение течения, деление пластических областей) в решении задачи сборки горячей посадкой. Протекание процесса возникновения и деления областей пластического течения иллюстрирует рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берникер, Е. И. Посадка с натягом в машиностроении: справ. пособие / Е. И. Берникер. – Л.: Машиностроение, 1966. – 168 с.
2. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер; пер. с англ. под ред. Э. И. Грилюка. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
3. Шевченко, Ю. Н. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности / Ю. Н. Шевченко, П. А. Стеблянко, А. Д. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2014. – № 22. – С. 250-264.
4. Александров, С. Е. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению / С. Е. Александров, Е. В. Ломакин, Й.-Р. Дзенг // ДАН. – 2012. – Т. 443. – № 3. – С. 310-312.
5. Александров, С. Е. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряжённое состояние в тонком полом диске / С. Е. Александров, Е. А. Лямина, О. В. Новожилова // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2013. – № 3. – С. 43-48.
6. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 2. – С. 124-131.
7. Дац, Е. П. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 32-43.
8. Дац, Е. П. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 204-213.
9. Буренин, А. А. К расчёту неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах / А. А. Буренин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10. – № 3. – С. 245-259.
10. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
11. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
12. Bengeri, M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit / M. Bengeri, W. Mack // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103. – P. 243-257.
13. Gamer, U. F. A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub / U. F. Gamer // Int. J. Solids. Struct. – 1992. – Vol. 29. – P. 2463-2469.
14. Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. Periodica Polytechnica. / A. Kovacs // Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40. – № 2. – P. 103-112.
15. Lippmann, H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit / H. Lippmann // Int. J. Plasticity. – 1992. – Vol. 8. – P. 567-582.
16. Mack, W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft / W. Mack // Arch. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 63. – P. 42-50.
17. Ohno, N. Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions / N. Ohno, J. D. Wang: Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. J. Plasticity. – 1992. – Vol. 7. – P. 879-891.
18. Perzyna, P. Problems of thermoplasticity / P. Perzyna, A. Sawezuk // Nucl. Eng. Des. – 1973. – Vol. 24. – № 1. – P. 1-55.