УДК 531.01+004.94

Матричные уравнения движения систем твердых тел в гамильтоновых переменных. Системы со структурой дерева

В. Н. Иванов

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
prescol@psu.ru; 8(342) 2-396-560

Работа посвящена разработке методов компьютерного моделирования динамики сложных механических систем. Представлена новая матричная форма уравнений движения систем абсолютно твердых тел со структурой дерева. Рассмотрен случай голономных связей. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих положение и распределение скоростей тел системы в пространстве, выбраны обобщенные координаты и переменные, имеющие размерность импульсов. Особенность системы уравнений состоит в том, что она разрешена относительно производных обобщенных импульсов и не содержит реакций связей. Приведен вывод предлагаемой формы уравнений движения из принципа Гамильтона–Остроградского с использованием матрично-геометрического подхода. Получены рекуррентные формулы для определения всех кинематических и динамических переменных, входящих в уравнения. На примере механической системы с шестью степенями свободы продемонстрированы все этапы подготовки первичной информации и составления уравнений движения в предлагаемой форме.

Ключевые слова: система абсолютно твердых тел; уравнения движения; динамика; математическое моделирование; обобщенные координаты; импульсы Пуассона; матрично-геометрический метод.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-38-46

Введение

Компьютерное моделирование динамики механических систем широко используется в инженерной практике. Оно позволяет уменьшить объем натурных испытаний, сократить время и стоимость новых разработок. Поэтому разработка новых методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования сложных технических систем, является актуальной задачей. В настоящей работе выводится новая форма уравнений движения систем связанных твердых тел (СТТ) со структурой дерева с использованием квазискоростей, обобщенных координат и обобщенных импульсов (импульсов Пуассона).

1. Описание механической системы

Рассмотрим систему связанных абсолютно твердых тел со структурой дерева. Будем предполагать, что кинематические связи, реализуемые в шарнирах, голономны и идеальны.

Пусть N – число тел и шарниров в системе. С каждым i -м телом ($i = \overline{1, N}$) свяжем прямоугольную декартову систему координат (СК) $O_i x_i y_i z_i$ с началом в произвольной точке O_i i -го тела (рис. 1).

Кинематика отдельного тела системы

Введем обозначения:

r_i^0 – радиус-вектор или матрица-столбец координат точки O_i в абсолютной СК $Oxyz$; r_i – вектор r_i^0 в проекциях на оси i -й СК; G_i^0 – матрица, столбцами которой являются координаты единичных базисных векторов i -й СК в абсолютной СК (матрица преобразования координат из i -й СК в абсолютную или матрица направляющих косинусов); G_0^i – матрица преобразования координат из абсолютной в i -ю СК.

Матрица G_i^0 – ортогональна:
 $G_0^i G_i^0 = G_i^0 G_0^i = E$ и $(G_0^i)^T = (G_i^0)^{-1} = G_i^0$.
 Векторы r_i^0 и r_i связаны соотношением
 $r_i = G_0^i r_i^0$.

Введем векторы (матрицы-столбцы) обобщенных координат $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^{n_i})^T$, параметризующих уравнения связей, ограничивающих движения в i -м шарнира, n_i – число обобщенных координат. Обозначим через $q = \text{col}(q_1, \dots, q_N)$ вектор всех обобщенных координат системы. Вектор r_i^0 и матрица G_i^0 являются функциями обобщенных координат и времени:

$$r_i^0 = r_i^0(q, t), \quad G_i^0 = G_i^0(q, t).$$

Рис. 1

Обозначим через v_i^0 – вектор скорости точки O_i в абсолютной СК; v_i – вектор v_i^0 в проекциях на оси i -й СК; ω_i^0 – вектор угловой скорости i -го тела в абсолютной СК; ω_i – вектор ω_i^0 в проекциях на оси i -й СК.

Получим формулы, связывающие векторы абсолютных скоростей v_i и ω_i с вектором обобщенных скоростей $\dot{q}$, если известны функции $r_i^0(q, t)$ и $G_i^0(q, t)$.

Для линейной скорости v_i справедлива следующая последовательность преобразований:

$$v_i = G_0^i v_i^0 = G_0^i \dot{r}_i^0 = G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial q^T} \dot{q} + G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial t}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$v_i = \dot{r}_i^* + \omega_i \times r_i = (G_0^i r_i^0)^* + \tilde{\omega}_i (G_0^i r_i^0) = \dot{G}_0^i r_i^0 + G_0^i \dot{r}_i^0 + \tilde{\omega}_i G_0^i r_i^0,$$

где символом "звездочка" отмечена локальная производная в i -й СК, $\tilde{\omega}_i$ – кососимметрическая матрица векторного произведения:

$$\tilde{\omega}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{i3} & \omega_{i2} \\ \omega_{i3} & 0 & -\omega_{i1} \\ -\omega_{i2} & \omega_{i1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя формула для скорости v_i должна совпадать с формулой (1) при любых значениях r_i^0 . Отсюда следует, что

$$\dot{G}_0^i + \tilde{\omega}_i G_0^i = 0, \quad \dot{G}_0^i = -\tilde{\omega}_i G_0^i = \tilde{\omega}_i^T G_0^i \text{ и}$$

$$\tilde{\omega}_i = -\dot{G}_0^i (G_0^i)^T = G_0^i (\dot{G}_0^i)^T.$$

Последнее равенство используем для установления связи между вектором угловой скорости ω_i и вектором обобщенных скоростей $\dot{q}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i &= G_0^i (\dot{G}_0^i)^T = G_0^i \left(\frac{\partial G_0^i}{\partial q^T} \dot{q} \right)^T + G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial t} = \\ &= G_0^i \dot{q}^T \left(\frac{\partial G_0^i}{\partial q^T} \right)^T + G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial t} = \\ &= G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial q^T} \dot{q} + G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$B_i^v = G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial q^T}, \quad \varphi_i^v = G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial t}, \quad \tilde{b}_{i1}^\omega = G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial q_1}, \quad (3)$$

$$B_i^\omega = (b_{i1}^\omega \ b_{i2}^\omega \ \dots), \quad \tilde{\varphi}_i^\omega = G_0^i \frac{\partial (G_0^i)^T}{\partial t} = G_0^i \frac{\partial G_i^0}{\partial t}.$$

Тогда, в соответствии с формулами (2) и (3), шестимерный вектор линейных и угловых скоростей i -го тела $v_i = \text{col}(v_i, \omega_i)$ можно вычислить через обобщенные координаты и скорости системы по формуле

$$v_i = \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_i^v \\ B_i^\omega \end{pmatrix} \dot{q} + \begin{pmatrix} \varphi_i^v \\ \tilde{\varphi}_i^\omega \end{pmatrix} = B_i \dot{q} + \varphi_i. \quad (4)$$

Объединяя формулы (4) для всех тел системы, получим окончательно формулу связи вектора абсолютных скоростей $v = \text{col}(v_1, \dots, v_N)$ и вектора $\dot{q}$:

$$v = B \dot{q} + \varphi, \quad (5)$$

где $B = \text{col}(B_1, \dots, B_N)$ – матрица касательного локального базиса пространства возможных перемещений всех тел системы, $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ – вектор явно зависящих от времени компонент вектора скоростей v .

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства кососимметрической матрицы векторного произведения. Для произвольных векторов a и b [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^T &= -\tilde{a}, \quad \tilde{a}^T b = -\tilde{b}a, \quad \tilde{a}\tilde{b} = ba^T - a^T bE, \\ \tilde{a} + b &= \tilde{a} + \tilde{b}, \quad \tilde{a}\tilde{b} = ba^T - ab^T, \quad \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того

$$\tilde{\omega}_i r_i = \omega_i \times r_i = G_0^i (\omega_i^0 \times G_i^0 r_i) = G_0^i \tilde{\omega}_i^0 G_i^0 r_i,$$

т.е. кососимметрическая матрица $\tilde{\omega}_i$ преобразуется при смене базиса как матрица линейного оператора:

$$\tilde{\omega}_i = G_0^i \tilde{\omega}_i^0 G_i^0. \quad (7)$$

Продифференцируем по времени матрицу B . С учетом свойств (6) производные по времени от столбцов b_{il}^v и b_{il}^ω матриц B_i^v и B_i^ω можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{il}^v &= \frac{d}{dt} \left(G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial q_l} \right) = \dot{G}_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial q_l} + G_0^i \frac{\partial \dot{r}_i^0}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i G_0^i \frac{\partial r_i^0}{\partial q_l} + G_0^i \frac{\partial G_i^0 v_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^v + G_0^i \frac{\partial G_i^0}{\partial q_l} v_i + G_0^i G_i^0 \frac{\partial v_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^v + \tilde{b}_{il}^\omega v_i + \frac{\partial v_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^v - \tilde{v}_i b_{il}^\omega + \frac{\partial v_i}{\partial q_l}, \\ \dot{b}_{il}^\omega &= \frac{d}{dt} \left(G_0^i \frac{\partial G_i^0}{\partial q_l} \right) = -\tilde{\omega}_i G_0^i \frac{\partial G_i^0}{\partial q_l} + G_0^i \frac{\partial \dot{G}_i^0}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^\omega + G_0^i \frac{\partial G_i^0 \tilde{\omega}_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^\omega + G_0^i \frac{\partial G_i^0}{\partial q_l} \tilde{\omega}_i + G_0^i G_i^0 \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^\omega + \tilde{b}_{il}^\omega \tilde{\omega}_i + \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial q_l} = \\ &= -\tilde{\omega}_i b_{il}^\omega + \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial q_l}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \dot{B}_i^v &= -\tilde{\omega}_i B_i^v - \tilde{v}_i B_i^\omega + \frac{\partial v_i}{\partial q^T}, \\ \dot{B}_i^\omega &= -\tilde{\omega}_i B_i^\omega + \frac{\partial \omega_i}{\partial q^T}. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (8) частные производные по обобщенным координатам необходимо вычислять после подстановки вместо скоростей v_i и ω_i их выражений из соотношений (4).

Определим матрицы:

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \Omega = \text{diag}(\Omega_1, \dots, \Omega_N).$$

Объединяя формулы (8), окончательно построим формулы дифференцирования матриц B_i и B :

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &= \Omega_i^T B_i + \frac{\partial v_i}{\partial q^T}, \\ \dot{B} &= \Omega^T B + \frac{\partial v}{\partial q^T}, \end{aligned} \quad (9)$$

где при вычислении частных производных вместо векторов v_i и v подставляются их выражения по формулам (4) и (5).

Кинематика всей системы

Пронумеруем тела и шарниры таким образом, чтобы для любого тела или шарнира в графе системы номер предшествующего ему тела или шарнира был меньше. В этом случае для полного описания структуры взаимосвязей тел в системе достаточно одного целочисленного массива $k = \{k_1, \dots, k_N\}$, на i -м месте которого расположен индекс тела или шарнира, предшествующего i -му. С каждым телом системы свяжем следующие множества: P_i – упорядоченное множество индексов шарниров, составляющих путь между нулевым и i -м телами; U_i – множество индексов шарниров, для которых i -е тело является предшествующим.

Введем следующие обозначения: ρ_i – матрица-столбец координат начала СК, связанной с i -м телом, в k_i -й СК; G_i^j – матрица, столбцами которой являются координаты единичных базисных векторов i -й СК в j -й СК (матрица преобразования координат из i -й в j -ю СК). Пусть $G_i = G_{k_i}^i$.

Вектор ρ_i и матрица G_i являются функциями обобщенных координат только i -го шарнира:

$$\rho_i = \rho_i(q_i, t), \quad G_i = G_i(q_i, t).$$

Введенные выше матрицы r_i и G_0^i связаны с матрицами ρ_i и G_i рекуррентными формулами (рис. 2):

$$r_i = G_i(r_{k_i} + \rho_i), \quad G_0^i = G_i G_0^{k_i}.$$

Принимая движение i -го тела за относительное, а предшествующего ему k_i -го тела за переносное, в соответствии с правилом сложения скоростей можно записать рекуррентные формулы для вычисления проекций линейной v_i и угловой ω_i скоростей тел механической системы на оси i -й СК:

$$v_i = G_i(v_{k_i} + \omega_{k_i} \times \rho_i + \rho_i^*),$$

$$\omega_i = G_i \omega_{k_i} + \omega_i^r$$

или в шестимерном виде

$$v_i = C_i v_{k_i} + A_i \dot{q}_i + v_i^r, \quad (10)$$

где $v_i = \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix}$, $v_i^r = \begin{pmatrix} v_i^r \\ \omega_i^r \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^v & \dots & a_{in_i}^v \\ a_{i1}^\omega & \dots & a_{in_i}^\omega \end{pmatrix}$,

$$a_{ij}^v = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_i^j}, \quad v_i^r = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t}, \quad \tilde{a}_{ij}^\omega = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial q_i^j},$$

$$\tilde{\omega}_i^r = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial t}, \quad j = \overline{1, n_i}, \quad C_i = \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix}.$$

Рис. 2

Введем блочную $6N \times 6N$ -матрицу S с квадратными подматрицами порядка 6 по следующей формуле:

$$S_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ -C_i, & j = k_i, \quad i, j = \overline{1, N}, \\ 0_{6 \times 6}, & j \neq i \vee k_i, \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что для любой кинематической структуры эта матрица содержит в каждой строке только два ненулевых блока E_6 и $-C_i$. Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре системы, так и об относительном положении тел, ее называют *матрицей кинематической структуры*. С использованием матрицы S уравнения кинематики системы тел (10) можно записать компактно следующим образом:

$$S v = A \dot{q} + v^r, \quad (12)$$

где $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N)$, $v^r = \text{col}(v_1^r, \dots, v_N^r)$.

Рекуррентные формулы (12) можно записать в виде явных выражений

$$v = T(A \dot{q} + v^r), \quad (13)$$

где обратная к S матрица $T = S^{-1}$ является блочной $6N \times 6N$ -матрицей, подматрицы которой могут быть вычислены в соответствии с (10) по рекуррентным формулам:

$$T_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ C_i T_{k_i, j}, & j \in P_{k_i}, \quad i, j = \overline{1, N}, \\ 0_{6 \times 6}, & j \notin P_i, \end{cases} \quad (14)$$

Сравнивая формулы (5) и (13), приходим к заключению, что

$$B = TA, \quad \varphi = T v^r. \quad (15)$$

Из равенств (14) следует интересное соотношение:

$$\begin{aligned} \dot{B} - \Omega^T B &= T(\dot{A} - \Omega^T A) \quad \text{или} \\ S(\dot{B} - \Omega^T B) &= \dot{A} - \Omega^T A. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) доказывает следующая последовательность преобразований:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{d}{dt}(TA) = \dot{T}A + T\dot{A} = \Omega^T TA - T\Omega^T A + T\dot{A} = \\ &= \Omega^T B + T(-\Omega^T A + \dot{A}). \end{aligned}$$

Заметим, что в левой части равенства (16) полная производная по времени $\dot{B}$ включает в себя частные производные по всем обобщенным координатам, а в правой части – матрица $\dot{A}$ содержит только частные производные по обобщенным координатам i -го шарнира.

Применим соотношения (9) и (16) для дифференцирования рекуррентных соотношений (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A \dot{q} + v^r - S v)^T}{\partial q} &= \frac{\partial (S(B \dot{q} + \varphi - v))^T}{\partial q} = \\ &= \frac{\partial (B \dot{q} + \varphi - v)^T}{\partial q} S^T + (B \dot{q} + \varphi - v)^T \frac{\partial S^T}{\partial q} = \\ &= (\dot{B} - \Omega^T B)^T S^T = \dot{A}^T - A^T \Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Определим теперь, как вычислить полные производные по времени матриц C_i , S и T без явного дифференцирования с использованием уже введенных матриц. Для этого продelaем предварительные выкладки. Матрица C_i включает в себя блоки G_i и $G_i \tilde{\rho}_i$. Вычислим $\dot{G}_i$ и $d(-G_i \tilde{\rho}_i)/dt$, используя описанные выше свойства кососимметрических матриц:

$$\begin{aligned} \dot{G}_i &= \frac{d}{dt}(G_0^i G_{k_i}^0) = \dot{G}_0^i G_{k_i}^0 + G_0^i \dot{G}_{k_i}^0 = \\ &= -\tilde{\omega}_i G_0^i G_{k_i}^0 + G_0^i \tilde{\omega}_{k_i} = \\ &= -\tilde{\omega}_i G_i + G_i \tilde{\omega}_{k_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-G_i \tilde{\rho}_i) &= -\dot{G}_i \tilde{\rho}_i - G_i \tilde{\rho}_i^* = (\tilde{\omega}_i G_i - G_i \tilde{\omega}_{k_i}) \tilde{\rho}_i - \\ &- G_i \left(\left(\tilde{G}_i^T v_i \right) - \tilde{v}_{k_i} - \left(\tilde{\omega}_{k_i} \rho_i \right) \right) = \tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i - G_i \tilde{\omega}_{k_i} \tilde{\rho}_i - \\ &- G_i G_i^T \tilde{v}_i G_i + G_i \tilde{v}_{k_i} + G_i \left(\tilde{\omega}_{k_i} \rho_i \right) = \\ &\tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i G_i - G_i \tilde{\rho}_i \tilde{\omega}_{k_i} + G_i \tilde{v}_{k_i}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в матрицу $\dot{C}_i$, получим

$$\dot{C}_i = \Omega_i^T C_i - C_i \Omega_{k_i}^T. \quad (18)$$

Используя (18) легко убедиться, что производные матриц S и T вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \Omega^T S - S \Omega^T, \\ \dot{T} &= -T \dot{S} T = \Omega^T T - T \Omega^T. \end{aligned} \quad (19)$$

2. Уравнения движения СТГ со структурой дерева в гамильтоновых переменных

Пусть m_i – масса i -го тела; J_i – тензор инерции i -го тела; r_i^c – радиус-вектор центра масс i -го тела в связанной с ним СК; f_i^o , m_i^o – главный вектор и главный момент активных сил, действующих на i -е тело, заданные в i -й СК; Q – матрица-столбец обобщенных сил.

Введем обозначения:

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{r}_i^c \\ m_i \tilde{r}_i^c & J_i \end{pmatrix}, \quad M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N),$$

$$F_i = \text{col}(f_i^o, m_i^o), \quad F = \text{col}(F_1, \dots, F_N).$$

Кинетическая энергия T и обобщенные силы Q задаются выражениями [2]:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + m_i (\tilde{v}_i \omega_i)^T r_i^c + \frac{1}{2} \omega_i^T J_i \omega_i, \\ F_i^\Sigma &= F_i + \sum_{j \in U_i} C_j^T F_j^\Sigma, \quad Q_i = A_i^T F_i^\Sigma, \\ T &= \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} v^T M v, \\ Q &= \text{col}(Q_1, \dots, Q_N) = A^T T^T F. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения движения выведем из обобщенного принципа Гамильтона–Остроградского [2]. Кинематические связи (11) учтем методом Лагранжа. Вектор множителей Лагранжа обозначим μ . Выпишем и преобразуем вариацию действия по Гамильтону:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \delta T + Q^T \delta q + \delta \left(\mu^T (A \dot{q} + v^r - S v) \right) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \delta \left(v^T M v \right) + Q^T \delta q + \delta \mu^T \left(A \dot{q} + v^r - S v \right) + \\ &\quad + \delta \left(A \dot{q} + v^r - S v \right)^T \mu dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta v^T (M v) + \delta q^T Q + \delta \mu^T \left(A \dot{q} + v^r - S v \right) + \\ &\quad + \delta q^T \frac{\partial \left(A \dot{q} + v^r - S v \right)^T}{\partial q} \mu + \delta \dot{q}^T \left(A^T \mu \right) - \\ &\quad - \delta v^T \left(S^T \mu \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Введем новую векторную переменную

$$p = A^T \mu. \quad (20)$$

Интегрируя слагаемое $\delta \dot{q}^T p$ по частям, чтобы перейти от вариации вектора скорости к вариации вектора обобщенных координат, и используя формулу (17), приведем вариацию δH к виду:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} \delta v^T (M v - S^T \mu) + \delta \mu^T \left(A \dot{q} + v^r - \right. \\ &\quad \left. - S v \right) + \delta q^T \left(Q - \dot{p} + \left(\dot{A}^T - A^T \Omega \right) \mu \right) dt = 0. \end{aligned}$$

На действительной траектории вариация действия по Гамильтону δH равна нулю. Коэффициенты перед вариациями множителей Лагранжа $\delta \mu$ равны нулю, так как являются кинематическими уравнениями (11), коэффициенты перед вариациями декартовых скоростей δv можно обнулить выбором множителей Лагранжа μ , так как их число совпадает с числом соответствующих коэффициентов. Оставшиеся вариации обобщенных координат δq являются линейно независимыми, поэтому вариация δH будет равна нулю тогда, когда каждый коэффициент перед δq будет равен нулю.

В результате получаем следующую замкнутую систему дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих динамику СТГ со структурой дерева:

$$\begin{cases} M v - S^T \mu = 0, \\ -S v + A \dot{q} = -v^r, \\ A^T \mu = p, \end{cases} \quad (21)$$

$$\dot{p} = \left(\dot{A}^T - A^T \Omega \right) \mu + Q. \quad (22)$$

В дальнейшем покажем, что вектор p , определяемый формулой (20), есть вектор обобщенных импульсов, а вектор множителей Лагранжа μ – это вектор декартовых импульсов составных тел при замороженных связях.

Особенность уравнений (21), (22) состоит в том, что они разрешены относительно производных обобщенных импульсов $\dot{p}$. Первые три уравнения (21) образуют линейную систему с симметричной, блочной трехдиагональной разреженной матрицей коэффициентов относительно скоростей v , $\dot{q}$ и переменных μ .

Уравнения (21), (22) для цепочки твердых тел впервые были выведены в координатной форме в работе [4]. В работе [5] эти уравнения были представлены в координатной форме для систем твердых тел со структурой дерева. Вывод уравнений (21), (22) из уравнений движения в квазискоростях Эйлера–Лагранжа можно найти в работе [6].

3. Механический смысл выведенных уравнений

Покажем взаимосвязь уравнений (21), (22) и уравнений Гамильтона.

Известно [3], что уравнения Гамильтона можно выписать, используя функцию Гамильтона $H = p^T \dot{q} - T + \Pi$ или функцию Пуассона $\tilde{T} = p^T \dot{q} - T$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p}, \quad (23)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

или в общем случае

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q} + Q, \quad (24)$$

где Π – потенциальная энергия.

Из первого уравнения системы (21) следует, что вектор множителей Лагранжа

$$\mu = \text{col}(\mu_1, \dots, \mu_N)$$

определяется формулой

$$\mu = T^T M v = T^T M (B \dot{q} + \varphi). \quad (25)$$

То есть i -я компонента вектора μ есть декартовый импульс составного тела, содержащего i -е тело и все его дочерние тела при замороженных связях:

$$\mu_i^\Sigma = M_i v_i + \sum_{j \in U_i} C_j^T \mu_j^\Sigma.$$

Из формул (20) и (25) следует, что

$$p = A^T \mu = B^T M (B \dot{q} + \varphi) = A^T T^T M T (A \dot{q} + v^r). \quad (26)$$

Запишем выражение кинетической энергии в обобщенных скоростях:

$$T = \frac{1}{2} v^T M v = \frac{1}{2} (B \dot{q} + \varphi)^T M (B \dot{q} + \varphi). \quad (27)$$

Обобщенный импульс или импульс Пуассона [3] есть частная производная от кинетической энергии (27) по обобщенной скорости:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = B^T M (B \dot{q} + \varphi). \quad (28)$$

Сравнивая выражения (24) и (28) приходим к выводу, что вектор p , входящий в уравнения (21), (22), есть вектор обобщенных импульсов, а пара координат $\{q, p\}$ есть переменные Гамильтона.

Выпишем теперь явный матричный вид уравнений движения СТТ в форме уравнений Лагранжа второго рода, используя формулы (9), (16), (25) и (28):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + Q = \frac{\partial v^T}{\partial q} M v + Q = \\ &= (\dot{B}^T - \Omega B^T) M v + Q = \\ &= (\dot{A}^T - \Omega A^T) T^T M v + Q = \\ &= (\dot{A}^T - \Omega A^T) \mu + Q. \end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что уравнение (22) – это уравнение Лагранжа второго рода, записанное относительно производной обобщенного импульса $\dot{p}$ или, другими словами, это уравнение Гамильтона для $\dot{p}$, в котором в правой части не выполнен переход от обобщенных скоростей $\dot{q}$ к импульсам p .

Покажем теперь взаимосвязь уравнений (21) и первого из уравнений Гамильтона для обобщенных скоростей.

С одной стороны, используя равенство (24), можно свернуть уравнения (21) в одно уравнение и выразить вектор обобщенных скоростей $\dot{q}$ через вектор p :

$$\dot{q} = (B^T M B)^{-1} (p - B^T M \varphi). \quad (29)$$

С другой стороны, выполним переход в функции Пуассона $\tilde{T}$ от $\dot{q}$ к p и сформируем уравнение Гамильтона для $\dot{q}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= p^T \dot{q} - \frac{1}{2} v^T M v = (B\dot{q} + \varphi)^T M B\dot{q} - \\
&\quad - \frac{1}{2} (B\dot{q} + \varphi)^T M (B\dot{q} + \varphi) = \\
&= \frac{1}{2} \dot{q}^T B^T M B \dot{q} - \frac{1}{2} \varphi^T M \varphi = -\frac{1}{2} \varphi^T M \varphi + \\
&\quad + \frac{1}{2} (p - B^T M \varphi)^T (B^T M B)^{-1} (p - B^T M \varphi).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{q} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p} = (B^T M B)^{-1} (p - B^T M \varphi). \quad (30)$$

Видно, что формулы (29) и (30) совпадают. Следовательно, система уравнений (21) – это первое из уравнений Гамильтона для обобщенных скоростей, только расписанное относительно расширенного множества переменных $\{q, p\}$ (обобщенных координат и импульсов) и $\{v, \mu\}$ (декартовых скоростей и импульсов).

Введение в уравнения движения дополнительных переменных оправдано при компьютерном моделировании динамики СТТ. При численном интегрировании уравнений движения их необходимо приводить к нормальной форме, т.е. разрешать относительно старших производных.

Преимущество уравнений движения в форме (21), (22) состоит в следующем. Во-первых, уравнения (22) сразу разрешены относительно $\dot{p}$. Во-вторых, система уравнений (21) как система линейных алгебраических уравнений относительно расширенного множества переменных $\{\dot{q}, v, \mu\}$ имеет блочную квазитрехдиагональную структуру и может быть решена каким-либо из вариантов метода "прогонки". Эти методы характеризуются линейным ростом числа арифметических операций в зависимости от количества тел в механической системе. С этой точки зрения, при большом числе тел в системе алгоритмы разрешения уравнений (21), содержащих избыточное число переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования уравнений движения в форме Лагранжа второго рода или Гамильтона и их последующего решения.

В работах [7, 8] представлены алгоритмы метода прогонки разрешения системы уравнений (21) относительно переменных $\{\dot{q}, v, \mu\}$, использующие несимметричное (метод Верещагина) и симметричное (метод Холецкого) Гауссово исключение.

4. Пример составления уравнений движения СТТ

Для иллюстрации техники составления уравнений (21), (22), а также определения всех входящих в них параметров, выведем уравнения движения для механической системы "Трубоукладчик", изображенной на рис. 3. Расчетная схема трубоукладчика представлена на рис. 4.

Рис. 3

Система состоит из 4 последовательно соединенных тел: базы, вращающейся части (ВЧ), качающейся части (КЧ) и стрелы.

Во-первых, для всех тел необходимо задать масс-инерционные характеристики: массы, координаты центров масс и тензор инерции: $m_i, r_i^c, J_i, i = \overline{1, 4}$.

Рис. 4

Далее определим обобщенные координаты. База может перемещаться вертикально в абсолютной системе координат на величину z , а также последовательно поворачиваться вокруг поперечной оси Ox на угол α и продольной оси Oy на угол β . ВЧ вращается вокруг вертикальной оси O_2z_2 , угол поворота – θ . КЧ совершает поворот вокруг оси O_3x_3 на угол ε . Стрела может перемещаться вдоль оси O_3u_3 на величину y . Таким образом, система имеет шесть степеней свободы. Векторы обобщенных координат:

$$q_1 = (z, \alpha, \beta)^T, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varepsilon, \quad q_4 = y.$$

Радиус-векторы $\rho_i = O_{i-1}O_i$ зависят от обобщенных координат следующим образом:

$$\rho_1 = (0, 0, z)^T, \quad \rho_2 = (0, b_{\text{ев}}, h_{\text{ев}})^T, \\ \rho_3 = (0, b_{\text{кч}}, h_{\text{кч}})^T, \quad \rho_4 = (0, y, h_{\text{см}})^T.$$

Матрицы направляющих косинусов:

$$G_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}, \quad G_4 = E, \\ G_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Последними необходимо задать матрицы A_i , определяющие кинематику относительного движения тел системы, и их производные:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sin \beta & 0 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{A}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\beta} \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\beta} \cos \beta & 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = \dot{A}_4 = (0)_{6 \times 1}.$$

Для завершения индивидуализации механической системы необходимо еще задать активные силы и моменты, действующие на тела. Для понимания алгоритма составления уравнений движения этот шаг не является существенным, и мы его опустим. Дальнейшие шаги по формированию матричных блоков, входящих в уравнения (21), (22) являются универсальными для любой СТТ и выполняются по рекуррентным алгоритмам, изложенным в предыдущих разделах работы.

Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что объем информации, которую необходимо подготовить для построения математической модели СТТ в форме уравнений (21), (22), минимален.

Заключение

В работе получена новая матричная форма уравнений движения систем связанных твердых тел со структурой дерева. Уравнения содержат импульсы Пуассона, обобщенные координаты, квазискорости и множители Лагранжа. Они разрешены относительно производных импульсов Пуассона, поэтому в отличие от классических уравнений в форме Лагранжа первого или второго рода их не надо разрешать относительно старших производных (обобщенных ускорений) при численном интегрировании.

Показана взаимосвязь выведенных уравнений с классическими уравнениями движения механических систем и определено их место в общей структуре уравнений движения СТТ.

Выписаны рекуррентные формулы, предназначенные для компьютерного формирования уравнений из простейших основных матриц (блоков), описывающих структуру, масс-инерционные, геометрические и кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров) механической системы.

Группа кинематических уравнений, входящих в расширенную систему уравнений, имеет квазитрехдиагональную блочную структуру, что позволяет для их разрешения относительно обобщенных скоростей использовать методы "прогонки". Эти алгоритмы являются более быстрыми для механических систем, содержащих длинные кинематические цепи, так как имеют линейный закон зависимости числа арифметических операций от числа тел в механической системе, в отличие от алгоритмов моделирования СТТ, основанных на использовании уравнений в форме Лагранжа второго рода, где аналогичная зависимость является кубической.

Приведены все этапы формирования исходной информации для компьютерного моделирования одной демонстрационной механической системы описанным в работе методом.

Список литературы

1. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 223 p.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 824 с.
3. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988. 280 с.

4. *Иванов В.Н.* Математическое моделирование динамики механических систем со структурой дерева / Перм. гос. ун-т. Пермь, 1983. 11 с. Деп. в ВИНТИ: 28.10.83, № 5876.
5. *Иванов В.Н., Сулонов В.М.* Уравнения движения механических систем со структурой дерева // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь, 1984. С. 154–159.
6. *Иванов В.Н., Полосков И.Е., Шимановский В.А.* Математические модели систем связанных твердых тел в импульсах Пуассона // Фундаментальные исследования. 2016. № 10–3. С. 493–499.
7. *Иванов В.Н., Шимановский В.А.* Численные методы формирования и решения уравнений движения в импульсах Пуассона систем твердых тел со структурой дерева // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 10. С. 13–18.
8. *Иванов В.Н.* Алгоритмы решения уравнений движения в импульсах Пуассона систем твердых тел со структурой дерева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4(39). С. 25–31.

Matrix equations of the motion of multibody systems in Hamiltonian variables. Systems with a tree structure

V. N. Ivanov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
precol@psu.ru; 8(342) 239-65-60

The article is devoted to the development of methods for computer simulation of dynamics of mechanical systems. The article presents a new matrix form of equations of motion for rigid body systems with a tree structure and holonomic constraints. Generalized coordinates and impulses were exploited as independent parameters that uniquely identified the configuration and velocity distribution of bodies. The most important features of the equations are that they are resolved with respect to derivatives of generalized impulses and don't contain constraint forces. In this paper we obtain the equations on the base of the Hamilton–Ostrogradsky principle and matrix-geometric approach. The method is intended for the study of motions of mechanical systems with the usage of computers. Recurrent formulae were obtained for all kinematic and dynamic variables that were included in the equations. An example demonstrates all stages of source data preparation and construction of specific equations in the proposed form for a mechanical system with six degrees of freedom.

Keywords: *multibody system; equations of motion; dynamic; mathematical modeling; generalized coordinates; Poisson impulses; matrix-geometric method.*