УДК 62-50

Минимизация линейной комбинации времени и энергетических затрат в задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела

Н. А. Стрелкова

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
strelkova@psu.ru; (342) 2 396 309

Исследуется задача гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при заданных ограничениях на вектор управляющего внешнего момента. Предполагается, что осевая составляющая угловой скорости является известной функцией времени. В качестве критерия оптимальности используется функционал качества, который характеризует в заданной пропорции расход времени и энергетических затрат. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина в аналитическом виде найдены минимальное значение функционала, оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости.

Ключевые слова: оптимальное управление; вращение твердого тела; принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-81-85

1. Постановка задачи

Уравнения управляемого вращения динамически симметричного твердого тела относительно центра масс имеют вид [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + (I-1)\omega_2\omega_3 = u_1, & \omega_1(0) = \omega_1^0, \\ \dot{\omega}_2 - (I-1)\omega_1\omega_3 = u_2, & \omega_2(0) = \omega_2^0, \\ I\dot{\omega}_3 = u_3, & \omega_3(0) = \omega_3^0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $I = \frac{J_3}{J}$, J, J_3 ($J \neq J_3$) - главные центральные моменты инерции твердого тела (J - экваториальный, J_3 - осевой моменты инерции), ω_i ($i=1,2,3$) - проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции, $u_i = \frac{M_i}{J}$, M_i ($i=1,2,3$) - управляющие моменты.

Рассматривается задача гашения экваториальной составляющей угловой скорости, в конечный момент времени $t = T$:

$$\omega_1(T) = \omega_2(T) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\omega_3(t)$ является заданной функцией времени t , а управление изменением экваториальной составляющей угловой скорости осуществляется с помощью пары поворотных (верньерных) двигателей:

$$u_1^2 + u_2^2 \leq u^0, \quad u^0 = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Оценка эффективности управления вращением твердого тела осуществляется с помощью критерия

$$J = \int_0^T [1 + k(u_1^2 + u_2^2)] dt, \quad (4)$$

где $k \geq 0$ и время перехода T не задано.

Требуется найти управляющие функции $u_1(t), u_2(t)$, удовлетворяющие соотношению (3) и доставляющие минимум функционалу (4).

2. Построение оптимального решения

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a \cos \varphi - b \sin \varphi, \\ \omega_2 &= a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad \varphi = \int_0^t (I-1) \omega_3(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

первые два уравнения системы (1) и краевые условия преобразуем к следующему виду [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{a} = u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi, \\ \dot{b} = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (6)$$

$$a(0) = \omega_1^0, \quad b(0) = \omega_2^0, \quad (7)$$

$$a(T) = b(T) = 0. \quad (8)$$

Для решения задачи (3), (4), (6)–(8) воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [3]. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\begin{aligned} H &= -1 - k(u_1^2 + u_2^2) + \\ &+ (u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) \psi_1 + \\ &+ (-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi) \psi_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где ψ_1, ψ_2 – переменные, сопряженные a и b соответственно.

Преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина (9):

$$\begin{aligned} H &= -1 + \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{4k} - \\ &- k \left[u_1 - \frac{1}{2k} (\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi) \right]^2 - \\ &- k \left[u_2 - \frac{1}{2k} (\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi) \right]^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из условия максимума функции H следует, что если

$$\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} \leq 2ku^0, \quad (11)$$

то

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{2k} (\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi), \\ u_2^* &= \frac{1}{2k} (\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi); \end{aligned} \quad (12)$$

если

$$\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} \geq 2ku^0, \quad (13)$$

то

$$\begin{aligned} u_1^* &= u^0 \frac{\psi_1 \cos \varphi - \psi_2 \sin \varphi}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}, \\ u_2^* &= u^0 \frac{\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из сопряженной системы получаем

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2. \quad (15)$$

Рассмотрим ситуацию, когда выполняется неравенство (11). Подставим выражения (15) в соотношения (12), а (12) – в правые части системы (6). Найдем решение данной системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям (7):

$$a = \frac{C_1}{2k} t + \omega_1^0, \quad b = \frac{C_2}{2k} t + \omega_2^0.$$

Учитывая условия (8), вычислим постоянные C_1, C_2 , а затем функции $a(t), b(t)$:

$$C_1 = -\frac{2k\omega_1^0}{T}, \quad C_2 = -\frac{2k\omega_2^0}{T}, \quad (16)$$

$$a = \omega_1^0 \left(-\frac{t}{T} + 1 \right), \quad b = \omega_2^0 \left(-\frac{t}{T} + 1 \right). \quad (17)$$

Так как время T окончания процесса не задано, то максимальное значение функции Гамильтона–Понтрягина H должно удовлетворять условию [4]:

$$H_{\max}(t) = H_{\max}(T) = 0. \quad (18)$$

Из (10), (12), (15), (16), (18) следует, что

$$H_{\max} = -1 + \frac{k(\omega_1^{02} + \omega_2^{02})}{T^2} = 0. \quad (19)$$

Из равенства (19) найдем время перехода из начального положения (7) в конечное положение (8):

$$T = \sqrt{k(\omega_1^{02} + \omega_2^{02})}. \quad (20)$$

Подставляя соотношения (15), (16) и (20) в неравенство (11), получаем, что

$$k \geq \frac{1}{u^{02}}. \quad (21)$$

Используя формулы (14)–(16), (20) найдем оптимальные управления u_1^*, u_2^* :

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{\omega_2^0 \sin \varphi - \omega_1^0 \cos \varphi}{\sqrt{k(\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2})}}, \\ u_2^* &= -\frac{\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi}{\sqrt{k(\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2})}}, \end{aligned} \quad (22)$$

причем

$$u_1^{*2} + u_2^{*2} = \frac{1}{k}. \quad (23)$$

Тогда

$$J = 2\sqrt{k(\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2})}. \quad (24)$$

Используя выражения (5), (17), найдем угловые скорости $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)(\omega_1^0 \cos \varphi - \omega_2^0 \sin \varphi), \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)(\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi), \end{aligned} \quad (25)$$

а затем, применяя соотношения (20), (22) и (25), получим оптимальные управления в форме синтеза

$$\begin{aligned} u_1^* &= -\frac{\omega_1}{\sqrt{k(\omega_1^2 + \omega_2^2)}}, \\ u_2^* &= -\frac{\omega_2}{\sqrt{k(\omega_1^2 + \omega_2^2)}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть теперь выполняется неравенство (13). Используя соотношения (14), (15), найдем решение системы (6), удовлетворяющее начальным условиям (7):

$$\begin{aligned} a &= \frac{u^0 C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} t + \omega_1^0, \\ b &= \frac{u^0 C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} t + \omega_2^0. \end{aligned}$$

В конечный момент времени T выполняется равенство (8). Тогда

$$-\omega_1^0 = \frac{u^0 C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} T, \quad -\omega_2^0 = \frac{u^0 C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} T.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = -\frac{\omega_1^0}{u^0 T}, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = -\frac{\omega_2^0}{u^0 T}, \quad (27)$$

а время окончания процесса равно

$$T = \frac{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}{u^0}. \quad (28)$$

При этом значении T и констант (27) функции $a(t)$, $b(t)$ и $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ имеют прежний вид (17) и (25) соответственно.

Отметим, что время T , определяемое из формулы (28), совпадает с временем оптимального по быстродействию гашения экваториальной составляющей угловой скорости [1, 2, 4].

Подставим соотношения (15), (27), (28) в (14) и найдем оптимальные управления u_1^*, u_2^* :

$$\begin{aligned} u_1^* &= u^0 \frac{\omega_2^0 \sin \varphi - \omega_1^0 \cos \varphi}{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}, \\ u_2^* &= -u^0 \frac{\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi}{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (17) выразим ω_1^0, ω_2^0 через a, b и подставим полученные выражения в (29):

$$\begin{aligned} u_1^* &= -u^0 \frac{a \cos \varphi - b \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ u_2^* &= -u^0 \frac{a \sin \varphi + b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (5) и найдем оптимальные управления в форме синтеза

$$\begin{aligned} u_1^* &= -u^0 \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \\ u_2^* &= -u^0 \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Вычислим значение функционала (4)

$$J = \left(1 + k u^{0^2}\right) \frac{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}{u^0}. \quad (31)$$

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности. Докажем, что найденное решение доставляет абсолютный минимум функционалу (4).

Введем в рассмотрение два вектора:

$$\bar{\zeta}(t) = \left(\frac{a(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}}, \frac{b(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}} \right),$$

$$\bar{v}(t) = (v_1(t), v_2(t)),$$

где

$$v_1(t) = u_1(t) \cos \varphi + u_2(t) \sin \varphi,$$

$$v_2(t) = -u_1(t) \sin \varphi + u_2(t) \cos \varphi,$$

причем $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$. Тогда, учитывая (6), получаем

$$\frac{d\sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}}{dt} = (\bar{v}(t), \bar{\zeta}(t)).$$

Проинтегрируем это уравнение и воспользуемся краевыми условиями (7), (8):

$$-\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}} = \int_0^T (\bar{v}(t), \bar{\zeta}(t)) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}} &\leq \int_0^T |(\bar{v}(t), \bar{\zeta}(t))| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t)} |\bar{\zeta}(t)| dt = \\ &= \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\omega_1^{02} + \omega_2^{02} \leq \left(\int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \right)^2. \quad (32)$$

Воспользуемся интегральным неравенством Коши–Буняковского [5]:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt.$$

Пусть $a = 0, b = T, f(t) = 1, g(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}$.

Тогда

$$\omega_1^{02} + \omega_2^{02} \leq T \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt. \quad (33)$$

Из соотношений (32), (33) получаем

$$\int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \geq \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{T}. \quad (34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T [1 + k(u_1^2 + u_2^2)] dt \geq \\ &\geq T + \frac{k}{T} (\omega_1^{02} + \omega_2^{02}). \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим конечномерную задачу оптимизации:

$$f(T) = T + \frac{k}{T} (\omega_1^{02} + \omega_2^{02}) \rightarrow \inf,$$

$$\frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0} - T \leq 0 \quad (36)$$

и для ее решения применим метод множителей Лагранжа [6]. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 \left(T + \frac{k}{T} (\omega_1^{02} + \omega_2^{02}) \right) + \lambda_1 \left(\frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0} - T \right)$$

и выпишем необходимые условия локального минимума

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left(1 - \frac{k}{T^2} (\omega_1^{02} + \omega_2^{02}) \right) - \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_0 &\geq 0, \lambda_1 \geq 0, \\ \lambda_1 \left(\frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0} - T \right) &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Так как множители Лагранжа не равны одновременно нулю, то $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\lambda_1 = 0$. Поэтому без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$.

Тогда из соотношений (37) получаем, что $T = \sqrt{k(\omega_1^{02} + \omega_2^{02})}$ при $k \geq \frac{1}{u^{02}}$ и

$$T = \frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0} \text{ при } k \leq \frac{1}{u^{02}}.$$

Из графика функции $f = f(T)$ следует, что найденные значения T являются точками абсолютного минимума в задаче (36). Тогда из соотношений (35), (36) получаем

$$J = \int_0^T [1 + k(u_1^2 + u_2^2)] dt \geq 2\sqrt{k(\omega_1^{02} + \omega_2^{02})}$$

при $k \geq \frac{1}{u^{02}}$ и

$$J = \int_0^T [1 + k(u_1^2 + u_2^2)] dt \geq \left(1 + k u^{02} \right) \frac{\sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}}{u^0}$$

при $k \leq \frac{1}{u^{02}}$.

Следовательно,

$$J_{\min} = 2\sqrt{k(\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2})}, \quad (38)$$

$$J_{\min} = \left(1 + ku^{0^2}\right) \frac{\sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}}{u^0} \quad (39)$$

при $k \geq \frac{1}{u^{0^2}}$ и $k \leq \frac{1}{u^{0^2}}$ соответственно, причем минимальные значения функционалов (38), (39) достигаются при u_1^*, u_2^* , определяемых равенствами (26), (30).

Таким образом, решение задачи гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела описывается соотношениями (22)–(26) при $k \geq \frac{1}{u^{0^2}}$ и (25), (28)–(31) при $k \leq \frac{1}{u^{0^2}}$.

При оптимальном движении управляющий момент имеет направление, противоположное направлению вектора экваториальной угловой скорости, модуль управляющего момента равен $\frac{1}{\sqrt{k}}$ при $k \geq \frac{1}{u^{0^2}}$ и равен максимальному значению u^0 при $k \leq \frac{1}{u^{0^2}}$.

В последнем случае оптимальный режим совпадает с оптимальным по быстродействию режимом гашения экваториальной составляющей угловой скорости. Время торможения и минимальное значение критерия оптимальности прямо пропорциональны модулю начального значения вектора экваториальной угловой скорости твердого тела.

Заключение

С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина получено точное аналитическое решение задачи оптимального управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела.

Определены оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости, значение функционала качества, который характеризует в заданной пропорции расход времени и энергетических затрат.

Доказано, что полученное решение представляет абсолютный минимум рассматриваемому функционалу.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
5. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. 1151 с.
6. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 256 с.

Minimizing the linear combination of time and energy costs in the optimal control problem for a dynamically symmetric rigid body rotations

N. A. Strelkova

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
strelkova@psu.ru; 8(342) 2 396 309

The paper investigates the problem of damping the angular velocity equatorial component of a dynamically symmetric solid body with given constraints on the control external moment vector. It is assumed that the angular velocity axial component is a known function of time. As an optimality criterion, the quality functional is used, which reflects the time expenditure and energy costs in a given proportion. The minimum value of the functional, optimal controls in the synthesis form, and angular velocities are analytically found using the maximum principle of L.S. Pontryagin.

Keywords: optimal control; rotation of a rigid body; minimum energy costs; Pontryagin's maximum principle.