МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА MATHEMATICS AND MECHANICS

Ковтанюк Л. В., Севастьянов Г. М., Штука В. И.
L. V. Kovtanyuk, G. M. Sevastyanov, V. I. Shtuka

ОДНОМЕРНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В УСЛОВИЯХ НАГРУЗКИ, ВЫЗЫВАЮЩЕЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

ONE-DIMENSIONAL CYLINDRICAL SHOCK WAVES UNDER CONDITIONS OF STRESS CAUSING A VISCOPLASTIC FLOW

Ковтанюк Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией механики необратимого деформирования Института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток); 690041, Приморский край, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Mrs. Larisa V. Kovtanyuk – Dr. Sci. Phys. & Math., Head of Laboratory of irreversible deformation mechanics, Institute of Automation and Controlled Processes, FEB RAS (Russia, Vladivostok); 690041, Primorsky territory, Vladivostok, 5 Radio str. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Севастьянов Георгий Мамиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: akela.86@mail.ru.

Mr. Georgii M. Sevastyanov – Ph. D in Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machine Engineering and Metallurgy, FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists str. E-mail: akela.86@mail.ru.

Штука Виктор Игоревич – инженер-математик лаборатории механики необратимого деформирования Института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток); младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: onslice@mail.ru.

Mr. Victor I. Shtuka – applied mathematician, Laboratory of irreversible deformation mechanics, Institute of Automation and Controlled Processes, FEB RAS (Russia, Vladivostok); Junior Researcher in Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: onslice@mail.ru.

Аннотация. В рамках теории больших деформаций рассмотрены особенности моделирования отклика несжимаемого упруговязкопластического цилиндрического слоя с предварительными антиплоскими деформациями на существенно нестационарные граничные воздействия. Постановка задачи допускает существование и распространение расходящихся ударных волн ненулевой кривизны, поэтому представление решения за движущимися поверхностями сильных разрывов происходит при помощи нелинейного лучевого метода. Предварительное состояние слоя, определённое решением статической задачи, выбирается таким, что момент ударного нагружения совпадает с началом пластического течения на внутренней поверхности слоя. В этом случае граница области течения является ударной волной нагрузки, а следующая ударная волна круговой поляризации распространится по области, содержащей необратимые деформации, что позволило получить аналитические выражения для приближённого решения.

Summary. In the framework of the theory of finite deformations, the features of modeling the response of an incompressible elastoviscoplastic cylindrical layer with preliminary antiplane deformations to essentially nonstationary boundary effects are considered. The formulation of the problem admits the existence and propagation of divergent shock waves with nonzero curvature, therefore, the representation of the solution behind the moving surfaces of strong discontinuities occurs by means of the nonlinear ray method. The preliminary state of the layer, determined by the solution of the static problem, is chosen in such a way that the shock loading moment coincide with the onset of the plastic flow on the inner surface of the layer. In this case, the boundary of the flow region is the shock wave of the load, and the next shock wave of circular polarization will propagate along the region containing irreversible deformations, which allows obtaining analytical expressions for an approximate solution.

Ключевые слова: упруговязкопластичность, динамика, большие деформации, ударные волны, лучевой метод, численное моделирование.

Key words: elastoviscoplasticity, dynamics, finite deformations, shock waves, ray method, numerical simulation.

УДК: 539.3

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № № 18-01-00038, 17-301-50007 «мол_нр».

Введение

Высокоскоростные технологические процессы штамповки,ковки, пробивания отверстий связаны со значительными величинами прикладываемых нагрузок. Поэтому обработка материалов давлением и расчётное прогнозирование геометрии получаемых изделий является актуальной задачей, особенно когда нельзя считать необратимые деформации малыми [0]. Модель Прандтля – Рейса оказывается неприемлемой для этих целей, а учёт вязкости – необходимым, поскольку существенным оказывается влияние скорости деформирования и отклик материала на такие воздействия. Учёт упругих эффектов продиктован потребностями технологической практики, поскольку обратимые составляющие деформаций оказывают существенное влияние на уровень и распределение остаточных напряжений [9; 11]. Моделировать и прогнозировать подобные явления необходимо в одной из теорий течения. Здесь будем использовать теорию больших деформаций [0], в которой разделение полных деформаций на составляющие (обратимые и необратимые деформации) является следствием дифференциальных определений, а скорости необратимых деформаций выступают в качестве источников в соответствующих уравнениях переноса. Отметим работы [2; 13], выполненные ранее в рамках линейной теории упруговязкопластичности.

Поскольку рассматриваются существенно нестационарные процессы, связанные с ударным воздействием, необходимым оказывается использование специального математического аппарата для работы с разрывными функциями и соответствующих методик решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенный ещё в [0] и [0] (независимо друг от друга) метод лучевых рядов позволяет представлять неизвестные функции за поверхностями разрывов в виде рядов, устроенных по типу ряда Тейлора, а дополнительное разложение составляющих разрывов на ударных волнах [0] расширило данную методику и способствовало решению задач с ударными волнами, которые ранее в силу принципиальной нелинейности данного явления при помощи обыкновенного лучевого метода решать не удавалось. Описание особенностей лучевого метода содержится в подробном обзоре [0].

Определяющие соотношения и ударные волны

Модель больших деформаций [0] для изотропного несжимаемого упруговязкопластического тела представлена в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 соотношениями

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \frac{1}{2}e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj}), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\end{aligned}\tag{1}$$

где α_{ij} , e_{ij} , p_{ij} – компоненты тензоров полных деформаций Альманси обратимых и необратимых деформаций соответственно; ε_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций; u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей. Индексом после запятой обозначена производная по соот-

ветствующей пространственной координате. Определение объективной производной в уравнениях переноса (1) записано для компонент n_{ij} произвольного тензора

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}, \quad z_{ij} = A^{-1} \left(B^2 (\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + \right. \\ \left. + B(\varepsilon_{ik}e_{kl}e_{lj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{lj}) + e_{ik}\varepsilon_{kl}e_{ln}e_{nj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{ln}e_{nj} \right), \quad A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - (E_1^3 - E_3)/3, \\ B = 2 - E_1,$$

где $E_1 = s_{kk}$, $E_2 = s_{kj}s_{ji}$, $E_3 = s_{kj}s_{jk}s_{ki}$ – линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора упругих деформаций ($s_{ij} = e_{ij} - e_{ik}e_{kj}/2$).

Компоненты тензора источника необратимых деформаций в (1) отождествляются с тензором скоростей пластических деформаций ($\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$), следовательно, реологическими эффектами при упругом деформировании и при разгрузке пренебрегаем. Принимается гипотеза независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия, свободная энергия) от необратимых деформаций p_{ij} . В этом случае следствием закона сохранения энергии оказывается обобщение формулы Мурнагана для несжимаемой среды и уравнение баланса энтропии s :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} = 0, \quad (2) \\ \rho T \frac{ds}{dt} + q_{k,k} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши – Эйлера; p – функция добавочного всестороннего давления; $\rho = \text{const}$ – плотность среды.

Для определения состояния среды при её пластическом течении выберем критерий вязкопластичности Губера – Мизеса (из-за гладкости функции нагружения, а также возможности явного выражения зависимости девиатора тензора напряжений и компонент тензора скоростей необратимых деформаций):

$$f(\tau_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = (\tau_{ij} - \eta\varepsilon_{ij}^p)(\tau_{ji} - \eta\varepsilon_{ji}^p) - 8k^2/3 = 0, \quad (3) \\ \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad \varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \psi > 0,$$

где η, k – коэффициент вязкости и предел текучести. Ассоциированный закон течения (3) делает возможной явную запись следующей зависимости, которую будем использовать далее в работе:

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{\sqrt{8}k}{\sqrt{3}\tau_{kl}\tau_{lk}} \right) \frac{\tau_{ij}}{\eta}. \quad (4)$$

Данная формула при различных значениях коэффициента вязкости позволяет осуществить переход либо к упругопластической среде, либо к упругой за счёт устремления η к нулю или к бесконечности соответственно. При этом очевидно, что возрастание значений недиагональных компонент тензора напряжений приведёт к возрастанию и скоростей необратимых деформаций,

что повлияет на необратимые деформации и в целом снизит уровень напряжений. Такое поведение характерно при наличии вязкости рассматриваемой среды.

Уравнение движения имеет вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right). \quad (5)$$

Потенциал изотропной несжимаемой среды W (плотность распределения внутренней энергии) представлен разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния по инвариантам тензора деформаций

$$W(A_1, A_2) = -2\mu A_1 + b A_1^2 - \mu A_2 - a A_1^3 - (\mu - b) A_1 A_2 + \dots, \quad (6)$$

$$A_1 = \alpha_{kk}, A_2 = \alpha_{ik} \alpha_{ki},$$

где μ – модуль сдвига; a, b – модули упругости третьего порядка. Сокращение числа постоянных материала вызвано характером дальнейшего винтового деформирования, заставляющего их быть связанными между собой [0]. Компоненты вектора перемещений согласно заданной кинематике в цилиндрической системе координат r, φ, z будут иметь вид

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t), \quad (7)$$

где функция $\psi(r, t)$ – крутка (изменение угловой меры точки относительно оси z), а функция $u(r, t)$ – смещение (изменение положения точки вдоль оси z). Компоненты тензора напряжений Коши – Эйлера (2), а соответственно и уравнение движения (5) могут быть записаны как в деформациях, так и в системе функций $\{p, \psi, u\}$. В этом отношении любое из данных определений будет эквивалентным.

Описание динамических условий совместности и следствия из них для несжимаемого цилиндрического слоя с предварительными деформациями показаны в работах [0], [0] и [0]. На основании сравнительного анализа проведённых исследований было определено, что скорости поверхностей сильных разрывов в упруговязкопластической среде с точностью до малых старшего порядка совпадают со скоростями ударных волн в упругой среде, поэтому в несжимаемой упруговязкопластической среде с предварительными антиплоскими деформациями ($p_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^p = 0, e_{r\varphi} = 0, e_{rz} \neq 0$) движутся две поверхности разрывов деформаций (см. рис. 1): первая – волна нагрузки Σ_1 , вторая – волна круговой поляризации Σ_2 со скоростями

$$G_1 = c \left(1 + \chi e_{rz}^4 \left(5 + 10 c^{-1} \kappa_1 / e_{rz} + 10 (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^2 + 5 (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^3 + (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^4 \right) / 2 + \dots \right),$$

$$G_2 = c \left(1 + \chi e_{rz}^4 \left(1 + 4 c^{-1} \kappa_1 / e_{rz} + 6 (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^2 + 4 (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^3 + (c^{-1} \kappa_1 / e_{rz})^4 \right) / 2 + \dots \right), \quad (8)$$

$$\chi = 3\mu^{-1}(a - b + \mu) / 4, \quad c = \sqrt{\mu / \rho}.$$

Следствием динамического условия совместности $[\sigma_{rr}] = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_\varphi], \quad [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z]$ являются следующие свойства данных поверхностей разрывов: первая волна увеличивает предварительный сдвиг, а вторая изменяет его направленность.

Ещё одним свойством волн, распространяющихся в несжимаемом упруговязкопластическом цилиндрическом слое, является непрерывность необратимых деформаций ($[p_{ij}] = 0$) и взаимосвязь скачков скоростей с разрывами компонент обратимых деформаций $[e_{r\varphi}][v_z] - [e_{rz}][v_\varphi] = 0$,

Рис. 1. Схематическое изображение распространения ударных волн

где квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности разрыва $[f] = f^+ - f^-$ (индексы «+» и «-» соответствуют значениям функции «перед» и «за» поверхностью разрыва соответственно).

Постановка задачи и лучевой метод

Полагаем, что поведение упруговязкопластического материала определено соотношениями (1–3), (5), (6) и он заполняет собой пространство между двумя жёсткими цилиндрическими поверхностями диаметрами $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). На границах слоя выполняются условия прилипания. До момента начала нагружения ($t \leq 0$) *предварительные антиплоские деформации* определяются величиной $u_0 = u(r_0, 0)$. При последующем воздействии ($t > 0$) краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(r_0, t) &= u_0, \quad \psi(R, t) = 0, \\ \psi(r_0, t) &= \psi_1 t + \psi_2 t^2, \quad u(R, t) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и определяют скорость и ускорение крутки, инициируют распространение двух расходящихся от внутренней поверхности

слоя ударных волн. Предварительные деформации $u(r)$ полагаются такими, что краевые условия (7) обеспечивают моментальный переход слоя в состояние текучести за волной нагрузки.

Если условие пластичности (3) будет выполнено в некоторый отличный от начального момент времени $t^* > 0$, то в расчёты необходимо будет включить движущуюся границу течения (поверхность слабого разрыва), определение которой не является тривиальной задачей. Поэтому с целью упрощения и возможности получения аналитических выражений считаем, что предварительное состояние слоя обеспечивает непосредственное выполнение условия текучести (3) в момент начала скручивающего воздействия. Этого можно добиться при решении соответствующей задачи статики.

В соответствии с идеей лучевого метода запишем искомые функции за Σ_1 и за Σ_2 (области II и III см. на рис. 1) в виде лучевых рядов:

$$\begin{aligned} u^-(r, t) &= u(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \quad u(r, t) = u(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \quad \kappa_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_1}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_2}, \\ \psi^-(r, t) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \quad \eta_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_2}, \quad t_\alpha = \int_0^r G_\alpha^{-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

На Σ_1 и Σ_2 система уравнений, представляющая собой уравнение движения (5), записанное в переменных (7) с использованием понятия дельта-производной по времени [0], выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} &= -\kappa_1 \left(\frac{1}{2} \frac{c}{r} + \chi \frac{5}{8} \frac{e_{rz}^3}{c} (\kappa_2 - c^2 e_{rz,r}) \right) + \frac{1}{2} \kappa_2 + \frac{3}{2} c [p_{rz,t}] + \dots, \\
\frac{\delta \eta_1}{\delta t} &= -\eta_1 \left(\frac{3}{2} \frac{c}{r} + 2\chi \frac{e_{rz}^3}{c} (\eta_2 - c^2 e_{rz,r}) + \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{c} \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right) + \\
&+ \chi e_{rz}^2 \kappa_1 \left(3\eta_1 \left(\frac{e_{rz}}{r} + 2 \left(\frac{\kappa_2}{c^2} - e_{rz,r} \right) \right) + 2 \frac{\eta_2 e_{rz}}{c} \right) + \frac{1}{2} \frac{c}{r} [p_{r\varphi,t}] + \dots, \\
\omega_2 &= -\frac{\eta_1 \eta_2}{c e_{rz}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\kappa_1}{c e_{rz}} (1 - \chi e_{rz}^4) \right) + \dots, \quad \frac{\delta \ln G_1}{\delta t} = -\frac{\tau_1}{c} \frac{\delta [v_z]}{\delta t}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Величины скачков скоростей необратимых деформаций в (8) определяются из уравнений переноса (1) для соответствующих компонент

$$\begin{aligned}
p_{r\varphi,t} &= \varepsilon_{r\varphi}^p - (p_{rr} + p_{\varphi\varphi})(\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^p) - p_{\varphi z}(\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{rz}^p) - \dots, \\
p_{rz,t} &= \varepsilon_{rz}^p - (p_{rr} + p_{zz})(\varepsilon_{rz} - \varepsilon_{rz}^p) - p_{\varphi z}(\varepsilon_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p) - \dots.
\end{aligned} \tag{10}$$

В отношении величин $p_{r\varphi}$ и p_{rz} явно наблюдается аналогия с компонентами вектора перемещений u_i , поскольку они также являются непрерывными ($[u_i] = 0$). Представление их за ударными волнами осуществляется при помощи рядов вида

$$p_{rj}^- = p_{rj} - [p_{rj,t}]_{\Sigma_1} (t-t_1) - [p_{rj,tt}]_{\Sigma_1} (t-t_1)^2 / 2 - \dots - [p_{rj,t}]_{\Sigma_2} (t-t_2) - [p_{rj,tt}]_{\Sigma_2} (t-t_2)^2 / 2.$$

Разрешая системы (7) с учётом краевых условий (9), необратимых деформаций (4), уравнений переноса (10), записанных на ударных волнах, а также дополнительных разложений разрывов

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= (\kappa_{10} + \kappa_{11} t_1)(t-t_1) + \dots, & \kappa_2 &= \kappa_{20}(t-t_1)^2 + \dots, \\
\eta_1 &= (\eta_{10} + \eta_{11} t_2)(t-t_2) + \dots, & \eta_2 &= \eta_{20}(t-t_2)^2 + \dots,
\end{aligned}$$

получим приближённое решение задачи:

$$\kappa_{10} = -\frac{1}{2} \frac{r^2 \psi_1^2}{c e_{rz}} + \dots, \quad \kappa_{20} = -\frac{1}{2} \frac{r^2 \psi_1 \psi_2}{c e_{rz}} + \dots, \quad \eta_{10} = -\psi_1, \quad \eta_{20} = -\psi_2.$$

Для времён достижения ударными волнами определённой точки пространства в (8) справедливыми оказываются выражения

$$\begin{aligned}
t_1(r) &= \frac{r-r_0}{c(1+\chi(5e_{rz}^4+10e_{rz}^3c^{-1}\kappa_{10}+10e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}^2+5e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^3+c^{-4}\kappa_{10}^4))/2)} - \\
&- \frac{\chi\kappa_{11}(10e_{rz}^3c^{-1}+20e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}+15e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^2+4c^{-4}\kappa_{10}^3)(r-r_0)^2}{4c^2(1+\chi(5e_{rz}^4+10e_{rz}^3c^{-1}\kappa_{10}+10e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}^2+5e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^3+c^{-4}\kappa_{10}^4))/2)^3} + \dots, \\
t_2(r) &= \frac{r-r_0}{c(1+\chi(e_{rz}^4+4e_{rz}^3c^{-1}\kappa_{10}+6e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}^2+4e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^3+c^{-4}\kappa_{10}^4))/2)} - \\
&- \frac{\chi\kappa_{11}(4e_{rz}^3c^{-1}+12e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}+12e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^2+4c^{-4}\kappa_{10}^3)(r-r_0)^2}{4c^2(1+\chi(e_{rz}^4+4e_{rz}^3c^{-1}\kappa_{10}+6e_{rz}^2c^{-2}\kappa_{10}^2+4e_{rz}c^{-3}\kappa_{10}^3+c^{-4}\kappa_{10}^4))/2)^3} + \dots,
\end{aligned}$$

многоточиями в которых показаны слагаемые порядка $o(r^2)$ и не приведены здесь из-за своей громоздкости.

Заключение

В рамках теории больших деформаций получено приближённое решение задачи определения деформированного состояния в материале несжимаемого цилиндрического упруговязкопластического слоя с расходящимися ударными волнами при помощи нелинейного лучевого метода.

Наличие предварительных деформаций, а также условие достижения состояния текучести в момент начала приложения ударного воздействия позволили получить аналитические выражения для прифронтных асимптотик. Ранее подобные расчёты напряжённо-деформированного состояния проводились для упругого слоя с предварительными антиплоскими деформациями [0; 10], здесь же за счёт значительных величин прикладываемых нагрузок было исследовано влияние вязких и пластических свойств материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабичева, Л. А. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145-155.
2. Безгласный, П. А. О распространении ударных волн в упруговязкопластической среде / П. А. Безгласный, Н. Д. Вервейко // Механика твёрдого тела. – 1971. – № 5. – С. 71-76.
3. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
4. Буренин А. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – С. 129-137.
5. Буренин А. А. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя / А. А. Буренин, Г. М. Севастьянов, В. И. Штука // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9. – № 4. – С. 400-411.
6. Зволинский, Н. В. Динамика деформируемых твёрдых тел / Н. В. Зволинский, М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро // В кн.: Механика в СССР за 50 лет. – Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 291-323.
7. Ковтанюк, Л. В. Исследование цилиндрических ударных волн в упруговязкопластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов / Л. В. Ковтанюк, В. И. Штука // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2017. – № 2(32). – С. 119-135.
8. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
9. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер – М.: Наука, 1965. – 224 с.
10. Севастьянов, Г. М. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя / Г. М. Севастьянов, В. И. Штука, А. А. Буренин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2015. – № 4(26). – С. 52-60.
11. Шрамм, Г. Основы практической реологии и реометрии / Г. Шрамм; пер. с англ. И. А. Лавыгина. – М.: КолосС, 2003. – 321 с.
12. Achenbach, S. D. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media / S. D. Achenbach, D. R. Reddy // Zeitschr. fur angew. Math. und Phys., 1967. – Vol. 18. – P. 141-144.
13. Rossikhin, Yu. A. On construction of uniformly fit ray decompositions for solving dynamical problems of linear viscoelasticity / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Soviet Appl. Mech. (Engl transl). – 1991. – Vol. 27. – № 1. – P. 77-82.
14. Rossikhin, Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48. – № 1. – P. 1-39.
15. Tomas, T. Y. Plastic Flow and fracture in solids / T. Y. Tomas. – New York, London: Academic Press, 1961. – 271 p.