УДК 519.2

Численное моделирование динамических систем со случайными запаздываниями

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В статье описаны как общие возможности математического пакета *Mathematica* для решения задач вероятностно-статистического направления, так и некоторые новые средства этого пакета, которые можно использовать для моделирования динамических систем с различными формами случайных запаздываний. Представлены фрагменты программ для расчетов и результаты последних.

Ключевые слова: *динамическая система; случайное обыкновенное дифференциальное уравнение; случайное запаздывание; траектории; моделирование; пакет Mathematica.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-72-80

Введение

Современные инструменты математического моделирования, наряду с иными, включают различные формы уравнений с последствием (запаздыванием, лагом): дифференциально-разностные уравнения (ДРУ), дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, уравнения с запаздыванием, нейтральные уравнения [1–7] и т. д. Реальные явления могут моделироваться системами уравнений весьма сложной структуры, в т.ч. гибридные системы дифференциальных уравнений (в обыкновенных и в частных производных) [8–10], системы с переменной структурой [11–14], включающие уравнения с последствием, содержащими несколько дискретных лагов, распределенные и случайные запаздывания и их иные комбинации.

Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) с постоян-

ным запаздыванием и, в частности, дифференциально-разностные уравнения, являются обобщениями и детерминистических уравнений с постоянным запаздыванием, и стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений [15–18].

Модели с переменным лагом являются более сложными, и, как правило, у них отсутствуют аналитические решения в замкнутой форме. Поэтому для интегрирования даже неслучайных ДРУ требуются приближенные численные процедуры, а анализ явлений с изменяющимся запаздыванием является в основном количественным. Дополнительный уровень адекватности моделей (но и усложнения тоже) можно получить, если перейти от неслучайных к стохастическим моделям.

Еще более сложными становятся модели различных процессов, в которых требуется трактовка запаздываний как случайных величин и функций. В частности, модели такого вида возникают при описании систем, меняющих свою структуру под воздействи-

ем случайных факторов. Несмотря на широкое поле приложений в физике, биологии, экономике, финансах, системах управления, технологии и др. (см. обзорную часть работ [19,20]), уравнения подобного вида недостаточно исследованы.

Чтобы решать многочисленные проблемы, необходимо строить математические модели случайных лагов, которые выбираются в форме независимых случайных величин, однородных и неоднородных, дискретных и непрерывных цепей Маркова, скрытых цепей Маркова, а также в виде более общих стационарных и нестационарных случайных процессов, в том числе и функций векторов состояния динамических систем.

Вследствие сложности задач методы исследования стохастических систем со случайными запаздываниями нетривиальны и немногочисленны. Прямые аналитические схемы анализа таких систем типа уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) [21, 22], как правило, отсутствуют, а приближенные ориентируются на исключение случайного запаздывания или полностью, или сведением к системам с неслучайным постоянным или переменным запаздыванием.

На практике целью построения численных интеграторов для СОДУ, СОДРУ и других классов стохастических уравнений [23, 24], кроме построения реализаций переходных процессов, является вычисление (после дискретизации этих уравнений) с использованием метода статистического моделирования (Монте-Карло) [25] сеточных представлений $\{\hat{x}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) множества реализаций $x(t)$ вектора состояния системы в узлах сетки, которые служат для оценки вероятностных характеристик вектора $X(t)$ на основе методов математической и прикладной статистики.

Трудности с решением задачи прямого численного моделирования различных систем со случайными запаздываниями частично могут быть сняты при использовании современных математических пакетов, таких как Maple [26], Mathematica [27], Matlab [28], Maxima [29] и др. В данной работе дан обзор как общих возможностей математического пакета Mathematica в области реше-

ния задач вероятностно-статистического направления, так и некоторые новые средства этого пакета, которые можно использовать для моделирования динамических систем с различными формами случайных запаздываний. В работе приведены примеры расчета переходных режимов, представлены фрагменты программ для таких расчетов и результаты последних.

1. Вероятность, статистика и случайные процессы в пакете Mathematica

Mathematica – коммерческая интегрированная система (пакет) компьютерной алгебры (КА), изначально задуманная С. Вольфрамом (Stephen Wolfram), разработанная собранной и руководимой им командой математиков и программистов и продаваемая его компанией Wolfram Research Inc. Mathematica – также язык программирования, реализующий наилучшим образом множественную систему взглядов и понятий на основе правил подстановок.

Появление пакета в 1988 г. оказало очень большое влияние на использование компьютеров в науке и технике. Часто говорят, что именно появление системы Mathematica, наряду с реализацией новых прорывных идей, вобравшей лучшие черты предыдущих систем КА, таких как Macsim, Reduce, SMP, Maple, открыло современную эру применения компьютерной алгебры в научных и технических вычислениях. Концепция САВ Mathematica с самого начала и навсегда была заявлена как ориентация на создание единой системы, которая могла бы отслеживать различные аспекты научно-технических расчетов логически последовательным и унифицированным способом. Ключевым интеллектуальным достижением пакета явилось создание языка компьютерной алгебры, который позволяет обрабатывать широкий спектр объектов с помощью небольшого числа базовых схем. Mathematica является ведущим программным продуктом для обработки числовых, символьных и графических данных, повсюду используемым профессионалами практически в каждой ветви научных и технических вычислений.

Среди общих групп функций пакета отметим наличие процедур, предназначенных для: аналитических преобразований; численных расчетов с произвольной точностью; решения задач алгебры, математического анализа, вычислительной математики и др.; работы с графикой и звуком; финансовых расчетов; анализа текстов; импорта и экспорта фильтров, предназначенных для различных форматов данных, изображений, видео, звука, CAD, GIS, документов и др.; разработки программного обеспечения и т.п.

Для решения задач теории вероятностей (ТВ), математической и прикладной статистики (МС, ПС), теории случайных процессов (ТСП) и последовательностей также имеется широкий набор средств, позволяющий системе *Mathematica* успешно конкурировать со специализированными статистическими пакетами, что показывает и включение пакета в *List of statistical packages* [30].

В языке пакета *Mathematica* символьные распределения и процессы используются в качестве моделей для случайных величин и случайных процессов. Эти модели, построенные на базе богатой библиотеки встроенных аналитических распределений и процессов, могут использоваться для обработки статистических данных и построения расчетных программ анализа сложных переходных процессов.

Если коротко, то множество функций (версия пакета: *Mathematica* 12), реализующих структуры ТВ, МС и ПС, включает процедуры:

- задания одномерных и многомерных непрерывных, одномерных и многомерных дискретных (соответственно 70 и 8, 20 и 6), а также специальных (9) распределений случайных величин;
- символьных и численных расчетов вероятностей событий, характеристической функции (ХФ), функции распределения (ФР) и обратной к ней, плотности вероятности (ПВ), начальных и центральных моментов, в т.ч. математического ожидания и дисперсии, среднего квадратичного отклонения (СКО), кумулянтов, медианы, коэффициента асимметрии, эксцесса, квантилей, в частности квартилей, интерквартильной широты для каждого одномерного распре-

деления;

- подобные указанным выше (с добавлением специфичных для случая многих случайных величин) для каждого многомерного распределения;
- описательной статистики;
- расчета точечных и интервальных оценок параметров распределений;
- преобразования и сглаживания экспериментальных данных;
- проверки гипотез;
- регрессионного и дисперсионного анализа, кластерного анализа, распознавания образов;
- генерирования псевдослучайных чисел (ПСЧ) по дискретным и непрерывным распределениям;
- мощной статистической графики.

Теперь остановимся на средствах работы со случайными процессами (СП). Такие процессы моделируют изменение систем во времени, причем эволюция является случайной, а не детерминированной. Ключевым моментом является то, что сечения процессов, которые близки по времени, являются зависимыми, и это должно учитываться и использоваться для моделирования, имитации и прогнозирования поведения процесса.

Основываясь на мощной символьной и численной поддержке стандартных средств, язык пакета обеспечивает целостную и всестороннюю поддержку анализа случайных процессов, включающего моделирование поведения, оценку параметров на основе статистики и вычисление вероятностей состояния в разное время. Существует дополнительная возможность исследования для специальных классов случайных процессов, таких как цепи Маркова, очереди, временные ряды и стохастические дифференциальные уравнения.

Средства пакета для работы со СП объединены в следующие (частично пересекающиеся) группы:

- 1°. Симулирование и оценка параметров (построение траекторий случайных процессов, формирование временных рядов по имеющимся данным, подгонка теоретического СП под данные, обработка статистики по СП).
- 2°. Вероятностные распределения процес-

сов (вычисление вероятностей, оценка сечений, стационарные распределения, получение условий для параметров теоретического СП, проверка правильности задания СП).

3°. Вычисление моментных характеристик СП (функции математического ожидания, ковариационной и корреляционной функций), проверка на стационарность в широком смысле.

4°. Теоретические модели случайных процессов:

- параметрические СП (с дискретным временем и дискретными состояниями; с дискретным временем и непрерывными состояниями: дискретный белый шум, составной процесс восстановления, преобразованные процессы; с непрерывным временем и дискретными состояниями; с непрерывным временем и непрерывными состояниями);

- производные СП (белый шум, преобразованные процессы; потоки событий: простой и составной процессы восстановления, составной пуассоновский процесс; процессы обслуживания);

- марковские процессы (модели марковских процессов: марковские цепи с дискретным и непрерывным временем, скрытая марковская модель; свойства: структурные, переходные и предельные состояния и др.; структура случайных процессов; проверка свойств моделей; обработка временных рядов и др.);

- процессы, описываемые СОДУ (специальные диффузионные процессы: винеровский процесс, процесс Орнштейна–Уленбека, броуновский мост, геометрическое броуновское движение, процесс Кокса–Ингерсола–Росса; общие диффузионные процессы: решение СОДУ Ито, решение СОДУ Стратоновича).

2. Стохастическая система без запаздывания

Для начала рассмотрим средства моделирования (псевдо)случайных возмущений в стохастических уравнениях. Для этого построим модель ограниченного шума [31] на основе стандартного винеровского процесса и воспользуемся следующими командами пакета *Mathematica*:

```
T = 50; h = 0.001; nt = 50000;
```

```
q1 = TransformedProcess[1 -  
0.9 Sin[t + w[t]],  
w ≈ WienerProcess[ ], t];  
Q1 = Interpolation[RandomFunction  
[q1, 0, T, h]];
```

График реализации случайной функции, обозначенной Q1, приведен на рис. 1.

Теперь оценим влияние шума рассмотренного типа на колебательную систему, описываемую уравнением Дюффинга типа:

$$\ddot{X}(t) + 2\alpha \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) + \beta X^3(t) = 4Q_2(t),$$

где α, ω, β – постоянные. Для этого предназначен следующий фрагмент программы:

```
q2 = TransformedProcess[Sin[t + w[t]],  
w ≈ WienerProcess[ ], t];  
Q2 = Interpolation[RandomFunction  
[q2, 0, T, h]];  
sol2 = NDSolve[ x1'[t] == x2[t],  
x2'[t] == -0.1 x2[t] - 4 x1[t] -  
x1[t]^3/2 + 4 Q2[t], x1[0] == 3,  
x2[0] == 1, x1[t], x2[t], t, 0, T]
```

где введены обозначения $X_1(t) = X(t)$, $X_2(t) = \dot{X}(t)$, а для численного интегрирования системы используется встроенная функция *NDSolve*. Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 2.

3. Системы с запаздыванием

Теперь рассмотрим системы с различными формами случайного запаздывания. Все они, если не считать запаздывание, являются детерминированными по форме. Поэтому, с одной стороны, ничто не может помешать использовать стандартные методы интегрирования детерминированных систем ОДУ, а с другой, наличие случайного запаздывания и его моделирования накладывает определенные ограничения, в частности, на возможность применения встроенной функция пакета *NDSolve*, предназначенной для численного интегрирования дифференциальных уравнений разных типов. Это приводит к необходимости использования пользовательских процедур. В настоящей работе из соображений простоты реализации алгоритмов применяются методы Эйлера и Хойна (= улучшенный метод Эйлера) [32] для

Рис. 1

Рис. 2

расчетов с малым постоянным шагом интегрирования. Вследствие отсутствия прямого вхождения в модели случайных процессов, модификации указанных методов для численного решения СОДУ не применяются. Вопросы качества получаемых реализаций случайных запаздываний и допустимости неучета их стохастичности на настоящем этапе исследований не рассматривались, так как цель данной работы – продемонстрировать соответствующие инструменты пакета Mathematica в действии.

Первая из рассмотренных в этом разделе систем описывается нелинейным уравнением типа Ван дер Поля–Дюффинга с гармоническим возмущением:

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) + 2\alpha [X^2(t) - 1] \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) + \\ + \beta X^3(t - \gamma t) = A \cos(2\pi\gamma t), \quad t > 0, \\ \ddot{X}(t) = c_1, \quad \dot{X}(t) = c_2, \quad t \in [t_0, 0], \end{aligned}$$

где $\alpha, \omega, \beta, A, \gamma, c_1, c_2$ – постоянные. В этом случае фрагмент программного кода для мо-

делирования будет выглядеть так:

```
T = 50; h = 0.001; nt = 50000;
t0 = -4; ntau = 4000; nnn = nt + ntau;
alpha = 0.1; w0 = 2.5; beta = 3/8;
A = 0.305; gamma = 0.05;
xx1[s_] := 1; xx2[s_] := 0.1;
xxx = Table[0, 0, nt + ntau + 1];
ttt = Table[t0 + k h, k, 0, nt + ntau];
For[ k=1, k<=ntau+1, k++, tt=ttt[[k]];
xxx[[k]] = xx1[tt], xx2[tt] ];
q3 = TransformedProcess[2 +
1.9 Sin[3 t + 2 w[t]],
w ≈ WienerProcess[ ], t];
Q3 = Interpolation[RandomFunction
[q3, 0, T, 0.001]];
rhs[tx_, yy1_, yy2_] := Block[
yy1[[2]], -2 alpha (yy1[[1]]^2 - 1)
yy1[[2]] - w0^2 yy1[[1]] - beta
yy2[[1]]^3 + A Cos[2 Pi gamma tx] ];
euler[] := Block[ff1, ff2, yy,
ff1 = rhs[ttt[[k]], xxx[[k]], xxx[[k-m]]];
xxx[[k]] + h ff1 ];
For[ k=ntau+1, k<=nt+ntau, k++,
m = Round[ Q3[ttt[[k]]]/h ];
xxx[[k + 1]] = euler[] ]
```

Рис. 3

Рис. 4

Здесь случайное запаздывание, как и в предыдущем разделе, формируется на основе винеровского процесса, а для численного интегрирования системы (после введения обозначений $X_1(t) = X(t)$, $X_2(t) = \dot{X}(t)$) используется схема Эйлера. Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 3.

Как известно, точность указанной выше схемы для детерминированных задач равна $O(h)$. Поэтому использовать ее на длинных временных промежутках не эффективно из-за необходимости применения мелкого шага. Вследствие этого в следующем примере (и далее) для анализа той же системы Ван дер Поля–Дюффинга применяется схема Хойна. Случайное запаздывание, как и в предыдущем примере, формируется на основе винеровского процесса, а для моделирования применяется следующий фрагмент программного кода (показаны только отличия от предыдущего фрагмента):

```
T=100; h=0.001; nt=100000;
...
q4 = TransformedProcess[2 +
1.9 Sin[3 t + 2 w[t]],
w ≈ WienerProcess[ ], t];
Q4 = Interpolation[RandomFunction
[q4, 0, T, 0.001]];
...
heun[] := Block[ff1, ff2, yy,
ff1 = rhs[ttt[[k]], xxx[[k]], xxx[[k-m]]];
yy = xxx[[k]] + h ff1;
ff2 = rhs[ttt[[k+1]], yy, xxx[[k-m+1]]];
xxx[[k]] + h/2 (ff1 + ff2) ];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q4[ttt[[k]]]/h];
xxx[[k + 1]] = heun[] ];
```

Графики реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приведены на рис. 4.

Теперь рассмотрим варианты формирования случайных запаздываний на основе использования случайных процессов с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. В качестве таких процессов были выбраны телеграфный (ТГП) и про-

Рис. 5

Рис. 6

стейший пуассоновский (ППП) процессы, а также цепь Маркова с тремя состояниями (ЦМЗ). Пример реализации первого из этих процессов приведен на рис. 5.

В процессе расчетов параметры процессов выбирались так, чтобы для ТГМ запаздывание принимало значения 2 и 4, а для ППП и ЦМЗ – 1, 2 и 3. Для этого применялся следующий фрагмент программного кода (показаны только отличия от предыдущего фрагмента в этом разделе):

```
T=50; h=0.001; nt=50000;
...
q5 = TelegraphProcess[2/3];
QQ = 3+RandomFunction[q5,0,T,h];
Q5 = Interpolation[QQ["Path"],
InterpolationOrder -> 0];
q6 = TransformedProcess[1+Mod[p[t],3],
p ≈ PoissonProcess[3/4], t];
Q6 = Interpolation[
RandomFunction[q6, 0, T, h],
InterpolationOrder -> 0];
q7 = ContinuousMarkovProcess[1,0,0,
-2,1/2,3/2,1/2,-1,1/2,1/2,1,-3/2];
```

```
Q7 = Interpolation[
RandomFunction[q7, 0, T],
InterpolationOrder -> 0];
...
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q5[ttt[[k]]]/h];
xxx[[k + 1]] = heun[ ]];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q6[ttt[[k]]]/h];
xxx[[k + 1]] = heun[ ]];
For[ k = ntau + 1, k <= nnn, k++,
m = Round[ Q7[ttt[[k]]]/h];
xxx[[k + 1]] = heun[ ]];
```

Результаты расчетов для запаздываний как функций ТГР, ППП и ЦМЗ отображены на рис. 6–8, где показано поведение реализаций случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Заключение

В работе были представлены некоторые результаты моделирования устойчивых почти регулярных переходных режимов в уравнении Ван дер Поля–Дюффинга с различными типами случайного запаздывания,

Рис. 7

Рис. 8

полученные с использованием стандартных средств описания стохастических процессов в среде пакета **Mathematica**. Последующая работа в данном направлении позволит проанализировать хаотические режимы, возбуждаемые в подобных системах, в т.ч. в присутствии случайных внешних и/или параметрических шумов.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Разматулина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Breda D., Maset S., Vermiglio R. Stability of linear delay differential equations: A numerical approach with MATLAB. New York: Springer, 2015. XI+158 p.
3. Erneux T. Applied delay differential equations. New York: Springer, 2009. XII+204 p.
4. Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhäuser, 2014. XVIII+362 p.
5. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X+447 p.
6. Lakshmanan M., Senthilkumar D.V. Dynamics of nonlinear time-delay systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. XVII+313 p.
7. Smith H. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer, 2011. XI+172 p.
8. Alwan M.S., Liu X. Theory of hybrid systems: Deterministic and stochastic. Singapore, Beijing: Springer Nature Pte Ltd. and Higher Education Press, 2018. XVI+241 p.
9. Stochastic hybrid Systems / Ch.G. Cassandras, J. Lygeros (eds). Boca Raton: Taylor & Francis Group/CRC Press, 2006. 304 p.
10. Stochastic hybrid systems: Theory and safety critical applications / H.A.P. Blom, J. Lygeros (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. XIV+395 p.
11. Бухалев В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скач-

- кообразной структурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996. 288 с.
12. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980. 384 с.
 13. Rauh A., Senkel L. (eds.) Variable-structure approaches: Analysis, simulation, robust control and estimation of uncertain dynamic processes. Cham: Springer, 2016. X+ 361 p.
 14. Yu X., Xu J.-X. (eds.) Variable structure systems: Towards the 21st century. Berlin: Springer, 2002. X+418 p.
 15. Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.
 16. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
 17. Mao X. Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII+422 p.
 18. Mohammed S.E.A. Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. IX+245 p.
 19. Полосков И.Е. Некоторые классы дифференциальных систем со случайными запаздываниями и методы их исследования // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 3 (30). С. 19–36.
 20. Полосков И.Е. Стохастические дифференциальные системы со случайными запаздываниями в форме дискретных цепей Маркова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 4. С. 501–516.
 21. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 486 с.
 22. Полосков И.Е. Стохастический анализ динамических систем: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
 23. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. XXX+786 с.
 24. Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin: Springer, 2010. XXVIII+856 p.
 25. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; К.: BHV, 2004. 847 с.
 26. Heck A. Introduction to Maple. – 3d ed. – New York: Springer, 2003. – 828 p.
 27. Mangano S. Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.
 28. Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P. Scientific computing with MATLAB and Octave. Heidelberg, Dordrecht: Springer, 2010. XVI+360 p.
 29. <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima.html> (Дата обращения: 01.08.2019)
 30. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_statistical_packages (Дата обращения: 01.08.2019)
 31. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
 32. Калиткин Н.Н. Численные методы. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

Numerical modeling of dynamical systems with random delays

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
 polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

The article describes both the general capabilities of the mathematical package **Mathematica** for solving probabilistic-statistical problems as well as some new tools of this package that can be used to model dynamical systems with various forms of random delays. Fragments of programs for calculations and results of the lasts are presented.

Keywords: *dynamical system; stochastic ordinary differential equation; random delay; trajectory; modeling; package Mathematica.*