Козин В. М., Земляк В. Л., Кожяев А. В.
V. M. Kozin, V. L. Zemlyak, A. V. Kozhaev

**ВЛИЯНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛЬДА НА ПАРАМЕТРЫ
РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН**

**INFLUENCE OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF ICE
ON THE PARAMETERS OF RESONANT FLEXURAL-GRAVITY WAVES**

Козин Виктор Михайлович – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории «Механика деформирования» Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: kozinvictor@rambler.ru.

Mr. Victor M. Kozin – Dr. habil. of Engineering, principal research associate, Institute of Engineering and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str. E-mail: kozinvictor@rambler.ru.

Земляк Виталий Леонидович – кандидат физико-математических наук, проректор по науке и инновациям Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема (Россия, Биробиджан); 679015, Еврейская автономная область, г. Биробиджан, ул. Широкая, 70а. E-mail: vellkom@list.ru.

Mr. Vitaly L. Zemlyak – Ph.D, vice-rector on scientific work and innovations of Priamursky state University named after Sholom-Aleichem (Russia, Birobidzhan); 679015, Jewish Autonomous region, Birobidzhan, 70a Shirokaya str. E-mail: kozinvictor@rambler.ru.

Кожяев Александр Владимирович – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: alekzoid@gmail.com.

Mr. Alexander V. Kozhaev – Ph.D student of Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: alekzoid@gmail.com.

Аннотация. В данной статье рассматривается влияние изменения физико-механических свойств льда на параметры резонансных изгибно-гравитационных волн (ИГВ). Отмечается целесообразность использования в расчётах как средних, общеизвестных значений наиболее вероятных характеристик льда, так и соответствующих конкретным ледовым условиям.

Summary. The influence of changes in the physicomachanical properties of ice on the parameters of resonant flexural-gravity waves (IGW) is considered. It is noted that it is expedient to use in the calculations both the average, well-known values of the most probable characteristics of ice, and those corresponding to specific ice conditions.

Ключевые слова: резонансные изгибно-гравитационные волны, физико-механические свойства льда, модель Кельвина – Фойгта, напряжённо-деформированное состояние.

Key words: resonant flexural-gravity waves, physical and mechanical properties of ice, Kelvin – Fought model, stress-strain state.

УДК 532.59:629.576

Работа выполнена за счёт средств гранта Российского научного фонда № 16-19-10097 «Исследование влияния ледовых условий на возможность всплытия подводных судов в ледяном покрове».

Введение

Многие экономически развитые страны имеют замерзающие реки, омываются морями, которые в различной степени и на разные сроки покрываются льдом. Лёд является серьёзным препятствием для судоходства, доставки грузов, добычи полезных ископаемых.

Одним из возможных способов решения данной проблемы может служить резонансный метод разрушения ледяного покрова [2].

При выполнении теоретических исследований часто используют наиболее вероятные значения физико-механических свойств льда. Однако состояние льда нестабильно и изменяется в зависимости от времени года, атмосферных условий и пр. Поэтому целесообразно исследовать, какие из физико-механических свойств льда оказывают значительное влияние на характер изгибно-гравитационных волн при изменении их в известных пределах, то есть при их отличии от наиболее вероятных величин.

Теоретические исследования влияния физико-механических свойств льда на параметры ИГВ

Колебания ледяного покрова рассматривались в линейной постановке. Лёд моделировался изотропной вязкоупругой пластиной бесконечной протяжённости, поведение которой описывалось моделью Кельвина – Фойгта [5]. Механическая модель приведена на рис. 1.

Рис. 1. Модель вязкоупругой среды Кельвина – Фойгта

В этом случае дифференциальное уравнение изгиба ледяного покрова имеет вид [1]

$$D \left(1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_w g w + \rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \delta(x - vt, y) P(x, y, t); \quad (1)$$

потенциал движения жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad (2)$$

граничные условия на дне водоёма и на границе лёд-вода:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{z=-H} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость пластины; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; w – прогиб льда; ρ_i, ρ_w – плотности льда и воды соответственно; P – нагрузка на лёд.

Применяя преобразование Фурье к дельта-функции, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i[\lambda(x-vt)+\eta y]} d\lambda d\eta.$$

Потенциал движения жидкости Φ в соответствии с [5] имеет вид

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\lambda\eta} ch \left[(H+z) \sqrt{(\lambda^2 + \eta^2)} \right] e^{-i[\lambda(x-vt)+\eta y]} d\lambda d\eta.$$

Функцию прогиба будем искать аналогично [1]:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{\lambda\eta} e^{-i[\lambda(x-vt)+\eta y]} d\lambda d\eta.$$

Применив оператор Гамильтона к функции прогиба w и с учётом условий (2), (3), (4), приняв $P = \text{const}$, $v = \text{const}$, получим [1]

$$w = \frac{P}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i[\lambda(x-vt)+\eta y]}}{F(\lambda, \eta)} d\lambda d\eta,$$

где
$$F(\lambda, \eta) = D(\lambda^2 + \eta^2) + D\tau_\phi i\lambda v (\lambda^2 + \eta^2) - \rho_w g - \rho_{ih} \lambda^2 v^2 - \frac{\rho_w \lambda^2 v^2}{th \left(H \sqrt{(\lambda + \eta) \sqrt{\lambda + \eta}} \right)}.$$

Для нагрузки с прямоугольным основанием длиной $2a$, шириной $2b$ получим функцию прогиба [1]:

$$w = \frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi, \zeta) e^{-i[\lambda(x-\xi-vt)+\eta(y-\zeta)]}}{F(\lambda, \eta)} d\lambda d\eta d\xi d\zeta.$$

Преобразуя числитель по формуле Эйлера и исключая мнимую часть, окончательно получим [1]

$$w = \frac{-4P}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(A \cos(\phi) - B \sin(\phi))}{\lambda \eta (A^2 + B^2)} d\lambda d\eta, \quad (5)$$

где

$$A = D(\lambda^2 + \eta^2)^2 + \rho_w g - \rho_{ih} v^2 \lambda^2 - \frac{\rho_w \lambda^2 v^2}{th \left(H \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \right) \sqrt{\lambda^2 + \eta^2}},$$

$$B = D\tau_\phi \lambda v (\lambda^2 + \eta^2)^2, \quad C = \cos(\eta y) \sin(\lambda b) \sin(\eta a), \quad \phi = \lambda(x - vt).$$

Сопоставление результатов численных расчётов с данными натурных экспериментов [6] при принятых физико-механических параметрах льда, а именно: $\rho_i = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_w = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$\tau_f = 10 \text{ с}$; $\mu = \frac{1}{3}$; $E = 0,5 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $h = 0,075 \text{ м}$; $H = 6,8 \text{ м}$; $2a = 1,23 \text{ м}$; $2b = 0,48 \text{ м}$; $P = 406,5 \text{ Па}$ пред-

ставлены на рис. 2. Направление движения нагрузки указано стрелкой, ось приложения нагрузки указана вертикальной линией.

Рис. 2. Сопоставление численных расчётов с данными натурных экспериментов

а) $v = 4,2$ м/с; б) $v = 5,5$ м/с; в) $v = 6,2$ м/с; г) $v = 8,9$ м/с

(-) – численный результат; (--) – натурный эксперимент

Как видно из рис. 2, результаты численных расчётов удовлетворительно совпадают в области больших прогибов, то есть при возникновении наибольших напряжений.

Для полученной функции прогиба (5) выражения для погонных нормальных напряжений σ_x и σ_y будут иметь вид [4]

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (6), (7)$$

где

$$M_x = -D \left(1 + \tau_\phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (8)$$

$$M_y = -D \left(1 + \tau_\phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (9)$$

Подставив (5) в уравнения (8) и (9), найдём соответствующие частные производные. Обозначив их за $F_i, i \in [1; 6]$, получим выражения для изгибающих моментов:

$$M_x = -D(F_1 + \mu F_2 + \tau_\phi(F_4 + \mu F_5)), \quad (10)$$

$$M_y = -D(F_2 + \mu F_1 + \tau_\phi(F_5 + \mu F_4)). \quad (11)$$

Влияние физико-механических свойств льда на параметры резонансных изгибно-гравитационных волн

Состояние льда характеризуют следующие физико-механические свойства: модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ и плотность ρ_i . В зависимости от времени года, атмосферных условий и прочего свойства льда изменяются соответствующим образом.

Известны наиболее вероятные физико-механические свойства льда, которые представлены в табл. 1 и 2 [3].

Таблица 1

Экстремальные и наиболее вероятные значения модуля Юнга

Метод измерения	Температура льда, °C	Модуль Юнга, МПа
Статический	[-3;-8]	2902,7684 – 4314,926
Резонансный	[0;-10]	8629,852 – 9953,74975
Сейсмический	[-5;-10]	6864,655 – 12258,3125
Наиболее вероятные значения:		3923 – 8620

Таблица 2

Наиболее вероятные значения плотности льда и коэффициента Пуассона

Лёд	Плотность, кг/м ³	Коэффициент Пуассона
Пресноводный	870 – 917	0,42 – 0,34
Морской	900 – 910	0,40 – 0,30

Рассмотрим влияние изменения указанных свойств льда на параметры ИГВ в пределах их наиболее вероятных значений. В качестве основных параметров выберем $\rho_i = 900 \text{ кг/м}^3$; $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$;

$$\tau_f = 10 \text{ с}; \mu = \frac{1}{3}; E = 5 \cdot 10^9 \text{ Па}; h = 0,5 \text{ м}; H = 5 \text{ м}; 2a = 30 \text{ м}; 2b = 13 \text{ м}; P = 3330 \text{ Па}; v = 7 \text{ м/с}.$$

Данные параметры соответствуют условиям проведения натурных испытаний с использованием судна на воздушной подушке (СВП) «Мурена» [4].

Результаты теоретических исследований в диапазоне изменения крайних значений физико-механических свойств льда приведены на рис. 3–11.

При изменении модуля Юнга в диапазоне наиболее вероятных значений амплитуды ИГВ существенно изменяются, что показано на рис. 3. Как видно из рис. 3, при экстремальных значениях модуля Юнга наблюдаются значительные изменения амплитуды ИГВ.

Изменения коэффициента Пуассона и плотности льда практически не влияют на параметры ИГВ, что и показано на рис. 4 и 5.

Рис. 3. Влияние изменения модуля Юнга на параметры ИГВ:

(.....) – $E = 4000$ МПа; (—) – $E = 5000$ МПа;
 (---) – $E = 6000$ МПа; (-·-) – $E = 7500$ МПа; (-··-) – $E = 8500$ МПа

Рис. 4. Влияние изменения коэффициента Пуассона на параметры ИГВ:

(.....) – $\mu = 0,3$; (—) – $\mu = 0,33$;
 (---) – $\mu = 0,36$; (-·-) – $\mu = 0,39$; (-··-) – $\mu = 0,42$

Рис. 5. Влияние изменения плотности льда на параметры ИГВ:

$$\begin{aligned} &(\cdots) - \rho_i = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (—) - \rho_i = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\ &(- - -) - \rho_i = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (- \cdot -) - \rho_i = 920 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (- \cdots -) - \rho_i = 950 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \end{aligned}$$

Рис. 6. Влияние изменения модуля Юнга на характер напряжения σ_x :

$$\begin{aligned} &(- \cdots -) - E = 4000 \text{ МПа}; \quad (- \cdot -) - E = 5000 \text{ МПа}; \\ &(- - -) - E = 6000 \text{ МПа}; \quad (—) - E = 7500 \text{ МПа}; \quad (\cdots) - E = 8500 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Рис. 7. Влияние изменения модуля Юнга на параметры напряжения σ_y :

(.....) – $E = 4000$ МПа; (—) – $E = 5000$ МПа;
 (---) – $E = 6000$ МПа; (-·-) – $E = 7500$ МПа; (-··-) – $E = 8500$ МПа

Рис. 8. Влияние изменения коэффициента Пуассона на параметры напряжения σ_x :

(.....) – $\mu = 0,3$; (—) – $\mu = 0,33$;
 (---) – $\mu = 0,36$; (-·-) – $\mu = 0,39$; (-··-) – $\mu = 0,42$

Рис. 9. Влияние изменения коэффициента Пуассона на параметры напряжения σ_y :

(.....) – $\mu = 0,3$; (—) – $\mu = 0,33$;
(---) – $\mu = 0,36$; (- · -) – $\mu = 0,39$; (- · · -) – $\mu = 0,42$

Рис. 10. Влияние изменения плотности льда на параметры напряжения σ_x :

(.....) – $\rho_i = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; (—) – $\rho_i = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
(---) – $\rho_i = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; (- · -) – $\rho_i = 920 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; (- · · -) – $\rho_i = 950 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Рис. 11. Влияние изменения плотности льда на параметры напряжения σ_y :

$$\begin{aligned} &(\cdots) - \rho_i = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (—) - \rho_i = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\ &(- - -) - \rho_i = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (- \cdot -) - \rho_i = 920 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (- \cdots -) - \rho_i = 950 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании СВП в качестве ледоразрушающей нагрузки резонансным методом необходимо учитывать влияние изменения только модуля Юнга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козин, В. М. Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке при движении по ледяному покрову / В. М. Козин, А. В. Погорелова // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44. – № 2. – С. 49-55.
2. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов / В. М. Козин, А. В. Онищук, Б. Н. Марьин [и др.]. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 191 с.
3. Петров, И. Г. Выбор наиболее вероятных значений физико-механических свойств льда / И. Г. Петров // Труды ААНИИ. – 1976. – Т. 331. – С. 4-41.
4. Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жесткая, А. В. Погорелова [и др.]. – М.: Академия Естествознания, 2008. – 329 с.
5. Хейсин, Д. Е. Динамика ледяного покрова. / Д. Е. Хейсин. – Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 215 с.
6. Takizawa, T. Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load / T. Takizawa // Cold Regions Science and Technology. – 1985. – Vol. 11. – P. 123-139.