Буренин А. А.

A. A. Burenin

К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

TO CONSTRUCTION OF THE THERMAL ELASTICITY THEORY AT THE FINAL VELOCITY OF THE HEAT EXPANSION

Буренин Анатолий Александрович – член-корреспондент Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: mail@imim.ru.

Mr. Anatoliy A. Burenin – Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: mail@imim.ru.

Аннотация. Предлагается оригинальная математическая модель термоупругости, в которой тепло распространяется с конечной скоростью. В отличие от широко распространённого обобщения закона теплопроводности Фурье, связанного с гипотезой конечного времени релаксации теплового потока, используется предположение о зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и её производных. Замечено, что на таком пути имеется возможность получить уравнение теплопроводности, включая его линейный вариант гиперболического типа.

Summary. An original mathematical model of thermoelasticity is proposed, in which heat propagates at a finite rate. In contrast to the widespread generalization of the Fourier thermal conductivity law associated with the hypothesis of a finite relaxation time of a heat flux, the assumption of the dependence of the thermal conductivity on temperature and its derivatives is used. It is noticed that on such a path it is possible to obtain the heat equation, including its linear version, of hyperbolic type.

Ключевые слова: термоупругость, гиперболическая теплопроводность, конечная скорость распространения тепла.

Key words: thermoelasticity, hyperbolic thermal conductivity, finite burning rate.

УДК 539.3

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Классическая теория теплопроводности при постоянном коэффициенте теплопроводности в законе Фурье приводит, как известно, к параболическому уравнению теплопроводности и, как следствие, к парадоксу бесконечной скорости распространения тепла. С целью исключения данного парадокса, основываясь на вполне внятной гипотезе о конечном времени релаксации теплового потока, Вернотте и Каттанео предложили обобщение закона Фурье, которое нашло многочисленных последователей. Термодинамическое обоснование этой гипотезы предпринял А. В. Лыков [5]. В рамках такого обобщения закона теплопроводности было поставлено и решено множество достаточно разных задач термомеханики [1; 8; 9; 11]. Укажем более современные публикации [4; 6; 10]. Формулировка дифференциальной зависимости между тепловым потоком и градиентом температуры приводит к недивергентным соотношениям теории и выходит за рамки классической неравновесной термодинамики [3]. Настоящей заметкой укажем возможность построения модели гиперболической теплопроводности не выходя за рамки формализма термодинамики необратимых процессов.

Полагаем, что движение термоупругой среды задаётся в системе прямоугольных декартовых координат $x_i (i = 1, 2, 3)$. Когда область деформирования не включает в себя поверхностей разрывов деформаций, имеем локальную формулировку закона сохранения энергии [2]:

$$\rho \frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$; $e = e(x_1, x_2, x_3, t)$ – плотность среды и плотность распределения внутренней энергии; q_j – компоненты вектора потока тепла, индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций.

Рассмотрим простейший случай, считая деформации e_{ij} малыми, тогда

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \varepsilon_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (2)$$

В (2) u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей перемещений точек среды.

Функцию $e(e_{ij}, s)$ можно рассматривать в качестве термодинамического потенциала [2; 7].

Однако более удобным оказывается принятие иного термодинамического потенциала $\psi = \psi(e_{ij}, T)$, называемого свободной энергией. Аргументами этих функций наряду с деформациями выступают абсолютная температура T и плотность распределения энтропии s . Законы термодинамики задают следующую связь между введёнными термодинамическими потенциалами:

$$e(e_{ij}, s) = \psi(e_{ij}, T) - sT; \quad \frac{\partial e}{\partial s} = T; \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -s. \quad (3)$$

Подстановка (2) и (3) в (1) позволяет записать уравнение

$$\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij} + \rho T \frac{ds}{dt} + a_{j,j} = 0.$$

Перепишем это уравнение в форме уравнения баланса для энтропии s [3]:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -(\rho s v_j + q_j T^{-1})_{,j} + \left\{ \sigma_{ij} - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}} \right\} \frac{\varepsilon_{ij}}{T} - \frac{1}{T^2} q_j T_{,j}. \quad (4)$$

$$\Phi = \rho_0^{-1} \psi.$$

Согласно (4) изменение энтропии в теле происходит за счёт потока энтропии, втекающего в выделенный объём, и источников энтропии. Компоненты потока энтропии

$$J_j = \rho s v_j + q_j T^{-1}$$

имеют конвективные и тепловые слагаемые. Источники энтропии в (4) связаны с необратимыми процессами теплопроводности (последнее слагаемое правой части (4)) и деформирования (предпоследнее слагаемое правой части). Введённую в (4) функцию $\Phi(e_{ij}, T)$ называют термоупругим потенциалом.

Термоупругое деформирование предполагают обратимым по определению так же, как и изотермическое упругое. Имеется в виду, что производства энтропии в таком процессе не происходит. Применительно к уравнению баланса энтропии (4) это означает, что источник энтропии в нём, связанный с деформированием среды, обязан отсутствовать. Таким способом получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}}.$$

Учитывая, что в условиях малости деформаций $\rho = \rho_0(1 + e_{kk} + \dots) = \rho_0 + \dots$, имеем окончательно

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi(e_{ij}, T)}{\partial e_{ij}}; \quad s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \quad (5)$$

Вторым следствием (4) является условие для источника энтропии, следующее из второго закона термодинамики:

$$-\frac{1}{T^2} q_j T_{,j} \geq 0. \quad (6)$$

В классической неравновесной термодинамике [9] данное требование выполняют следованием линейного закона

$$q_i = -\beta_{ij} T_{,j}. \quad (7)$$

Коэффициенты β_{ij} в (7) могут быть постоянными, зависеть от температуры и производных температуры, но с необходимостью удовлетворяют соотношениям взаимности Онзагера, то есть всегда $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Подставляя (7) в (6), получаем

$$\beta_{ij} T_{,i} T_{,j} \geq 0.$$

Следовательно, при постоянных β_{ij} эти шесть теплофизических констант обязаны удовлетворять условию положительной определённости данной квадратичной формы. В самом простейшем случае

$$\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}; \quad q_j = -\beta T_{,j}; \quad \beta > 0; \quad \beta - \text{const}. \quad (8)$$

Зависимости (8) следуют при изотропии в теплофизических свойствах сплошной среды. Пропорциональность теплового потока градиенту температуры называют законом теплопроводности Фурье, а постоянную β называют коэффициентом теплопроводности. Вместе с уравнением движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho \chi_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (9)$$

соотношения (2), (5) и (8) (или (7) для анизотропной среды) составляют замкнутую систему уравнений, если только термоупругий потенциал $\Phi = \Phi(e_{ij}, T)$ будет задан. В (9) $\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ – задаваемая плотность распределения массовых сил.

Далее, рассмотрим простейший случай линейной изотропной среды, что послужит основному предложению настоящей заметки. В этом случае термоупругий потенциал является функци-

ей инвариантов тензора деформаций, а тензор теплофизических свойств β_{ij} является шаровым, то есть следует закон теплопроводности Фурье. Принимая в качестве инвариантов тензора деформаций (это наш произвол) $I_1 = e_{kk}$ и $I_2 = e_{ij}e_{ji}$ и ограничиваясь, следуя классическому случаю, квадратичными слагаемыми по деформациям и относительной температуре θ в разложении функции $\Phi = \Phi(I_1, I_2, \theta)$ в ряд Маклорена относительно свободного состояния, запишем

$$\Phi(I_1, I_2, \theta) = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu_1 I_1 \theta - \frac{\nu_2}{\alpha} \theta^2; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (10)$$

Подстановка (1) в (5) позволяет записать следующее:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - 3\alpha K T_0 \theta) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (11)$$

Зависимости (11) называют законом Дюгамеля – Неймана [7]. В них α – коэффициент линейного расширения; $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – модуль всестороннего сжатия; λ, μ – изотермические параметры Ламе. Последнее обстоятельство следует учитывать при построении теории термоупругости, так как оно подразумевает, что тепловые процессы превалируют над деформационными, по существу, задавая последние. В задачах теплового удара это часто бывает не так. Далее, специально остановимся на этом вопросе.

Подстановка (1) в (5) приводит к следующей зависимости для плотности распределения энтропии:

$$s = \frac{\nu_1}{p_0 T_0} I_1 + \frac{\nu_2}{p_0 T_0} \theta.$$

Из уравнения баланса энтропии (4) при отбрасывании нелинейных слагаемых за счёт малости e_{ij} и θ получаем классическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \theta_{,ij} - \delta e_{mm} + \omega, \quad (12)$$

где $a = \frac{\beta}{\nu_2}$ – коэффициент температуропроводности; $\delta = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ – коэффициент связанности; ω – задаваемое распределение внутренних источников тепла.

Не вдаваясь в термомеханический смысл введённых постоянных материала (об этом можно прочитать в многочисленных учебниках), заметим только, что связанность δ часто полагают малой и таким способом переходят к несвязанной теории температурных напряжений. Уравнение (12) является классическим уравнением теплопроводности. Именно оно, будучи линейным параболическим уравнением, порождает бесконечно большую скорость в распространении тепла от начинающего действовать источника.

Избежанию данного парадоксального явления служит обобщение закона теплопроводности Фурье, предложенное Вернотте и Каттанео. Оно заключается в предположении об отказе от мгновенного установления теплового потока при возникновении градиента температуры. Постулируется следующая дифференциальная связь между тепловым потоком и градиентом температуры:

$$\tau \frac{dq_i}{dt} + q_j = -\beta T_0 \theta_{,j}. \quad (13)$$

Постоянная τ в (13), называемая временем релаксации теплового потока, имеет размерность времени и оказывается дополнительной постоянной материала. Поступая так же, как и при записи (12), то есть ограничиваясь лишь линейными слагаемыми при малых деформациях и относительной температуры θ , найдём

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0; \quad b^2 = \frac{\beta}{\tau \nu_2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) является гиперболическим (волновым) уравнением. В нём постоянная b имеет размерность скорости. Именно (14) составляет основание теории теплопроводности с конечной (в таком простейшем случае постоянной) скоростью b распространения тепла. Интерес к данному подходу в построении гиперболической теплопроводности неизменен, как отмечалось, до настоящего времени [1; 4; 6; 9; 10; 11].

Очевидно, что закон теплопроводности (13) не укладывается в формализм неравновесной термодинамики [3]. Это приводит к целому ряду неудобств; из-за этого систему уравнений не удаётся привести к дивергентному виду и записать соответствующие динамические условия совместности разрывов, несмотря на то, что поверхности разрывов температуры в этой математической модели имеют место. В настоящей заметке укажем иную возможность построения модели термоупругой среды, в которой тепло распространяется с конечной скоростью. При этом выполним требование о том, чтобы предложенная модель не выходила за рамки формализма неравновесной термодинамики. С этой целью возвратимся к закону теплопроводности Фурье (8). Коэффициент теплопроводности β в нём постоянен только при температурах, незначительно отклоняющихся от начальных, что является известным опытным фактом. Более того, он оказывается различным при разных градиентах температуры и это также часто используется в технических приложениях теории теплопроводности. Следуя принципу равноприсутствия, считаем, что он также зависит от частной производной от температуры по времени. Следовательно, полагаем

$$q_j = -\beta(\theta, \xi, \eta) \theta_{,j}, \quad (15)$$

где $\xi = (\theta_{,j} \theta_{,j})^{1/2}$; $\eta = \left| \frac{\partial \theta}{\partial t} \right| \xi^{-1}$. Здесь учтено, что коэффициент теплопроводности не может зависеть от векторной величины $\theta_{,j}$, иначе он бы менял знак в зависимости от направления вектора. Из этих же соображений при выборе параметра η поставлен знак модуля у производной θ по времени. Полагая параметры θ , ξ и η малыми, разложим функцию $\beta(\theta, \xi, \eta)$ в степенной ряд:

$$\beta(\theta, \xi, \eta) = \beta_0 (1 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \xi + \frac{2}{c} \eta + \dots). \quad (16)$$

$$\beta_0 = \beta \left|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0 \\ \eta=0}}; \quad \gamma_1 = \beta_0^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \left|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0 \\ \eta=0}}; \quad \gamma_2 = \beta_0^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \left|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0 \\ \eta=0}}; \quad 2c^{-1} = \beta_0^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \left|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0 \\ \eta=0}}.$$

С целью предельной простоты дальнейшего рассмотрим одномерный случай, когда $\theta = \theta(x = x_1, t)$. Тогда $\xi = |\theta_{,x}|$ и $\eta = \xi^{-1} |\theta_{,t}|$. Если считать, что границей теплопроводящего тела (полупространства $x \geq 0$) является плоскость $x = 0$, то при нагреве $\theta_{,x} < 0$ и $\theta_{,t} > 0$, а при остывании, наоборот, $\theta_{,x} > 0$ и $\theta_{,t} < 0$. Следовательно, в любом случае $\eta = -\theta_{,x}^{-1} \theta_{,t}$. Пренебрегая связанно-

стью процессов деформирования и теплопередачи (считая $\delta = 0$) и ограничиваясь линейными сла-
гаемыми, получаем $s = \frac{v_2}{\rho_0 T_0} \theta$; $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2\beta_0}{c} - \beta_0 \theta_{,xx}$.

Подстановка этих зависимостей в уравнение баланса энтропии $\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ приводит
к уравнению теплопроводности в форме

$$v_2 \theta_{,t} + \frac{2\beta_0}{c} \theta_{,xt} - \beta_0 \theta_{,xx} + \omega = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) относится к гиперболическому типу линейных уравнений в частных произ-
водных второго порядка. Перепишем (17) в форме волнового уравнения. Для этой цели перейдём
к новым независимым переменным $y = x$; $z = x - ct$. Уравнение теплопроводности (17) в пере-
менных y, z принимает вид

$$\theta_{,zz} - \theta_{,yy} + \frac{v_2 c}{\beta_0} \theta_{,zz} + \frac{1}{\beta_0} \omega = 0. \quad (18)$$

Постоянную c , имеющую размерность скорости, следует считать скоростью распростра-
нения тепла.

Таким образом, здесь указана только возможность построения математической модели
термоупругой среды с конечной скоростью распространения тепла, не покидая формализм нерав-
новесной термодинамики. Данная возможность поэтому принципиально отлична от широко ис-
пользуемой модели, основанной на гипотезе релаксации теплового потока (13). Дальнейшее раз-
витие предложенного подхода оставляем для заинтересованного читателя. Важным в таком разви-
тии может оказаться следующее отличие в уравнениях (14) и (18) или, что то же в законах тепло-
проводности (13) и (15): если при использовании (13) передний фронт ударного теплового воздей-
ствия связан с разрывом в температуре $[\theta] \neq 0$, то в предлагаемой модели всегда $[\theta] = 0$ и только
производные θ претерпевают разрыв на фронтальных поверхностях.

Необходимо также заметить, что математические модели, представленные выше, основаны
на построениях, использующих в качестве термодинамического потенциала плотность распреде-
ления свободной энергии $\psi(x_1, x_2, x_3, t)$. Когда механические параметры преобладают над тепло-
выми, например, в задачах ударного механического нагружения, то в качестве термодинамических
потенциалов следует использовать плотность распределения внутренней энергии $e(x_1, x_2, x_3, t)$ ли-
бо соответствующий аналог потенциала Гиббса $\gamma(\sigma_{ij}, s) = e - \sigma_{ij} e_{ij}$. В таком случае в качестве па-
раметров Ламе следует использовать их адиабатические значения, так же как и для параметров
податливости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков, В. А. К изучению свойств сильных разрывов в нелинейной термоупругой среде / В. А. Баскаков, М. С. Чирко // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевского университета, 1979. – Вып. 4. – С. 26-30.
2. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
3. Де Грот, С. Неравновесная термодинамика / С. Де Грот, П. Мазур. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
4. Кривцов, А. М. Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле / А. М. Кривцов // ДАН. – 2015. – Т. 464. – № 2. – С. 162-166.
5. Лыков, А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 638 с.

6. Мурашкин, Е. В. О сильных и слабых разрывах связанного термомеханического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2014. – Вып. 4(37). – С. 85-97.
7. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
8. Подстригач, А. В. Обобщённая термомеханика / А. В. Подстригач, Ю. М. Коляно. – М.: Киев: Наукова думка. – 1976. – 311 с.
9. Шаталов, А. Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости / А. Г. Шаталов // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевского университета, 1979. – Вып. 4. – С. 85-90.
10. Babenkov, M. B. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type / M. B. Babenkov, E. A. Ivanova // Continuum Mech. and Thermodyn. – 2013. – V. 26. – № 1. – P. 483-502.
11. Chandrasekharaiah, D. S. Thermoelasticity with Second Sound: A Review / D. S. Chandrasekharaiah // Appl. Meh. Rev. 1986. – V. 39 – № 3. – P. 335-376.