Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.

K. N. Galimzyanova, L.V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

**О РАЗЛИЧИЯХ В УЧЁТЕ ВЯЗКОСТИ ПРИ РАСЧЁТАХ БОЛЬШИХ
УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛОМ ШАРЕ**

**THE DIFFERENCES IN VISCOSITY ACCOUNTING WHEN CALCULATING LARGE
VISCO-ELASTIC PLASTIC DEFORMATIONS IN HOLLOW SPHERE**

Галимзянова Ксения Наилевна – аспирант Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток). E-mail: gal-ksyusha@ya.ru.

Ms. Kseniya N. Galimzyanova – a Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok). E-mail: gal-ksyusha@ya.ru.

Ковтанюк Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией механики необратимого деформирования Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток). E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Ms. Larisa V. Kovtanyuk – Dr. in Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok). E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре), доцент кафедры математики и моделирования Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Ms. Galina L. Panchenko – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur), Associate Professor, Department of Mathematics and Modeling, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Аннотация. В работе приводится решение краевой задачи теории малых деформаций о деформировании сферического слоя под действием равномерного изменяющегося со временем давления. Материал слоя обладает упругими, реологическими и пластическими свойствами. Реологические эффекты учитываются как на стадии деформирования, предвещающей пластическое течение, так и при пластическом течении. Рассчитаны обратимые и необратимые деформации, напряжения и перемещения. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы в слое.

Summary. The article gives a solution to the boundary-value problem of the theory of small deformations about the deformation of a spherical layer under the action of a uniform pressure that varies with time. The material of the layer has elastic, rheological and plastic properties. Rheological effects are taken into account both at the stage of deformation, which precedes the plastic flow, and during plastic flow. Reversible and irreversible deformations, stresses and displacements are calculated. The regularity of the elastoplastic boundary in the layer is established.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вязкость, пластичность.

Key words: elasticity, creep, viscosity, plasticity.

УДК 539.37

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (18-01-00038, 16-31-60017 мол_а_дк).

Введение

В технологической практике для обработки некоторых конструкционных материалов применяется метод холодной формовки в условиях ползучести [5]. Необходимо знать, как поведёт себя материал в процессе обработки. Поэтому важно иметь решения ряда задач о пластическом и вязкопластическом течениях в материале с приобретёнными необратимыми деформациями ползучести. В работе [4] получено решение краевой задачи о ползучести с последующим пластическим течением в сферическом упругопластическом слое. Здесь рассмотрим подобную задачу для упруговязкопластического материала.

Основные модельные соотношения

Решение задачи будем искать в рамках математической модели малых деформаций, в которой компоненты тензора полных деформаций d_{ij} определяются в виде суммы обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющих:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В соотношениях (1) u_i – компоненты вектора перемещений; x_j – пространственные координаты точки деформируемой среды.

Зависимость напряжений от обратимых деформаций выражается законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

где λ, μ – параметры Ламе.

Для описания поведения материала в условиях накопления им сначала деформаций ползучести, а затем пластических деформаций воспользуемся моделью [1; 2]. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материала. В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортона [6]:

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)}^{1/2}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \gamma_{ij} = \epsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}},$$

где B, n – заданные параметры ползучести материала; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; ϵ_{ij}^v – скорости деформаций ползучести.

Когда напряжённое состояние достигает поверхности текучести, диссипативный механизм меняется: начинается вязкопластическое течение. В качестве поверхности текучести будем использовать условие пластичности Мизеса, обобщённое на случай учёта вязкости [1; 2]:

$$f(\sigma_{ij}) = (s_{ij} - \eta \alpha'_{ij})(s_{ji} - \eta \alpha'_{ji}) - \frac{8}{3} k^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad (4)$$

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \alpha_{kk} \delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \epsilon_{ij}^p - \epsilon_{ij}^{v0}, \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi > 0,$$

где η – коэффициент вязкости материала; k – предел текучести; ε_{ij}^p – тензор скоростей пластических деформаций; $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – значение скорости деформаций ползучести в точке в момент достижения напряжённым состоянием поверхности текучести в этой точке.

Постановка и решение вязкоупругой задачи

Рассмотрим материал, расположенный между двумя сферическими поверхностями с общим центром и радиусами $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$). Граничные условия выберем следующие:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

В условиях (5) $p(t)$ – возрастающая со временем функция; σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, θ, φ .

Согласно соотношениям (1) в рассматриваемом случае для ненулевых компонент тензора деформаций получим следующие выражения:

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad (6)$$

где $u = u_r$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений.

Используя закон Гука (2), найдём не равные нулю компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda e_{rr} + 2(\lambda + \mu)e_{\varphi\varphi}. \quad (7)$$

Следуя квазистатическому подходу, запишем уравнение равновесия для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (8)$$

В сферической системе координат соотношение (3) примет следующий вид:

$$V(\sigma_{ij}) = 2^{-n/2} B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 \right)^{n/2}. \quad (9)$$

Учитывая сферическую симметрию $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$, из (3) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = -2 \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = Bn(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^{n-1}, \\ \varepsilon_{rr}^v + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v &= 0, \quad p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из зависимостей (6) и последнего равенства (10) получим систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = e_{rr} - e_{\varphi\varphi} + \frac{3}{2} p_{rr}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} = e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi}. \quad (11)$$

Выразим из соотношений (7) компоненты обратимых деформаций:

$$e_{rr} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sigma_{\varphi\varphi} - \lambda\sigma_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (12)$$

Подставив зависимости (12) в систему (11) и проинтегрировав её, получим

$$u = -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2} \int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{1}{r^2(3\lambda + 2\mu)} \int r^2(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}) dr. \quad (13)$$

Вычислив неопределённый интеграл во втором равенстве (13) с использованием (8), окончательно получим

$$u = -\frac{r\sigma_{rr}}{4\mu} + \frac{3r}{2} \int \frac{p_{rr}}{r} dr, \quad u = \frac{r\sigma_{rr}}{3\lambda + 2\mu} + \frac{c(t)}{r^2(3\lambda + 2\mu)},$$

$$p_{rr} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2c(t)}{r^3(3\lambda + 2\mu)}. \quad (14)$$

Из закона ползучести (10) и третьего соотношения (14) следует интегро-дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций $p_{rr}(r, t) = -2p_{\varphi\varphi}$:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = Bn \left(-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu) p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) \right)^{n-1}. \quad (15)$$

А из зависимостей (14) и граничных условий (5) найдём выражения для напряжений и неизвестной функции интегрирования $c(t)$:

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_0}^r \frac{p_{rr}}{r} dr + \frac{4\mu c(t)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu) p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right), \quad (16)$$

$$c(t) = -\frac{3r_0^3 R^3}{2(R^3 - r_0^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) + (3\lambda + 2\mu) \int_{r_0}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).$$

Уравнение (15) с функцией $c(t)$ из (16) и начальным условием $p_{rr}(r, 0) = 0$ решается конечно-разностным методом с использованием составной формулы трапеций [3] для приближённого вычисления определённого интеграла, входящего в выражение для $c(t)$.

По вычисленным значениям компоненты необратимых деформаций p_{rr} и функции $c(t)$ найдём напряжения из соотношений (16).

Зная теперь значения напряжений, из (12) найдём компоненты упругих деформаций. Из второй зависимости (6) получим компоненту перемещений:

$$u = r(e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}). \quad (17)$$

Полученное решение при возрастающем давлении $p(t)$ справедливо до момента времени $t = t_0$, начиная с которого от внутренней границы $r = r_0$ сферического слоя развивается область вязкопластического течения.

Условие его возникновения (4) в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=r_0, t=t_0} = 2k.$$

Вязкопластическое течение

С момента времени $t = t_0$ в области $r_0 \leq r \leq m(t)$ идёт процесс вязкопластического течения, при этом в области $m(t) \leq r \leq R$ по-прежнему происходит вязкоупругое деформирование. Граница $r = m(t)$, разделяющая данные области, является движущейся границей области вязкопластического течения.

Условие вязкопластического течения (4) в сферической системе координат переписывается в форме

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \eta(\alpha_{rr} - \alpha_{\varphi\varphi}))^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \eta(\alpha_{rr} - \alpha_{\theta\theta}))^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} - \eta(\alpha_{\varphi\varphi} - \alpha_{\theta\theta}))^2 = 8k^2. \quad (18)$$

В случае сферической симметрии из (18) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 2k + \eta(\alpha_{rr} - \alpha_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= 0, \quad p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (19) с учётом (10) и (14) получим интегро-дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций p_{rr} в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -\frac{2\mu}{3\eta(\lambda + 2\mu)} \left((3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) - \frac{4k}{3\eta} + Bn2^{n-1}k^{n-1}. \quad (20)$$

В области $m(t) \leq r \leq R$ по-прежнему остаётся верным уравнение (15).

Из соотношений (14), граничных условий (5) и условия непрерывности напряжений на упругопластической границе установим, что выполняются зависимости (16) в обеих областях.

С учётом того, что $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=m(t)} = 2k$, из второго равенства (16) следует уравнение

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) = -2k. \quad (21)$$

Уравнения (15), (20) и (21) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций p_{rr} в областях $r_0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$ и упругопластической границы $m(t)$.

Для решения данной системы также была построена конечно-разностная схема. По найденным значениям необратимых деформаций p_{rr} и функции $m(t)$ найдём напряжения из (16), компоненты обратимых деформаций из (12), перемещения из (17).

Расчёты проводились при линейной функции $p(t) = \beta t$ и следующих значениях постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3/\beta = 3.5$, $\lambda/\mu = 3.9$, $r_0/R = 0.03$, $k/\mu = 0.0026$, $\mu^2/(\beta\eta) = 30$.

На рис. 1 показан график зависимости упругопластической границы m/R от безразмерного времени $\tau = \alpha t/\mu$.

Рис. 1. График зависимости упругопластической границы от времени

Распределение необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ и обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою в момент времени $\tau_1 = 0.1$ показано на рис. 2.

Рис. 2. Распределение деформаций по слою:
а – необратимых; б – обратимых

Рис. 3 иллюстрирует распределение напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ в момент времени τ_1 и перемещений в моменты времени $\tau_0 = 0.0035$ и τ_1 .

Рис. 3. Графики зависимости от радиуса:
а – напряжений; б – перемещений

Заключение

В данной работе получено решение краевой задачи о вязкопластическом течении материала сферического слоя с предварительно накопленными необратимыми деформациями ползучести.

Получена зависимость упругопластической границы от времени, найдены распределения обратимых и необратимых деформаций, напряжений и перемещений по слою в разные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
2. Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза // Известия Российской Академии наук. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103 – 112.
3. Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
4. Галимзянова, К. Н. Ползучесть и пластическое течение материала упругопластического сферического слоя в условиях всестороннего гидростатического сжатия / К. Н. Галимзянова, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2017. – № 2(32). – С. 37-44.
5. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш. – М.: Эком, 2009. – 109 с.
6. Norton, F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y.: Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.