Савченко В. Н., Смагин В. П., Сёмкин С. В.

МАГНИТОИНДУКЦИОННОЕ ПОЛЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ ПОДВОДНОГО ВЗРЫВА. I. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Савченко В. Н., Смагин В. П., Сёмкин С. В.

V. N. Savchenko, V. P. Smagin, S. V. Semkin

МАГНИТОИНДУКЦИОННОЕ ПОЛЕ, ГЕНЕРИРУЕМОЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ ПОДВОДНОГО ВЗРЫВА. I. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

MAGNETIC INDUCTION FIELD GENERATED BY A HYDRODYNAMIC SHOCK WAVE OF UNDERWATER EXPLOSION. I. QUASISTATIC EFFECTS

Савченко Валерий Нестерович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и экспериментальной физики Школы естественных наук Дальневосточного федерального университета (Россия, Владивосток); 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; тел. 8(423) 243-34-72. E-mail: vanes.sav@yandex.ru.

Mr. Valerii N. Savchenko – Dr. habil. in Physical-Mathematical Sciences, Professor, Department of General and Experimental Physics, School of Natural Sciences, Far East Federal University (Russia, Vladivostok); 690950, 8 Suhanova street; tel. +7(914) 69-78-123. E-mail: vanes.sav@yandex.ru.

Смагин Виктор Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией геофизических полей Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток); 690014, ул. Гоголя, 41; тел. 8(423) 242-33-32. E-mail: Li15@rambler.ru.

Mr. Victor P. Smagin – Dr. habil. in Physical-Mathematical Sciences, Professor, Head of the Laboratory of Geophysical Fields, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok); 690091, 41 Gogol street; tel. +7(423)242-33-32. E-mail: Li15@rambler.ru.

Сёмкин Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и систем Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток); 690014, ул. Гоголя, 41; тел. 8(423)229-70-43. E-mail: Li15@rambler.ru.

Mr. Sergei V. Semkin – PhD in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Technology and Systems, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok); 690091, 41 Gogol street; tel. +7(423)229-70-43. E-mail: Li15@rambler.ru.

Аннотация. В работе рассмотрены гидродинамика и индуцированные магнитные поля, вызванные подводным взрывом. Рассчитано магнитное поле, генерируемое этим взрывом, в квазистатическом приближении и с учетом индукционного эффекта. Проведен количественный анализ степени влияния самоиндукции на величину магнитного поля.

Summary. Hydrodynamics and induced magnetic field of an underwater explosion are considered. The magnetic field generated by this explosion in a quasistatic approximation taking into account the induction effect is calculated. The effect of self-induction on the magnetic field is analyzed quantitatively.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, океан, подводный взрыв, ударные волны, магнитное поле подводного взрыва, явление самоиндукции проводящей среды, линейное квазистатическое приближение.

Key words: magnetic hydrodynamics, ocean, underwater explosion, magnetic field of underwater explosion, induced field, self-induction in conducting media, linear quasistatic approximation.

УДК 550.373

Введение

Среди многих гидродинамических источников электромагнитных полей в морях и океанах менее других исследован такой специфический, как акустические ударные волны, возникающие от подводных взрывов. В связи с этим подвергнем анализу гидродинамику подводного взрыва, т.е. возникающие акустические волны большой мощности, фактически *ударные волны*, и подробно исследуем сопровождающие их электромагнитные поля, ограничившись вариантом индуцированных магнитных полей. Гидродинамика ударных волн отличается от традиционной динамики мор-

ских волн рядом существенных аспектов и может быть выявлена в предельных переходах при общетеоретическом рассмотрении решений нелинейных уравнений динамики жидкости. Исследуя вопросы взаимодействия возникших от тех или иных возмущений гидроакустических и магнитных полей в рамках общей магнитной гидродинамики океана, мы ограничимся рамками линейного квазистатического приближения.

1. Электродинамика океана как магнитная гидродинамика в приближении слабой линейной связи гидродинамических и электродинамических процессов

1.1. Магнитная гидродинамика океана

Проблема определения электромагнитных полей в морской среде относится к задачам магнитной гидродинамики – морские и океанские воды, несмотря на относительно малую их электрическую проводимость и слабую гиромангнитную связь с внешним магнитным полем, могут быть и были отнесены к числу магнитодинамических сред [5; 10; 14]. В магнитной гидродинамике используется макроскопическое описание жидкостей, рассматриваемых как непрерывные среды, без учета молекулярной структуры [1; 2; 10]. То есть при рассмотрении процессов, связанных с воздействием магнитного поля на проводящие жидкости, в магнитной гидродинамике используются макроскопические (усредненные по «физически бесконечно малому» объему среды) величины и параметры, такие как индукция и напряженность магнитного поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, индукция и напряженность электрического поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, плотность электрического тока $\mathbf{j}$ (жирным шрифтом указаны векторы характеристик), электрическая и магнитная проницаемости ϵ и μ и электрическая проводимость σ . Это не означает, конечно же, что в магнитной гидродинамике не используются результаты, получаемые при рассмотрении микроскопических механизмов проводимости. Некоторые аспекты этих явлений мы анализируем ниже.

Следует сразу указать, что магнитодинамические эффекты в морской воде, состоящие из генерации электрических токов и индуцируемых этими токами магнитных полей, как правило, весьма слабы [4; 5; 8; 15; 19], но обнаруживаются современной измерительной аппаратурой. Влияние земного магнетизма на гидродинамические движения в большинстве случаев пренебрежимо мало, и эти движения существуют и в отсутствии магнитного поля [15]. Однако при рассмотрении движений морской воды в поле достаточно сильного искусственного источника, в нашем случае это ударные волны от подводного взрыва, может возникнуть и возникает ситуация, когда магнитное поле оказывает влияние на гидродинамические или гидроакустические процессы (пондеромоторные силы), т.е. возникает их взаимодействие – пример такой ситуации мы рассмотрим ниже.

Переходя к постановке задачи о возбуждении электромагнитных полей в океаносфере под воздействием тех или иных гидродинамических источников, сформулируем систему основных уравнений магнитной гидродинамики океанов и морей как связанную систему уравнений электродинамики и гидродинамики, дополненную в общем случае уравнениями состояния океаносферы, уравнением сохранения энтропии и уравнениями электрических, механических и тепловых свойств жидкости в зависимости от давления, температуры и солёности. Уравнения электродинамики представим в виде полной системы уравнений Максвелла [1; 2; 10]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \gamma, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ – объемная плотность свободных зарядов, а уравнения связи между векторами $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ (материальные уравнения) для покоящихся сред имеют стандартный вид: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, здесь ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Магнитная проницаемость μ морских и океанских вод почти не отличается от единицы и везде в дальнейшем полагается $\mu = 1$. Для нашей задачи необходимы материальные уравнения для движущихся сред, которые отличаются от таковых для неподвижных сред и для малых скоростей движения водных масс $\mathbf{v}$ имеют следующий вид [10]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})], \quad \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} + \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon - 1) [\mathbf{v}, \mathbf{E}], \quad (2)$$

где $\mathbf{F}$ – индукция магнитного поля Земли. Эти уравнения следует дополнить выражением для плотности электрического тока движущейся жидкости, сама возможность возникновения которого в морских водах обусловлена наличием в ней положительных и отрицательных ионов солей. При движении морской воды на эти ионы действуют различные силы, что и приводит к возникновению токов. Пусть $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ – скорости положительных и отрицательных ионов соответственно, а $\mathbf{v}$ – скорость движения воды. Запишем уравнения движения ионов при наличии электрического поля $\mathbf{E}$, геомагнитного поля $\mathbf{F}$ и индуцированного магнитного поля $\mathbf{B}$, полагая, что на них действует сила Лоренца и «сила трения», которую мы будем считать пропорциональной разнице скоростей ионов и скорости воды:

$$m_{\pm} \frac{d\mathbf{v}_{\pm}}{dt} = -\alpha_{\pm} (\mathbf{v}_{\pm} - \mathbf{v}) + q_{\pm} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_{\pm}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})]), \quad (3)$$

где $m_{\pm}$ – эффективные массы положительных и отрицательных ионов; $\alpha_{\pm}$ – коэффициенты, связанные с подвижностью ионов; $q_{\pm}$ – их электрические заряды. Запишем уравнение (3) в виде

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{v} - \frac{m_{\pm}}{\alpha_{\pm}} \frac{d\mathbf{v}_{\pm}}{dt} + \frac{q_{\pm}}{\alpha_{\pm}} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_{\pm}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})]). \quad (4)$$

Скорости ионов $\mathbf{v}_{\pm}$ мало отличаются от скорости воды $\mathbf{v}$, поэтому в первом приближении $\mathbf{v}_{\pm}$ можно оценить, подставив в правую часть (4) скорость $\mathbf{v}$ вместо скорости $\mathbf{v}_{\pm}$, так что на эти уравнения можно смотреть как на рекуррентные соотношения, из которых определяются $\mathbf{v}_{\pm}$ с любой необходимой степенью точности. Можно ограничиться только первым приближением для $\mathbf{v}_{\pm}$. Вводя обозначения $\gamma_{\pm}$ для объемных плотностей положительного и отрицательного зарядов, запишем в этом приближении выражение для плотности тока $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{v} - \left(\frac{m_+ \gamma_+}{\alpha_+} + \frac{m_- \gamma_-}{\alpha_-} \right) \mathbf{a} + \left(\frac{q_+ \gamma_+}{\alpha_+} + \frac{q_- \gamma_-}{\alpha_-} \right) (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})]), \quad (5)$$

где $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ – возникающее ускорение водной среды. Введем обозначения для коэффициента «инерционного тока» (второе слагаемое в (5)) $K = \frac{m_+ \gamma_+}{\alpha_+} + \frac{m_- \gamma_-}{\alpha_-}$ и для электрической про-

водимости воды $\sigma = \frac{q_+ \gamma_+}{\alpha_+} + \frac{q_- \gamma_-}{\alpha_-}$. Величина $\sigma \approx 4 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$, величина K определяется главным об-

разом различием в массах и подвижностях отрицательных и положительных ионов.

Рассмотрим отдельно смысл каждого слагаемого в правой части уравнения (5). Третье слагаемое, которое мы обозначим $\mathbf{j}_{ind} = \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})])$, – это индукционный ток, возникающий под действием силы Лоренца. Второе слагаемое $\mathbf{j}_{in} = K \mathbf{a}$ – ток, возникающий по «инерционному механизму». В работе [3] показано, что существуют ситуации, когда это слагаемое играет важную роль в геофизических процессах. Первое слагаемое $\mathbf{j}_c = \gamma \mathbf{v}$ – конвекционный ток, связанный с переносом макроскопической плотности заряда при движении морской воды. Даже для очень интенсивных движений морской воды величина $|\gamma|$ значительно меньше, чем $|\gamma_{\pm}|$. Поэтому будем считать, что величины K и электрическая проводимость морской воды являются константами, а плотность свободных зарядов γ , а значит и $\mathbf{j}_c$, равна нулю. Это означает, что мы пренебрегаем квазистатическим электрическим полем $\mathbf{E}_c = \gamma \mathbf{v} / \sigma$, связанным с разделением зарядов. Таким образом,

будем считать, что индуцированный в морской воде электрический ток возникает в результате действия двух механизмов – инерционного и индукционного:

$$\mathbf{j} = -K\mathbf{a} + \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})]). \quad (6)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$, входящее в последнюю формулу, вызвано только индукционными эффектами, связанными с изменением со временем магнитного поля $\mathbf{B}$. В обзоре А. В. Гульельми [3] приведена оценка вклада каждого из слагаемых, входящих в (6), в общую плотность тока для случая, когда все гидродинамические параметры являются периодическими функциями времени с частотой ω . Показано, что инерционное (первое) слагаемое начинает преобладать над индукционным для частот, превышающих $\omega_c = \sigma F / K$, что для морской воды соответствует примерно 50 Гц.

Отметим, что в результате проведенного анализа токов уравнения (1) и (2) дополнены уравнением (6), но этими уравнениями задача не исчерпывается. Морская вода ограничена снизу дном, а сверху свободной поверхностью океана. Необходимо задать граничные условия на этих поверхностях для векторов, характеризующих электромагнитное поле. Наиболее полно обсуждение граничных условий для движущихся сред в приложении к морской специфике проведено в работе А. Б. Лейбо [9]. Основу для вывода граничных условий в движущейся проводящей среде составляют ковариантность уравнений Максвелла по отношению к преобразованиям Лоренца [1; 2; 10] и существующие в этом случае соотношения и формулы преобразования между векторами электромагнитного поля. Для малых скоростей эти условия имеют следующий вид [1; 2]:

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{i} - v_n (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1),$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)_n = 0, (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_n = \chi,$$

$$[\mathbf{n}, (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = v_n (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1),$$

где χ – плотность поверхностных свободных зарядов; $\mathbf{i}$ – плотность поверхностного тока; $\mathbf{n}$ – вектор нормали. Отметим, что на границе океан-дно $v_n = 0$ и граничные условия совпадают с граничными условиями для неподвижных сред.

Обратимся к стандартным уравнениям гидродинамики, записываемым как сумма уравнения неразрывности и уравнения Эйлера, в правую часть которого добавим объёмную плотность сторонних, в данном случае электромагнитных, сил: $\mathbf{f} = \gamma \mathbf{E} + [\mathbf{j}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})]$. В результате имеем уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} P + \mathbf{f}. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения магнитной гидродинамики (1), (2), (6) и (7) морской или океанической воды представляют собой значительно более сложную нелинейную систему уравнений, чем взятые в отдельности уравнения электродинамики и гидродинамики. Однако в магнитной гидродинамике океана можно провести ряд существенных упрощений, приводящих в конечном итоге к раздельному рассмотрению электродинамических и гидродинамических уравнений, как отмечалось в работах [12; 13; 14; 16; 18].

Из уравнений Максвелла (1), материальных уравнений (2) и закона Ома (6) можно получить такое наиболее общее уравнение для магнитоиндукционного поля [16]:

$$\begin{aligned} \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] + \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})] + \\ + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \operatorname{rot} [\mathbf{v}, (\mathbf{F} + \mathbf{B})] - \mu_0 K \operatorname{rot} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (8)$$

В зависимости от пространственной структуры и скорости изменения поля можно применять те или иные приближения. Если пренебречь токами смещения и другими слагаемыми, пропорциональными $\varepsilon_0\mu_0$, то для магнитного поля $\mathbf{B}$ получим уравнение

$$\mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{B} = \mu_0\sigma\operatorname{rot}[\mathbf{v},(\mathbf{F} + \mathbf{B})] - \mu_0K\operatorname{rot}\mathbf{a}. \quad (9)$$

Если же в правой части уравнения (9) пренебречь величиной индуцированного поля $\mathbf{B}$ по сравнению с величиной геомагнитного поля, то для искомого поля получим уравнение типа уравнения диффузии, решение которого для безграничной среды при нулевых начальных условиях в математической литературе известно и можно записать в виде [11]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \frac{dt'}{(2\beta\sqrt{\pi(t-t')})^3} \times \\ \times \int \operatorname{rot}([\mathbf{v}(\mathbf{r}', t'), \mathbf{F}] - (K/\sigma)\mathbf{a}(\mathbf{r}', t')) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\beta^2(t-t')}\right) d\mathbf{r}', \quad \beta^2 = 1/\mu_0\sigma. \quad (10)$$

Если далее пренебречь явлением самоиндукции (отбросить слагаемое, содержащее $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$), то получим уравнение Пуассона, решение которого отличается от решения (10) и имеет следующий вид [11]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int \frac{[(\mathbf{v}(\mathbf{r}', t), \mathbf{F}) - (K/\sigma)\mathbf{a}(\mathbf{r}', t)), (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'. \quad (11)$$

В случае, когда движение воды является безвихревым ($\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$), электрический ток не возникает по инерционному механизму и в решениях (10) и (11) не будет содержаться слагаемых с вектором $\mathbf{a}$. Следует также учитывать, что кроме геомагнитного поля $\mathbf{F}$ и индуцированного движением жидкости поля $\mathbf{B}$, определяемого из уравнения (8) в том или ином приближении, в водной среде могут быть также и поля, созданные искусственными источниками, например, электромагнитными антеннами. В случае, когда такие магнитные поля $\mathbf{B}_0$ присутствуют, для генерации поля $\mathbf{B}$ они играют ту же роль, что и геомагнитное поле $\mathbf{F}$, поэтому в этих случаях необходимо заменить $\mathbf{F}$ в уравнении (8) на $\mathbf{F} + \mathbf{B}_0$. Что касается самого поля $\mathbf{B}_0$, то его значение находится из уравнений Максвелла, записанных для неподвижной водной среды и соответствующих граничных условий. При этом уравнение для поля $\mathbf{B}_0$ имеет следующий вид [14; 17]:

$$-\nabla^2\mathbf{B}_0 + \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{B}_0}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}_0}{\partial t^2} = 0.$$

Отметим, что отбрасывание в этом уравнении слагаемого, соответствующего максвелловскому току смещения $\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}_0}{\partial t^2}$, не имеет того же смысла, что отбрасывание аналогичного слагаемого в уравнении для индуцированного поля (8). Поле $\mathbf{B}_0$, созданное токами, например, в антенне, может иметь значительно более высокую частоту, чем частоты гидродинамических и акустических процессов. Пространственно-временная структура поля $\mathbf{B}_0$ зависит от типа и частоты источника и расстояния до него. На большом расстоянии от источника достаточно высокой частоты его поле имеет вид плоской электромагнитной волны $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_a \exp(i(\omega t - (\mathbf{k}, \mathbf{r})))$, где $\mathbf{k}$ – комплексный волновой вектор, величина которого равна $k = \sqrt{\omega\mu_0(\omega\varepsilon_0 - i\sigma)}$. При частотах, когда ток

смещения мал по сравнению с током проводимости (условие $\omega \ll \sigma/(\epsilon\epsilon_0)$), величина волнового вектора становится равной

$$k = \alpha - i\beta \approx (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}. \quad (12)$$

Оценим постоянную затухания β , толщину скин-слоя $\delta = 1/\beta$ и длину волны в воде $\lambda = 2\pi/\alpha$, преобразуя их согласно (12) и подставив численную табличную величину μ_0 , найдем

$$\beta = 1,99 \cdot 10^{-3} \sqrt{\nu\sigma}, \quad \delta = 500/\sqrt{\nu\sigma}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{10^7}{\nu\sigma}}, \quad (13)$$

где $\nu = \omega/(2\pi)$ – линейная частота. Тогда, например, при $\nu = 1$ МГц и $\sigma = 4$ Сим/м получаем, согласно формулам (13), $\beta \approx 4$ м⁻¹, $\delta = 0,25$ м, $\lambda \approx 1,6$ м, т.е. волна такой частоты практически не распространяется в морской воде. Если же частота волны порядка 100 Гц, то глубина проникновения в морскую среду будет равной $\delta \approx 25$ м.

1.2. Теория взаимодействия гидроакустических и электромагнитных полей в океане

Ниже мы рассматриваем два аспекта процесса взаимодействия гидроакустических и возникающих от них переменных электромагнитных полей. В одном случае гидроакустическая волна, попадающая в область переменного электромагнитного поля, индуцирует дополнительное поле, возмущающее первичное электромагнитное, а в другом случае взаимодействие гидроакустического и электромагнитного полей может привести к возникновению добавочных акустических гармоник, что представляется чрезвычайно интересным и важным.

Рассмотрим ситуацию, когда в морской или океанической среде присутствует тот или иной источник возбуждения электромагнитного поля, а также электромагнитное поле того или иного искусственного происхождения. Структура поля в этом случае определяется как параметрами источника, так и электрическими свойствами морской среды. Определение этой структуры для различных конфигураций источника является отдельной задачей, рассмотренной в разных вариантах, например, в [12; 13; 16; 18; 19]. Предположим, что в области пространства, где есть такое электромагнитное поле, распространяется гидроакустическая (звуковая) волна. Эта волна индуцирует дополнительное электромагнитное поле, которое накладывается на поле источника. Исследуем поле, индуцированное плоской монохроматической звуковой волной с частотой ω , распространяющейся вблизи источника магнитного поля, которое периодически (с частотой ω_0) меняется во времени. Как будет показано ниже, характерной особенностью индуцированного поля является наличие двух гармоник с частотами $\omega + \omega_0$ и $\omega - \omega_0$. Используя уравнения Максвелла (1) и закон Ома (6), можем получить уравнение, связывающее индуцированное поле $\mathbf{B}$ с магнитным полем источника $\mathbf{B}_0$ и полем скоростей акустической волны $\mathbf{v}$, отличающееся от уравнения (8):

$$-\nabla^2 \mathbf{B} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]. \quad (14)$$

В соответствии с постановкой задачи поле источника и его скорость зададим в форме

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}_0 \exp[i\omega_0 t], \quad \mathbf{v} = v_a \mathbf{e}_k \exp[i((\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t)],$$

где $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/k$, $\omega = c_0 k$, k – волновое число; v_a – амплитуда акустической скорости c_0 , вследствие чего правая часть уравнения (14) примет такой вид:

$$\frac{\mu_0 \sigma v_a}{2} \left(e^{i(\omega_0 - \omega)t} \text{rot}([\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0] e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}) + e^{i(\omega_0 + \omega)t} \text{rot}([\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0] e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}) \right). \quad (15)$$

Отметим, что наличие в выражении (15) двух слагаемых с частотами $\omega + \omega_0$ и $\omega - \omega_0$ обусловлено тем, что для правильной записи уравнения в вещественной форме в правой части должна стоять не вещественная часть произведения функций, а произведение их вещественных частей.

Решение уравнения (14) будем искать в виде суммы двух полей

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_+ \exp[i((\omega_0 + \omega)t - (\mathbf{k}, \mathbf{r}))] + \mathbf{B}_- \exp[i((\omega_0 - \omega)t + (\mathbf{k}, \mathbf{r}))], \quad (16)$$

так что, подставляя его в (14), получаем одинаковые по виду уравнения для каждой функций $\mathbf{B}_+$ и $\mathbf{B}_-$, записанные ниже в виде одного уравнения:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{B}_\pm \pm 2ik(\mathbf{e}_k, \nabla) \mathbf{B}_\pm + (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_0 \pm \omega)^2 + i\mu_0 \sigma(\omega_0 \pm \omega)) \mathbf{B}_\pm = \\ = \frac{\mu_0 \sigma \nabla_a}{2} (\text{rot}[\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0] \mp ik[\mathbf{e}_k, [\mathbf{e}_k, \mathbf{b}_0]]). \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим два частных случая, в которых можно пренебречь теми или иными слагаемыми в левой части уравнений (17). Предположим, что длина звуковой волны значительно меньше l – размеров области, в которой существенно меняется поле $\mathbf{b}_0$, т.е. $kl \gg 1$. Естественно предположить, что характерный масштаб изменения полей $\mathbf{B}_\pm$ тоже порядка l , в этом случае наибольшим в левой части (17) является третье слагаемое. Оставляя только одно это слагаемое, мы получим алгебраическое уравнение для магнитного поля $\mathbf{B}_\pm$. Наименьшим по величине в случае $kl \gg 1$ является первое слагаемое в левой части (17). Если же отбросить только его, получим для полей $\mathbf{B}_\pm$ в (16) обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. В противоположном случае, когда $kl \ll 1$, отбрасывая второе слагаемое, мы получим из (17) уравнение Гельмгольца, а при малых ω_0 , когда можно отбросить и третье слагаемое в левой части (17), получим уравнение Пуассона. Полученных результатов уравнений магнитной гидродинамики гидроакустических волн достаточно, чтобы рассмотреть электромагнитные поля от ударных волн.

2. Магнитное поле, генерируемое пространственно-симметричным движением жидкости, возникающим при подводном взрыве

2.1. Гидродинамика ударных волн, возникающих от подводного взрыва

Рассмотрим специфический для электродинамики океана гидроакустический источник индуцируемого электромагнитного поля – акустические ударные волны, возникающие от подводных взрывов. Подвергнем анализу прежде всего гидродинамику подводного взрыва, т.е. возникающие акустические волны большой мощности, фактически **ударные волны**, а уже затем исследуем сопровождающие их электромагнитные поля, ограничившись вариантом магнитных полей. В процессе взрыва во взрывчатом веществе возникает детонационная волна – тонкий, быстро движущийся слой, в котором происходит химическая реакция. Этот слой отделяет взрывчатое вещество в исходном состоянии от продуктов взрыва, находящихся под высокими давлением и температурой. При выходе детонационной волны на поверхность заряда в воде возникает ударная волна – резкий всплеск давления, распространяющийся от места взрыва со скоростью, превышающей скорость звука. Непосредственно за фронтом ударной волны давление может достигать нескольких тысяч атмосфер, а плотность воды значительно отличается от начальной плотности. Давление за фронтом ударной волны резко падает – приблизительно по экспоненциальному закону, продолжительность затухания не превосходит нескольких миллисекунд. Распространение ударной волны характеризуется рядом особенностей, отличающих эту волну от волн малой амплитуды (звуковых) [6].

Основные особенности таковы:

1. Скорость распространения ударной волны вблизи заряда в несколько раз превышает скорость звука, равную для воды примерно 1520 м/с. По мере продвижения скорость ударной волны весьма быстро падает до скорости звука, а давление уменьшается до величины акустического.

2. Амплитуда давления в сферической ударной волне уменьшается в зависимости от расстояния быстрее, чем в акустическом приближении, но на больших расстояниях приближается к акустическому закону.

3. Профиль волны постепенно расширяется по мере ее распространения. Размывание профиля особенно заметно на малых расстояниях от заряда, когда давление во фронте ударной волны достигает максимальной величины.

4. При интенсивных гидродинамических процессах, вызванных подводным взрывом, может возникнуть такая ситуация, когда условие адиабатичности нарушается на фронте ударной волны и большие градиенты давления и скорости приводят к значительной диссипации энергии.

Вслед за распространением ударной волны начинают расширяться сильно сжатые продукты детонации – начальное давление в газовом пузыре сильно уменьшается после излучения ударной волны, но все еще остается гораздо больше равновесного гидростатического давления. Вода в непосредственной близости от газовой сферы обладает значительной радиальной скоростью, вызванной как прошедшей ударной волной, так и давлением газов. Поэтому диаметр пузыря в начальной стадии расширения стремительно возрастает. Расширение продолжается в течение сравнительно продолжительного промежутка времени. По мере расширения внутреннее давление газа постепенно падает, но вследствие инерции расходящегося потока воды расширение продолжается и после того, как давление падает ниже равновесного значения. И после прекращения расширения начинается сжатие с непрерывно возрастающей скоростью, продолжающееся до тех пор, пока возрастающее давление в пузыре не остановит этот процесс, после чего опять начинается расширение. Следовательно, происходит пульсация газовой сферы, сопровождающаяся вторичными пульсациями давления, распространяющимися в воде со скоростью звука. Давление в воде при пульсациях достигает максимального значения в моменты, когда скорость расширения или сжатия пузыря максимальна, т.е. когда радиус пузыря приближается к минимальному значению. Таким образом, гидродинамические процессы, сопровождающие подводный взрыв, можно условно разделить на два типа. Первый – связанный с образованием и распространением ударной волны, характеризующийся высокими давлениями и значительным превышением плотности над равновесным значением. И второй – связанный с расширением и пульсациями газовой сферы, а также с распространением вторичных пульсаций давления.

Процессы первого типа идут в сравнительно узком (порядка нескольких метров) сферическом слое непосредственно за фронтом ударной волны. Для их количественного описания нужно учитывать сжимаемость жидкости в широком диапазоне давлений, а также условия на фронте ударной волны, являющейся, в сущности, поверхностью разрыва гидродинамических функций. Для описания процессов второго типа достаточно ограничиться приближением несжимаемой жидкости или акустическим приближением для описания вторичных пульсаций давления.

Прежде рассмотрим движение газовой сферы. Для потенциального движения жидкости её скорость $\mathbf{v}$ определяется формулой $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$, а уравнение для потенциала скорости φ имеет стандартную форму при принятии условий адиабатического процесса (изменение энтропии не происходит, так что $\delta S = 0$)

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \nabla)v^2 \right), \quad (18)$$

где $c^2 = (\partial P / \partial \rho)_S$ – квадрат скорости волны, здесь P и ρ – соответственно давление и плотность воды. В приближении несжимаемой жидкости в уравнении (18) отбрасывается вся правая часть, и оно превращается в уравнение Лапласа, имеющее сферически симметричное решение: $\varphi = f(t)/r$, $v = f(t)/r^2$. В акустическом приближении в (18) отбрасываются нелинейные по v слагаемые, а $c = c_0 = \text{const}$. Тогда сферически симметричное решение для этого случая имеет вид потенциала сферической волны $\varphi = f(t - r/c_0)/r$, а скорость содержит два слагаемых:

$$v = \frac{f(t-r/c_0)}{r^2} + \frac{f'(t-r/c_0)}{c_0 r}.$$

Если движение жидкости вызвано расширением или сжатием газового пузыря радиуса $a(t)$, то функция f определяется из условия $v(a,t) = \dot{a}(t)$. В приближении несжимаемой жидкости искомая функция $f(t)$ равна $f(t) = a^2(t)\dot{a}(t)$. В акустическом приближении $f(t)$ можно найти из уравнения

$$\frac{a(t)}{c_0} \dot{f}(t) + f(t) = a^2(t)\dot{a}(t).$$

Если в этом уравнении пренебречь первым слагаемым, то эффект сжимаемости можно приближенно учесть только с помощью «времени запаздывания» $(r - a/c_0)$ и считать, что потенциал скорости в акустическом приближении имеет вид

$$\varphi = \frac{a^2(t - (r - a)/c_0)\dot{a}(t - (r - a)/c_0)}{r}.$$

Динамику газовой сферы (без учета эффекта плавучести) можно описать (см. [6; 7]) с помощью условия сохранения энергии $E_l + A = E_1 - E(a)$, где E_l – кинетическая энергия жидкости; $A = P_0(V(a) - V_0)$ – работа против сил гидростатического давления; $E(a)$ – внутренняя энергия газового пузыря радиуса a ; E_1 – начальная энергия газовой сферы. Эта начальная энергия пропорциональна общей энергии W , выделившейся при взрыве, так что она равна величине $E_1 = \eta_1 W$, где $\eta_1 \approx 0,41$ [6]. В приближении несжимаемой жидкости вид и значение E_l можно найти, проинтегрировав по объему удельную кинетическую энергию:

$$E_l = \int_a^\infty \frac{\rho_0 v^2}{2} 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho_0 a^3 \dot{a}^2.$$

Пренебрегая начальным объемом V_0 и внутренней энергией расширившегося пузыря $E(a)$, получим уравнение, определяющее радиус газового пузыря:

$$2\pi\rho_0 a^3 \dot{a}^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 P_0 = E_1. \quad (19)$$

Максимальный радиус пузыря a_{m1} можно найти, положив $\dot{a} = 0$ в (19), что дает величину $a_{m1} = \sqrt[3]{\frac{3E_1}{4\pi P_0}}$, так что, например, при взрыве тротилового заряда массой 250 кг на глубине 90 м, параметры взрыва, необходимые нам для расчетов, будут иметь такие величины: $W \approx 10^9$ Дж, $P_0 \approx 10^6$ Па, $a_{m1} \approx 4,5$ м.

Зависимость $a(t)$ в неявном виде можно найти, проинтегрировав уравнение (19), после чего получим возможность вычислять продолжительность времени разных этапов (пульсаций) взрыва по формуле

$$t = \sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}} \int_{a_0}^a \frac{da}{\sqrt{(a_{m1}/a)^3 - 1}}.$$

Несмотря на кажущуюся простоту, интеграл этого выражения не вычисляется через элементарные функции, его можно выразить только через специальные бета-функции, содержащиеся в математических справочниках спецфункций.

Установлено (см. [6; 7]), что пузырь, расширяясь до максимального радиуса a_{m1} за время $T_1/2$, сжимается затем до исходного радиуса за то же самое время $T_1/2$. Величина этого периода равна приблизительно времени $T_1 \approx 1,83a_{m1}\sqrt{\rho_0/P_0}$, что дает для указанных выше параметров взрыва время $T_1 \approx 0,25$ с. При сжатии пузыря до минимального радиуса (в момент времени T_1) давление в пузыре достигает максимума и приближение несжимаемой жидкости становится не вполне корректным. В этот момент в жидкости происходят турбулентные процессы и излучение вторичной волны давления [6; 7], на которые расходуется значительная доля энергии пузыря E_1 . Изменение знака радиальной скорости $\dot{a}$ происходит в момент максимального сжатия очень быстро, практически мгновенно, и сжатие сменяется расширением пузыря с оставшейся к моменту начала второй пульсации энергией $E_2 = \eta_2 W$, $\eta_2 \approx 0,14$. Для приведенных выше параметров $a_{m2} \approx 3,1$ м и новый период времени равен $T_2 \approx 0,17$ с. Аналогично при завершении второй пульсации происходит излучение еще одной вторичной волны давления, и начинается третья пульсация с энергией $E_3 = \eta_3 W$, $\eta_3 \approx 0,08$, а общее число пульсаций может достигать 5-6 при благоприятных условиях. Однако следует отметить, что пренебрежение эффектом всплывания пузыря становится слишком грубым при рассмотрении второй и последующих пульсаций. Имея в виду качественные особенности поведения решения уравнения (19), можем приближенно принять, что $\dot{a} = \dot{a}_0 - 2\dot{a}_0/T_1$ во время первой пульсации, а радиус пузыря оказывается равен величине $a = a_0 + \dot{a}_0 t - \dot{a}_0 t^2/T_1$. При $t = T_1/2$ $a = a_{m1}$, что позволяет найти скорость расширения пузыря газа равной $\dot{a}_0 = \frac{4(a_{m1} - a_0)}{T_1} \approx \frac{4a_{m1}}{T_1}$, что дает скорость, равную величине $\dot{a}_0 \approx 72$ м/с при принятых параметрах. Пренебрегая величиной a_0 , получаем $a = \frac{4a_{m1}}{T_1} t(1 - t/T_1)$, $\dot{a} = \frac{4a_{m1}}{T_1} (1 - 2t/T_1)$. Выражение для скорости распространения газового пузыря в приближении несжимаемой жидкости определяется в виде

$$v = \frac{f(t)}{r^2} = \frac{(4a_{m1})^3}{T_1} x^2 (1-x)^2 (1-2x) \frac{1}{r^2}, \quad x = t/T_1.$$

Уже на первых стадиях мощного подводного взрыва возможно образование сильной ударной волны. Хотя теоретические модели гидродинамики подводного взрыва существуют уже давно [6; 7] и хорошо известны специалистам, однако еще и в настоящее время нет универсальной модели, позволяющей определить $v(r', t)$ на всех этапах взрыва. Можно лишь рассмотреть те или иные приближения, подходящие для разных стадий процесса. Например, на начальной стадии взрыва скорость ударной волны можно считать равной

$$v(r', t) = r' / 10t, \quad (20)$$

а радиус фронта ударной волны считать равным $R(t) = At^{2/5}$ [7]. Константу A можно выразить через энергию взрыва W и невозмущенную плотность воды ρ_0 :

$$A = \left(\frac{225W}{2\pi\rho_0} \right)^{1/5}, \quad (21)$$

которая будет использована в расчетах на начальной стадии взрыва.

2.2. Магнитное поле в квазистатическом приближении (без учета самоиндукции)

При подводных взрывах на большой глубине на первом этапе, как уже отмечалось, возникает волна со сферически симметричным полем скоростей. Осуществим расчет индуцированного магнитного поля в квазистатическом приближении, а затем и с учетом явления самоиндукции.

Рассмотрим точечный источник постоянной интенсивности, взрывающийся в момент времени $t = 0$, так что граница области движения воды расширяется со скоростью звука c и жидкость считается несжимаемой везде, кроме слоя $r = ct$. Его возникшее начальное центрально-симметричное поле скоростей $v(r, t)$ определяется следующим образом:

$$v(r, t) = \begin{cases} \frac{v_0 r_0^2}{r^2}; & 0 < r < ct, \\ 0; & r > ct \end{cases} \quad (22)$$

где v_0 – скорость воды на расстоянии r_0 от центра взрыва. В квазистатическом приближении магнитное поле можно рассчитать по закону Био – Савара – Лапласа как интеграл вида

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{v}(\mathbf{r}', t), \mathbf{F}], (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'. \quad (23)$$

Поскольку движение воды сферически симметричное, введем декартовую и сферическую системы координат, направив ось z по геомагнитному полю $\mathbf{F}$, а оси x и y таким образом, чтобы точка наблюдения с радиус-вектором $\mathbf{r}$ лежала в плоскости xz . Тогда декартовые компоненты вектора $\mathbf{v}(\mathbf{r}', t)$, записанные как функции от сферических координат точки интегрирования $\mathbf{r}'$, имеют вид $v_x = v(r', t) \sin \theta' \cos \varphi'$, $v_y = v(r', t) \sin \theta' \sin \varphi'$, $v_z = v(r', t) \cos \theta'$, а компоненты вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, соответственно, вид $(r - r')_x = r \sin \theta - r' \sin \theta' \cos \varphi'$, $(r - r')_y = -r' \sin \theta' \sin \varphi'$, $(r - r')_z = r \cos \theta - r' \cos \theta'$. Компоненты двойного векторного произведения в числителе подынтегрального выражения (23) будут такими:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{F}], (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_x = -F v(r', t) \sin \theta' \cos \varphi' (r \cos \theta - r' \cos \theta'),$$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{F}], (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_y = -F v(r', t) \sin \theta' \sin \varphi' (r \cos \theta - r' \cos \theta'),$$

$$[\mathbf{v}, \mathbf{F}], (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_z = F v(r', t) (r \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' - r' \sin^2 \theta'),$$

квадрат разности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ будет равен $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta')$.

Подставляя все эти выражения в (19), замечаем, что $B_y = 0$, а для двух ненулевых компонент индуцированного поля получаем такие их интегральные формы:

$$B_x = -\frac{\mu_0 \sigma F}{4\pi} \int \frac{v(r', t) r'^2 (r \cos \theta - r' \cos \theta') \sin^2 \theta' \cos \varphi' dr' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta'))^{3/2}},$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma F}{4\pi} \int \frac{v(r', t) r'^2 (r \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' - r' \sin^2 \theta') \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta'))^{3/2}},$$

что позволяет определить компоненты магнитного поля в произвольной точке пространства. Интегрирование по θ' и φ' в этих интегралах можно провести в общем виде, выразив результат через эллиптические интегралы Лежандра [11]. И, напротив, в случае, когда точка наблюдения лежит на оси z ($\theta = 0$), результат интегрирования по углам θ' и φ' может быть выражен в элементарных функциях. В этом последнем случае находим, что горизонтальная компонента отсутствует, т.е. $B_x = 0$, а для единственной вертикальной компоненты B_z получим

$$B_z = -\frac{\mu_0 \sigma F}{2} \int_0^{R(t)} v(r', t) r'^3 dr' \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{3/2}}. \quad (24)$$

Поскольку внутренний интеграл вычисляется в элементарных функциях, а именно равен

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{3/2}} = \frac{4}{3(\max(r, r'))^3},$$

то для вертикальной компоненты (именуем её нижним индексом q) после подстановки в подынтегральное выражение (24) скорости (22), вычислив интеграл, получим

$$B_q = \begin{cases} -D \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\tau^2}{z^3}; & 0 < \tau < z \\ -D \frac{\sqrt{\pi}}{3} (3/z - 2/\tau); & \tau > z \end{cases}, \quad (25)$$

где $D = \frac{\mu_0 \sigma F v_0 r_0^2 \omega_s}{c \sqrt{\pi}} = \frac{v_0 r_0^2 \omega_s^2}{c^3 \sqrt{\pi}} F$, а характерные время $\tau = \omega_s t$ и расстояние $z = \omega_s r / c$ – безразмерные переменные. Решение (25) описывает характерную особенность индуцированных магнитных полей – так называемый *магнитный предвестник* – отличную от нуля величину поля в области, куда еще не дошло гидродинамическое возмущение (т.е. при $\tau < z$). В анализируемом решении (25) величина предвестника убывает обратно пропорционально кубу расстояния z^3 , в то время как установившееся значение поля (при стремлении параметра времени $\tau \rightarrow \infty$) убывает обратно пропорционально z .

2.3. Магнитное поле с учетом самоиндукции

Оценим и рассчитаем влияние явления самоиндукции, которое по-разному влияет на величину магнитного поля в различных ситуациях. Например, для точечного акустического источника влияние самоиндукции можно оценить посредством сравнения частоты источника ω с характерной частотой $\omega_s = \mu_0 \sigma c^2 \approx 14 \text{ с}^{-1}$, и, как показано в [14; 16], при частотах $\omega \gg \omega_s$ самоиндукцией можно пренебрегать. Но для непериодических масштабных движений океанских вод, возникающих при подводном взрыве, весьма затруднительно сформулировать какой-либо простой критерий оценки влияния самоиндукции на величину индуцированного поля. Для оценки роли самоиндукции в этой ситуации представляется разумным сформулировать простую модель, отражающую характерные особенности процесса, и непосредственно рассчитать для неё величины магнитных полей как с учетом самоиндукции, так и без её учета. Для определения магнитного поля с учетом самоиндукции необходимо решить хорошо известное в морской магнитной гидродинамике исходное уравнение для поля магнитной индукции в проводящей водной среде (уравнение (14) без третьего слагаемого слева)

$$\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{F}].$$

Для безграничной среды и нулевых начальных условий для искомого поля решение этого уравнения имеет следующий вид [11]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mu_0 \sigma)^{5/2}}{16\sqrt{\pi^3}} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{5/2}} \int [[\mathbf{v}(\mathbf{r}', t'), \mathbf{F}], (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \mu_0 \sigma}{4(t-t')}\right) d\mathbf{r}'. \quad (26)$$

Как и в квазистатическом приближении, ограничимся вычислением поля в точках на оси z . Подставив скорость (22) в (26) и переходя к тем же безразмерным переменным, что и в выражении (25), получим

$$B_{in} = -\frac{D}{z^2} \int_0^\tau \Psi dy, \quad \Psi = \int_0^y \frac{\Phi dx}{x}, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{y-x}} \left\{ \exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4(y-x)}\right) + \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4(y-x)}\right) + \frac{2(y-x)}{xz} \left[\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4(y-x)}\right) - \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4(y-x)}\right) \right] \right\}. \quad (27)$$

Можно показать аналитически, что при устремлении параметра $\tau \rightarrow \infty$ интеграл (26) переходит в интеграл (23) при условии, что скорость движения жидкости не зависит от времени. Действительно, переходя в (26) к новой переменной $\chi = 1/(t-t')$ и обозначив $\beta^2 = 1/\mu_0\sigma$, получим первоначально такое новое выражение для интеграла (26):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{1/t}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\beta^2} \chi\right) \frac{\chi^{-1/2} d\chi}{(2\beta\sqrt{\pi})^3} \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r}'), \mathbf{F}] d\mathbf{r}'.$$

Далее, поскольку при $\tau \rightarrow \infty$ интеграл по χ стремится к $\frac{2\beta\sqrt{\pi}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, постольку искомое выражение для $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, соответственно, стремится к окончательному виду $\frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int \frac{\text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r}'), \mathbf{F}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$.

В таком случае, следовательно, и решение (27) при больших значениях τ переходит в (25), то есть $B_{in} \rightarrow B_q$ при $\tau \rightarrow \infty$. Но при конечных значениях τ различие функций $B_{in}(\tau)$ и $B_q(\tau)$ может оказаться весьма существенным. Для того чтобы исследовать это различие, были проведены численные расчеты магнитных полей в квазистатическом приближении B_q (по формуле (25)) и с учетом самоиндукции B_{in} (по формуле (27)). Было установлено, что учет самоиндукции *всегда приводит к уменьшению величины* индуцированного магнитного поля ($B_q > B_{in}$), что отражено графически на рис. 1 и 2. При малых значениях расстояния от центра взрыва ($z < 0,5$) влияние самоиндукции не существенно (см. рис. 3) – различие величин $B_{in}(\tau)$ и $B_q(\tau)$ не превышает 5 % при всех значениях τ .

Рис. 1. Зависимость (в единицах D) B_q (кривая 1) и B_{in} (кривая 2) от τ ($z = 3$)

Рис. 2. Зависимость (в единицах D) B_q (кривая 1) и B_{in} (кривая 2) от τ ($z = 10$)

На значительных ($z > 5$) расстояниях от центра взрыва самоиндукция существенно сказывается на величине поля. В области предвестника B_{in} (до пунктирной линии на рис. 1 и 2) значительно меньше, чем $B_q(\tau)$. При больших значениях z $B_{in}(\tau)$ значительно медленнее приближается к предельному значению, чем $B_q(\tau)$, что отражено на рис. 2 и 4.

Рис. 3. Зависимость отношения B_{in} / B_q от τ ($z = 0,1$)

Рис. 4. Зависимость отношения B_{in} / B_q от τ ($z = 10$)

На начальной стадии взрыва, когда давление и скорость в волне велики, приближение несжимаемой жидкости может оказаться неправомерным. В этом случае можно найти индуцированное магнитное поле с помощью, например, гидродинамической модели, сформулированной выше. Подставляя выражение (20) в интеграл (24), получим

$$B_z = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 \sigma W}{\pi \rho_0} \frac{t}{r^3} F.$$

Условие квазистатичности для этого решения выполняется на расстояниях $r \ll \sqrt{t / \mu_0 \sigma}$. Учитывая, что сильная ударная волна существует время порядка 10^{-3} с от момента начала взрыва, получим, что условие квазистатичности выполняется только для расстояний $r \ll 100$ м. Таким образом, для вычисления магнитного поля в точках, достаточно далеких от центра взрыва, необходимо учитывать «магнитную вязкость».

Проведем численные оценки величины магнитного поля по формуле (23). Примем энергию взрыва в тротиловом эквиваленте порядка 250 кг (считаем энергию, выделяющуюся при взрыве 1 кг тротила примерно равной около $4 \cdot 10^6$ Дж), а расстояние от места взрыва до точки наблюдения 10 м. Тогда величина B_z оказывается порядка $10^{-5} F$ (1F – одна фарада). Рассчитаем величину магнитного поля и установим характер его изменения согласно формуле (24) в случае, когда точка наблюдения лежит на оси z , проходящей через центр в направлении геомагнитного поля. В этой формуле $R(t)$ – радиус области, захваченной гидродинамическим движением к моменту времени t . Если точка наблюдения лежит вне этой области, т.е. ($r > R(t)$), то $\max(r, r') = r$ и интегральная формула (24) преобразуется к виду

$$B_z(r, t) = -\frac{2\mu_0 \sigma F}{3r^3} \Psi(t), \quad (28)$$

где функция, передающая зависимость поля от времени,

$$\Psi(t) = \int_{a(t)}^{R(t)} v(r', t) r'^3 dr' \quad (29)$$

никак не зависит от r . Это означает, что какова бы ни была зависимость $v(r', t)$, магнитное поле в точках, до которых еще не дошло гидродинамическое возмущение, спадает обратно пропорционально кубу расстояния от взрыва. Зависимость B_z от времени определяется деталями динамики начального этапа взрыва – зависимостью $v(r', t)$, радиусом газового пузыря $a(t)$ и радиусом фронта ударной волны $R(t)$. Например, для сильной ударной волны, для которой можно принять её параметры со следующими значениями (см. формулу (21))

$$v(r', t) = \frac{r}{10t}, \quad a(t) = 0, \quad R(t) = At^{2/5}, \quad A = \left(\frac{225W}{2\pi\rho_0} \right)^{1/5},$$

функция, характеризующая временную изменчивость, а именно $\Psi(t)$, записанная в виде интеграла (29), принимает здесь форму $\Psi(t) = 9Wt / 4\pi\rho_0$ и оказывается, как видно, линейной функцией времени. Если измерение магнитного поля проводится в области, уже захваченной движением водных масс ($r < R(t)$), то выражение (28) преобразуется следующим образом:

$$-\frac{3B_z(r, t)}{2\mu_0\sigma F} = \frac{1}{r^3} \int_{a(t)}^r v(r', t) r'^3 dr' + \int_r^{R(t)} v(r', t) dr'.$$

Дифференцируя его по переменной r , получим

$$-\frac{3}{2\mu_0\sigma F} \frac{\partial B_z(r, t)}{\partial r} = \frac{3}{r^4} \int_{a(t)}^r v(r', t) r'^3 dr',$$

а далее, умножая найденное выражение на r^4 и еще раз продифференцировав по r , окончательно получим связь скорости волны с магнитным полем в наиболее простой форме:

$$v(r, t) = \frac{1}{2\mu_0\sigma F} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial B_z(r, t)}{\partial r} \right).$$

Тем самым отмечаем как важный прикладной результат морской магнитной гидродинамики, что скорость гидродинамического движения может быть найдена по измерениям индуцированного магнитного поля.

Заключение

1. Учет явления самоиндукции всегда приводит к уменьшению величины индуцированного магнитного поля, т.е. величина B_{in} оказывается меньше величины B_q .
2. При малых значениях расстояния до центра взрыва ($z < 0,5$) влияние самоиндукции не существенно – различие между полями $B_{in}(\tau)$ и $B_q(\tau)$ не превышает 5 % при всех возможных значениях τ .
3. На значительных расстояниях от центра взрыва ($z > 5$) самоиндукция существенно сказывается на величине поля. В области предвестника значение поля B_{in} значительно меньше, чем значение B_q .
4. При больших значениях z величина поля B_{in} значительно медленнее приближается к предельному значению, чем поле B_q .

ЛИТЕРАТУРА

1. Альпин, Л. М. Теория поля / Л. М. Альпин. – М.: Недра, 1966. – 312 с.
2. Батыгин, В. В. Современная электродинамика. Ч. 1. Макроскопическая теория / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М.: Наука, 2003. – 736 с.
3. Гульельми, А. В. Ультранизкочастотные электромагнитные волны в коре и магнитосфере Земли / А. В. Гульельми // УФН. – 2007. – Т. 177. – № 13. – С. 1258-1276.
4. Жмур, В. В. О вариациях электромагнитных полей, индуцированных океаническими движениями синоптического масштаба / В. В. Жмур // Геомагн. и аэроном. – 1980. – Т. XX. – № 4. – С. 693-700.
5. Конторович, В. М. О магнитогидродинамическом эффекте в океане / В. М. Конторович // Докл. АН СССР. – 1961. – Сер. геофиз. – Т. 137. – № 3. – С. 576-579.
6. Коул, Р. Подводные взрывы / Р. Коул. – М.: ИИЛ, 1950. – 494 с.
7. Курант, Р. Сверхзвуковое течение и ударные волны / Р. Курант, К. Фридрихс. – М.: ИИЛ, 1950. – 426 с.
8. Лапшин, В. Б. Об использовании в океанологии электромагнитных полей, индуцированных волнами Россби / В. Б. Лапшин // Геомагн. и аэроном. – 1978. – Т. XVIII. – № 4. – С. 753-755.
9. Лейбо, А. Б. Граничные условия для характеристики электромагнитного поля и связанные заряды в движущихся жидкостях / А. Б. Лейбо // Морские электромагнитные поля. – М.: ИЗМИРАН, 1976. – С. 18-25.
10. Новожилов, Ю. В. Электродинамика / Ю. В. Новожилов, Ю. А. Яппа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
11. Положий, Г. Н. Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. – М.: Высш. шк., 1964. – 560 с.
12. Савченко, В. Н. Электромагнитные вариации морского волнения / В. Н. Савченко, В. П. Смагин, Ю. Н. Шадрин. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1985. – 176 с.
13. Савченко, В. Н. Электродинамика океана / В. Н. Савченко. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1982. – 76 с.
14. Савченко, В. Н. Вопросы морской электродинамики / В. Н. Савченко, В. П. Смагин, Г. А. Фонарев. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 1999. – 208 с.
15. Семенов, В. Ю. Возможное влияние вариаций магнитного поля Земли на движение воды в океане / В. Ю. Семёнов, Г. А. Фонарев // Геомагн. и аэроном. – 1978. – Т. XVIII. – № 5. – С. 947-948.
16. Сёмкин, С. В. Морские электромагнитные поля. Ч. III. Инфразвуковой океанический волновод, подводные взрывы / С. В. Сёмкин, В. П. Смагин, В. Н. Савченко. – СПб.: Изд-во СПб. Политехн. ун-та, 2010. – 130 с.
17. Смагин, В. П. Вариации геомагнитного поля от морских волн у берега с наклонным дном / В. П. Смагин, В. Н. Савченко // Фундаментальные проблемы морских электромагнитных исследований. – М.: ИЗМИРАН, 1979. – С. 234-240.
18. Смагин, В. П. Регистрация акустического сигнала в море электромагнитной антенной / В. П. Смагин, С. В. Сёмкин // Материалы XLVII Всерос. науч.-техн. конф. – Владивосток: Изд-во ТОВМИ, 2004. – С. 166-167.
19. Сочельников, В. В. Основы теории естественного электромагнитного поля в море / В. В. Сочельников. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 216 с.