УДК 510.54

Одно обобщение минимальных нециклических групп

Я.Д. Половицкий, А.А. Волочков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

alg@psu.ru; тел. (342) 239-63-21

Рассматриваются конечные группы, в каждой из которых максимальная длина антицепей нециклических подгрупп (d_n -ширина) группы P больше максимальной d_n -ширины $s_n(P)$ ее собственных подгрупп. Описаны такие абелевы p -группы при $s_n(P) \leq 5$ и конечные p -группы, минимальные относительно свойства "любые две нециклические подгруппы инцидентны".

Ключевые слова: примарная группа; подгруппа; d_n -ширина.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-16-22

Введение

В работе [1] введено и рассмотрено понятие d_n -ширины группы, а в [2] получено описание конечных нильпотентных групп, d_n -ширина которых не превосходит трех. Представляется естественным рассмотреть такие группы P , d_n -ширина которых больше $s_n(P)$. При $s_n(P) = 0$ это - минимальные нециклические группы. Поэтому при малых $s_n(P)$ такие группы можно считать обобщениями минимальных нециклических групп. В настоящей работе на базе результатов статей [1] и [2] получено описание таких конечных p -групп P при $s_n(P) = 1$. Наряду с общеизвестными обозначениями в работе используются и следующие:

- группа типа $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_s$ — прямое произведение циклических групп порядков $k_1, k_2, \dots, k_s$;
- $d(P)$ — d -ширина группы P (максимальная длина антицепей ее подгрупп)

- $d_n(P)$ (или d_n) — d_n -ширина группы P — максимальная длина антицепей нециклических подгрупп;
- $s_n(P)$ — максимальная d_n -ширина собственных подгрупп группы P ;
- $\square$ — конец доказательства.

1. Основные определения и используемые результаты

Определение 1. Группу G , для которой $d_n(G) = k$, назовем d_{nk} -группой.

Определение 2. Максимальную d_n -ширину $s_n(G)$ собственных подгрупп группы G назовем ее *подгрупповой d_n -шириной*.

Определение 3. Если для группы G $s_n(G) = k$, то G назовем s_{nk} -группой ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), или группой с s_{nk} -условием. В частности, s_{n0} -группа — это группа, все истинные подгруппы которых циклические.

Определение 4. Если G — s_{nk} -группа и $d_n(G) > k$, то G назовем M_{nk} -группой, или группой с M_{nk} -условием (здесь M — первая буква слова more).

Так, M_{n0} -группы — это минимальные нециклические группы. Такие конечные группы хорошо известны.

Замечание 1. Из определений 3 и 4 и того, что $d_n(G) \geq s_n(G)$ видно, что группа G не является M_{nk} -группой тогда и только тогда, когда $s_n(G) = d_n(G)$ (1). Таковыми группами, например, являются конечные группы с единственной максимальной нециклической подгруппой. Из теорем 1-4 работ [1] и [2] нетрудно получить все конечные нильпотентные s_{nk} -группы, удовлетворяющие условию (1), для $k \leq 3$.

Из определения M_{nk} -группы вытекает справедливость следующих двух утверждений:

Лемма 1. Если G — M_{nk} -группа и N — ее нециклическая инвариантная подгруппа, то для любой R , такой, что $N < R < G$, $d(R/N) \leq k$.

Лемма 2. Конечная группа G тогда и только тогда является M_{nk} -группой, когда: 1. Хотя бы для одной ее максимальной подгруппы M_1 $d_n(M_1) = k$; 2. Для любой $M \leq G$ $d_n(M) \leq k$; 3. $d_n(G) > k$.

Ниже в леммах 3–7 формулируется ряд утверждений, доказанных в [1], которые нам понадобятся при изучении M_{nk} -групп.

Лемма 3. ([1], теорема 1) Конечные нециклические абелевы p -группы, d_n -ширина которых не превосходит пяти, это группы следующих типов, и только они: $d_n = 1$: $p \times p^n$; $d_n = 2$ — не существуют; $d_n = 3$: $2^2 \times 2^2$; $d_n = 4$: $2^2 \times 2^3$, $3^2 \times 3^2$; $d_n = 5$: $2^2 \times 2^4$.

Следствие 1. В конечной нециклической абелевой p -группе P , для которой $d_n(P) \leq 5$, равенство $d_n(P) = s_n(P)$ выполняется только для P типа $p \times p^n$ ($n \geq 2$) — в таких P $d_n(P) = s_n(P) = 1$.

Лемма 4. ([1], следствие леммы 1) Если G — группа типа $p^n \times p^2$ ($n \geq 2$), то $d_n(G) = (p-1)(n-1) + 2$.

Лемма 5. ([1], лемма 5) Пусть G — группа типа $p^n \times p^m$, где $p \neq 2$, $n \geq 2$, $m \geq 3$. Если $d_n(G) \leq 5$, то G — группа типа $p^2 \times p^2$.

Лемма 6. ([1], следствие 1 леммы 2). Если G — группа типа $2^m \times 2^n$, где $m \geq 3$ и $n \geq 3$, то $d_n(G) \geq 7$.

Лемма 7. ([1], следствие 2 леммы 4) $d_n(E_{p^3}) = p^2 + p + 1 \geq 7$.

2. Конечные примарные абелевы M_{nk} -группы для $1 \leq k \leq 5$

Теорема 1. Конечная абелева p -группа P является M_{nk} -группой для $1 \leq k \leq 5$ (1) тогда и только тогда, когда она — группа одного из следующих типов: M_{n1} -группа: $p^2 \times p^2$ или изоморфна E_{p^3} ; M_{n2} -группа: не существует; M_{n3} -группа: $2^2 \times 2^3$; M_{n4} -группа: $2^2 \times 2^4$, $3^2 \times 3^3$, $2^3 \times 2^3$; M_{n5} -группа: $2^2 \times 2^5$.

Доказательство. Необходимость. Пусть такая группа P является M_{nk} -группой для некоторого k , удовлетворяющего неравенствам (1). В силу лемм 2 и 3 $k \neq 2$ (2), то есть P не может быть M_{n2} -группой.

Ниже в доказательстве необходимости мы получим все типы M_{nk} -групп, перечисленные в теореме 1, но значения k для каждого из этих типов будут найдены при доказательстве достаточности.

Рассмотрим нижний слой P_1 группы P . Так как P — конечная абелева p -группа, то $P_1 \cong E_{p^n}$, причем, так как в силу (1) P нециклическая, $n \geq 2$ (3). Если $n \geq 3$, то в P_1 содержится подгруппа $P_2 \cong E_{p^3}$ и в силу леммы 7 $d_n(P_2) \geq 7$. Поэтому, если $P_2 < P$, то P не может быть M_{nk} -группой для чисел k вида (1), в противоречие с условием. Значит, $P = P_2 \cong E_{p^3}$, то есть P — одна из групп теоремы 1.

В силу доказанного выше и (3) остается рассмотреть случай $n = 2$, то есть когда P — группа типа $p^m \times p^s$ (4), где $ms > 0$. Если $s = 1$, то в силу леммы 3 $d_n(P) = 1$, а тогда P ввиду определения 3 не может быть M_{nk} -группой при значениях k из (1), вопреки условию теоремы 1. Значит, $s \geq 2$. Аналогично получаем, что $m \geq 2$, и потому, не нарушая общности, можно считать, что в (4) $m \geq s \geq 2$ (5). В силу (4) и (5) в P есть максимальные подгруппа M типа $p^{m-1} \times p^s$ (6), где $m \geq 2$. Если $m = 2$, то ввиду (5) и (4)

P — группа типа $p^2 \times p^2$ — одна из групп теоремы 1.

Пусть $m \geq 3$ (7). Отметим, что из условий теоремы 1 и леммы 2 следует, что $d_n(M) \leq 5$ (3).

Дальнейшее рассмотрение проведем отдельно для $p \neq 2$ и $p = 2$.

1. $p \neq 2$.

Тогда в силу (6)–(8) к M применима лемма 5, и по этой же лемме M — группа типа $p^2 \times p^2$ (9). Из (8), (9) и леммы 4 имеем: $d_n(M) = (p-1)(2-1) + 2 \leq 5$, то есть $p \leq 4$, и потому ввиду условия 1 $p = 3$ (10). Из (6) и (3) получаем, что $m = 3$, $s = 2$, и потому с учетом (10) P — группа типа $3^2 \times 3^2$ — это одна из групп теоремы 1.

2. $p = 2$,

Тогда в силу (4) P — группа типа $2^m \times 2^s$ (11) и выполняются (5) и (7). Ввиду (5) для s есть две возможности:

2.1. $s = 2$.

Тогда P — типа $2^m \times 2^2$ (12), а M — типа $2^{m-1} \times 2^2$ (13), где в силу (7) $m-1 \geq 2$. Поэтому из леммы 4, (13) и (8) имеем: $d_n(M) = (2-1)(m-2) + 2 \leq 5$, то есть $m \leq 5$, и в силу (7) $3 \leq m \leq 5$. Отсюда и из (12) следует, что P — подгруппа одного из типов $2^3 \times 2^2$, $2^4 \times 2^2$ или $2^5 \times 2^2$ — все такие группы есть в теореме 1.

2.2. $s \geq 3$

Ввиду (11) в P есть максимальная подгруппа M_1 типа $2^m \times 2^{s-1}$. Если $s > 3$, то в силу (7) к M_1 применима лемма 6, а тогда $d_n(M_1) \geq 7$, в противоречие с условиями теоремы 1. Значит, $s = 3$ (14) и P — группа типа $2^m \times 2^3$ (15), а M_1 — типа $2^m \times 2^2$ (16). Из леммы 4 и условий теоремы 1 следует: $d_n(M_1) = (2-1)(m-1) + 2 = m+1 \leq 5$, то есть $m \leq 4$. Отсюда и из (7) следует, что либо $m = 3$, либо $m = 4$ (17). В первом случае ввиду (15) P — группа типа $2^3 \times 2^3$ — это одна из групп теоремы 1.

Пусть выполняется (17). Тогда в силу (6) и (14) M — типа $2^3 \times 2^3$ и ввиду леммы 6 $d_n(M) \geq 7$, в противоречие с условиями теоремы 1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть P — группа одного из типов, перечисленных в теореме 1. Чтобы показать, что она является M_{nk} -группой при некотором k , таком, что $1 \leq$

5, в силу леммы 2 достаточно убедиться в том, что k — наибольшая d_n -ширина ее максимальных нециклических подгрупп, а $d_n(P) > k$. Это нетрудно сделать, используя леммы 3, 4, 6 и, при необходимости, один из приведенных ранее типов теоремы 1. Получим, что все приведенные в теореме 1 типы групп являются M_{nk} -группами при значениях k , приведенных в формулировке теоремы 1.

Отметим, что при проверке этого используется, что в любой группе P типа $p^m \times p^s$, где $m \geq s \geq 2$, любая максимальная нециклическая подгруппа M_0 — это группа типа $p^{m-1} \times p^s$ или $p^m \times p^{s-1}$ (ибо P — 2-порожденная абелева группа, $\exp(P) = p^m$, $|P/M_0| = p$ и потому $\exp(M_0) = p^{m-1}$).

Для примера приведем доказательство достаточности для нескольких типов групп теоремы 1.

1. P — типа $p^2 \times p^2$.

M_0 — группа типа $p \times p^2$. В силу леммы 3 $d_n(M_0) = 1$. По лемме 4 $d_n(P) = (2-1)(p-1) + 2 = p+1 > 1$. Значит, P — M_{n1} -группа.

2. $P \cong E_{p^3}$

Тогда $M_0 \cong E_{p^2}$ и $d_n(M_0) = 1$, а в силу леммы 7 $d_n(E_{p^3}) = p^2 + p + 1 \geq 7$. Значит, E_{p^3} является M_{n1} -группой.

3. P — типа $2^2 \times 2^3$.

M_0 — типа 2×2^3 или $2^2 \times 2^2$. В первом случае $d_n(M_0) = 1$, а во втором в силу леммы 3 $d_n(M_0) = 3$. Так как по лемме 3 $d_n(P) = 4 > 3$, то P является M_{n3} -группой.

Этим мы завершаем доказательство достаточности. $\square$

Сравнивая типы групп, приведенных в лемме 3 и теореме 1, получаем утверждения: **Следствие.** Каждая нециклическая абелева p -группа P , для которой $d_n(P) \leq 5$, кроме групп типа $p \times p^n$ при $n \geq 2$, является M_{nk} -группой при некотором k , таком, что $1 \leq k \leq 4$.

Замечание 2. Если G является

M_{nk} -группой, то $d_n(G)$ может быть сколь угодно большой. Это видно на примере групп P типа $p^2 \times p^2$: Как показано выше при доказательстве достаточности теоремы 1 (пункт 1), $d_n(P) = p+1$, а $s_n(P) =$

1. При больших простых p в этой M_{n1} -группе разность $d_n(P) - s_n(P) = p$ сколь угодно большая. Это связано с тем, что в такой группе "очень много" максимальных нециклических подгрупп, и потому $d_n(P)$ не зависит от $s_n(P)$.

Ниже мы будем рассматривать только M_{n1} -группы и M_{n2} -группы.

3. Конечные примарные неабелевы M_{n1} -группы

Лемма 8. ([2], теорема 3). Конечная неабелева p -группа P , d_n -ширина которой не превосходит трех, это — одна из следующих групп, и только такая группа:

$d_n = 1$: 1. Q_8 ; 2. M_{p^n} , $p^n \neq 8$; $d_n = 2$: 3. D_8 ; 4. Q_{16} ; $d_n = 3$: 5. $P/\Phi(P) \cong E_4$, $\Phi(P) \cong E_4$, $|Z(P)| = 2$; 6. $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^4 = b^4 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ (одна из групп Миллера-Морено); 7. $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $a^3 = b^3 = 1$, $a^4 = b^4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; 8. SD_{16} .

Следствие 1 Среди конечных неабелевых p -групп P , для которых $d_n(P) \leq 3$, равенство $s_n(P) = d_n(P)$ (1) выполняется только для групп M_{p^n} ($p^n \neq 8$) (в таких группах для любой нециклической подгруппы R $d_n(R) = d_n(P) = 1$ (2)).

Следствие 2 Конечная примарная s_{nk} -группа P , для которой $d_n(P) \leq 3$, тогда и только тогда не является M_{nk} -группой, когда $k = 1$ и либо $P \cong M_{p^n}$ ($p^n \neq 8$), либо P — группа типа $p \times p^n$, $n \geq 2$. Для конечных p -групп условия s_{n2} и M_{n2} равносильны.

Доказательство. Необходимость истекает из следствия леммы 3 и следствия 1 леммы 8. Достаточность очевидна, ибо для групп упомянутых в следствии двух видов выполняются (1) и (2). Из доказанного вытекает справедливость последнего утверждения следствия 2. $\square$

Лемма 9. Пусть P — конечная 2-группа, не имеющая циклической максимальной подгруппы и существует $Q_8 \triangleleft P$ (1). Тогда $P = Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$ (2) и каждая подгруппа группы Q_8 инвариантна в P . Такая группа P является M_{n1} -группой тогда и только тогда, когда $P = Q_8 \times \mathbb{Z}_2$ (3). Если (3) не выполняется, то P — M_{n2} -группа.

Доказательство. Если в P подгруппа порядка 2 единственна, то, так как P неабелева, $P \cong Q_{2^n}$ (см., напр., [3], 17.36), а тогда в P есть циклическая максимальная подгруппа, вопреки условиям леммы. Значит, в P существует подгруппа $\mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$ (4), такая, что $\mathbb{Z}_2 \not\subset Q_8$ (5). В силу (1) и того, что $[P : Q_8] = 2$, ввиду (5) имеет место равенство (2).

Пусть хотя бы одна из подгрупп $N = \langle a \rangle$ (6) порядка 4 группы Q_8 не инвариантна в P . Тогда из (2), (4) и (6) следует, что $rar = b$ (7), $b \in Q_8 \setminus N$ (8), $|b| = 4$ (9). Из (7) следует: $(ra)^2 = ba$ (10). Из (6) и (8) следует, что $ba \in Q_8 \setminus N$, и потому $|ba| = 4$. Теперь из (10) для элемента $t = ra$ следует, что $|t| = 8$, то есть в P есть циклическая максимальная подгруппа, вопреки условию леммы. Значит, $N \triangleleft P$, и, учитывая, что ввиду (2) подгруппа порядка 2 из Q_8 инвариантна в P , все подгруппы из Q_8 инвариантны в P .

Пусть P является M_{n1} -группой. Если $N < Q_8$ (10), $|N| = 4$ (11), то, как выше показано, $N \triangleleft P$. Подгруппа $T = N \rtimes \mathbb{Z}_2$ (12) порядка 8 нециклическая и в силу M_{n1} -условия $d_n(T) = 1$, а тогда из лемм 3 и 8 следует, что T — абелева группа типа 4×2 , то есть $N \subset C(\mathbb{Z}_2)$. Так как это выполняется для всех подгрупп порядка 4 группы Q_8 , то справедливо (3). Обратно, в группе P вида (3) $|\Omega_1(P)| = 4$ и для любой $M \triangleleft P$ $|M| = 8$ и справедливо $|\Omega_1(M)| \leq 4$. Если M нециклическая, то M — типа 4×2 или изоморфна Q_8 . В силу лемм 8 и 3 для таких M $d_n(M) = 1$. Но $d_n(Q_8 \times \mathbb{Z}_2) > 1$, поэтому группа P вида (3) является M_{n1} -группой. Этим доказано соответствующая часть леммы.

Пусть P удовлетворяет условиям леммы и не имеет вид (3). Тогда по доказанному выше $s_n(P) \geq 2$ и потому хотя бы для одной подгруппы N с условиями (10) и (11) для подгрупп T вида (12) выполняется $d_n(T) \geq 2$ и T неабелева. Так как $|T| = 8$ и в T существует циклическая подгруппа порядка 4 и более одной подгруппы порядка 2, то $T \cong D_8$. В силу леммы 8 $d_n(T) = 2$, (13) $d_n(P) > 2$ (14). Так как $d_n(Q_8) = 1$, то из (13) следует, что $s_n(P) = 2$, и, ввиду (14) P является M_{n2} -группой. $\square$

Теорема 2. Конечная неабелева p -группа

P является M_{n1} -группой тогда и только тогда, когда она — одна из следующих групп: 1. D_8 ; 2. $|P| = p^3$, $\exp(P) = p \neq 2$; 3. Q_{16} ; 4. $P = Q_8 \times \mathbb{Z}_2$; 5. $P/\Phi(P) \cong E_{p^2}$, $p \neq 2$, $\Phi(P) = \Omega_1(P) \cong E_{p^2}$, $|Z(P)| = p$; 6. $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$, $b^{-1}ab = a^{p+1}$ (группа Миллера-Морено); 7. $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $a^8 = b^8 = 1$, $a^4 = b^4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть конечная неабелева p -группа P является M_{n1} -группой. Тогда $|P| = p^n$, $n \geq 3$. В силу определения 3 $d_n(P) > 1$ (1). Поэтому при $n = 3$ в силу леммы 8 P не может быть изоморфной ни Q_8 , ни M_{p^3} ($p \neq 2$). Значит, либо $P \cong D_8$, либо $\exp(P) = p \neq 2$, то есть P — группа типа 1 или 2 теоремы 2.

Пусть $|P| \geq p^4$ (2). Так как P — M_{n1} -группа, то в силу лемм 2,3 и 8 любая максимальная нециклическая подгруппа M группы P может быть только одного из следующих видов: $p \times p^n$ (3), $M \cong Q_8$ (4) или $M \cong M_{p^n}$ ($p^n \neq 8$) (5), причем хотя бы одна из таких M — одного из видов (3)—(5).

Рассмотрим два возможных случая:

1. Хотя бы одна из максимальных подгрупп группы P циклическая.

Тогда, так как P неабелева, она, как известно (см. напр., [3]) изоморфна одной из групп M_{p^n} , D_{2^n} , Q_{2^n} или SD_{2^n} . В силу условия (2) и леммы 8 $d_n(M_{p^n}) = 1$, и поэтому ввиду (1) $P \not\cong M_{p^n}$. Тогда из (2) и возможных видов (3)—(5) нециклических максимальных подгрупп группы P следует, что $P \cong Q_{16}$, то есть P — группа типа 3 теоремы 2. Случай 1 рассмотрен.

2. Все максимальные подгруппы группы P нециклические.

В связи со сказанным перед пунктом 1 о максимальных подгруппах группы P возможны следующие случаи:

2.1. Существует $M \triangleleft P$, такая, что $M \cong Q_8$.

Так как P является M_{n1} -группой, то в силу леммы 9 P — группа типа 4 теоремы 2.

2.2. В P нет максимальных подгрупп, изоморфных Q_8 .

Тогда из условия пункта 2 и сказанного выше о максимальных подгруппах группы P следует, что любая такая M — вида (3) или (5). Но в каждой M такого вида

нециклическая подгруппа каждого из существующих там порядков единственна, и, так как $M \triangleleft P$, в P все нециклические подгруппы инвариантны. Пусть $\{M_1, M_2, \dots, M_l\}$ — все максимальные подгруппы группы P . Так как P нециклическая, то $l \geq 2$. Рассмотрим $N_i = \Omega_1(M_i)$ (6), $i = \overline{1, l}$. Так как M_i — видов (3) или (5), то $N_i \cong E_{p^2}$ (7) для каждого $i = \overline{1, l}$. Очевидно, $N_i \triangleleft P$.

Возможны два случая.

2.2.1. Существуют такие N_j и N_s , что $N_j \neq N_s$ ($j \neq s$).

Тогда P содержит подгруппу $K = N_j N_s$ (8), где $|K| \geq p^3$ (9). Пусть $K < P$ (10). Тогда $K \leq M_i$ при некотором i , но отсюда и из (6) и (8) следует, что $K \subset \Omega_1(M_i) = N_i$, что ввиду (9) противоречит (7). Значит, (10) невозможно и потому $K = P$. Но так как справедливы (2), (8) и (7), то $|P| = p^4$ и $P = N_j \times N_s$ — абелева группа, вопреки условию теоремы 2. Значит, случай 2.2.1. невозможен.

2.2.2. $N_i = N_j = N$ при любых $i, j = \overline{1, l}$.

Тогда ввиду (6) и (7) $\Omega_1(M_i) = \Omega_1(P) = N \cong E_{p^2}$ (11). Отсюда и из условия 2 следует, что $N \leq \Phi(P)$ (12). Так как каждая M_i — группа одного из видов (3) или (5), то M_i/N — циклическая группа для всех $i = \overline{1, l}$. Поэтому в конечной p -группе P/N все истинные подгруппы циклические, а тогда, как известно, P/N — группа одного из видов:

I. $P/N \cong \mathbb{Z}_{p^k}$; II. $P/N \cong E_{p^2}$; III. $P/N \cong Q_8$ (и $p = 2$). В случае I в P ввиду (12) единственная максимальная подгруппа, в противоречие с доказанным вначале в п. 2.2. Значит, случай I невозможен, и P — группа типа II или III. Дальнейшее рассмотрение разобьем на два случая.

2.2.2.1. $p = 2$

Тогда либо $P/N \cong E_4$ (13), либо P/N — группа типа III. Так как N содержится во всех нециклических подгруппах группы P , то из (12) и леммы 1 из [1] следует, что $d_n(P) = d(P/N)$ (14). Но, очевидно, $d(Q_8) = d(E_4) = 3$, и потому из (14), (13) и III получаем, что $d_n(P) = 3$. Отсюда в силу леммы 8 следует, что P — группа одного из типов 5 — 7 леммы 8, ибо в группе SD_{16} типа 8 этой леммы есть циклическая максимальная подгруппа, в противоречие с условием

2. В группе P типа 5 леммы 8, как отмечено в теореме 3 из [2], есть $M_i \cong D_8$, и, так как в силу леммы 8 $d_n(D_8) = 2$, P не является M_{n1} -группой, в противоречие с условием теоремы 2. Группа типа 6 — это одна из групп типа 6 теоремы 2 (при $p = 2$), а группа типа 7 этой леммы — это группа типа 7 теоремы 2.

Случай 2.2.2.1 рассмотрен.

2.2.2.2. $p \neq 2$

Тогда P — группа типа II, и из (11), (12) и неабелевости P следует, что $\Phi(P) = N = \Omega_1(P) \cong E_{p^2}$ (15), $|P| = p^4$ (16), $P/\Phi(P) \cong E_{p^2}$ (17) и $\exp(P) \leq p^2$ (18). Введем обозначение: $Z = Z(P)$. Пусть $\Phi(P) \leq Z$ (19). Тогда из (17) и неабелевости P получаем, что $\Phi(P) = Z$ и P — группа Миллера-Морено. Учитывая (15) и известные результаты о строении таких групп (см., напр., [3], 17.29) имеем: $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $a^{p^{m+1}} = b^{p^n} = 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^m}$. Из (16) и (18) следует, что $m = 1$, $n = 2$ и P — одна из групп типа 6 теоремы 2 (при $p \neq 2$).

Пусть (19) не выполняется, то есть $\Phi(P) \not\leq Z$ (20). Если Z — нециклическая группа, то $|\Omega_1(Z)| \geq p^2$, и, так как в силу (15) $|\Omega_1(P)| = p^2$, то $\Omega_1(P) = \Omega_1(Z)$, то есть в силу (15) $N \leq Z$, и, так как $\Phi(P) = N$ (в силу (15)), то $\Phi(P) \subset Z$, вопреки (20). Значит, Z — циклическая группа. Пусть $|Z| = p^2$ (21). Так как P неабелева, то из (16) и (21) следует, что $P/Z \cong E_{p^2}$, и в P существует $(p+1)$ максимальных подгрупп, содержащих Z . Но ввиду (17), это — все максимальные подгруппы группы P , а тогда $Z \leq \Phi(P)$ и в силу (21) и (16) выполняется (19), в противоречие с (20). Значит, (21) неверно, откуда в силу (16) и неабелевости P получаем, что $|Z| = p$. Отсюда и из (15), (17) следует, что P — группа типа 5 теоремы 2.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть P — группа одного из видов 1 — 7 теоремы 2. В силу леммы 8 для всех таких видов $d_n(P) > 1$. Поэтому ввиду определения 3 для доказательства того, что P является M_{n1} -группой, достаточно проверить, что $s_n(P) = 1$ (22). Проверим это для каждого типа. Пусть $M \triangleleft P$ и M нециклическая.

1. P — типа 1 или типа 2.

Тогда $|P| = p^3$, и потому любая M — типа $p \times p$ и выполняется (22).

2. $P \cong Q_{16}$.

Тогда $M \cong Q_8$, $d_n(M) = 1$ и потому выполняется (22).

3. $P \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_2$

Такая группа является M_{n1} -группой по лемме 9.

4. P — группа 5.

Тогда $|P| = p^4$ (23), $p \neq 2$, $|M| = p^3$ (24) и $|\Omega_1(M)| = p^2$, ибо $M \supset \Omega_1(P)$. Отсюда следует, что либо $M \cong M_{p^3}$ ($p \neq 2$), либо M — типа $p \times p^2$. В обоих этих случаях $d_n(M) = 1$ (25), и потому выполняется (22).

5. P — группа типа 6.

Так как выполняется (23) и (24) и P — группа Миллера-Морено, то M — абелева группа, и $|\Omega_1(P)| = p^2$, то есть M — группа типа $p \times p^2$, и справедливы (25) и (22).

6. P — группа типа 7.

В теореме 3 из [2] отмечено, что либо $M \cong M_{16}$, либо M — типа 2×8 . Так как в силу леммы 8 $d_n(M_{16}) = 1$, а группы типа 2×8 также имеют d_n -ширину 1, то выполняется (2.2). $\square$

Определение 5. Будем говорить, что в группе G выполняется условие инцидентности для нециклических подгрупп (J_n -условие), если любые две ее нециклические подгруппы инцидентны или в G не более одной нециклической подгруппы.

Определение 6. Группу с J_n -условием назовем JN -группой.

Описание бинарно конечных JN -групп содержится в работе [4]. Из определений 6 и 5 видно, что группа G является JN -группой тогда и только тогда, когда $d_n(G) \leq 1$.

Интересно рассмотреть минимальные не JN -группы (минимальные $\overline{JN}$ -группы).

Замечание 3. Пусть G — минимальная не $\overline{JN}$ -группа, тогда в силу сказанного выше $d_n(G) \geq 2$, а $s_n(G) \leq 1$ (2). Но если $s_n(G) = 0$, то G — минимальная нециклическая группа, а тогда $d_n(G) = 1$, в противоречие с (1). Значит, $s_n(G) = 1$ (3). Отсюда и из (1) следует, что G является M_{n1} -группой. Обратно, если G — M_{n1} -группа,

то выполняется и (1) и (2), а тогда G — минимальная JN -группа. Значит, класс M_{n1} -групп и минимальных JN -групп совпадают.

Теперь из теорем 1 и 2 и замечания 3 получается

Теорема 3. *Конечная p -группа G является минимальной JN -группой (то есть M_{n1} -группой) тогда и только тогда, когда она — одна из следующих групп: 1. группа типа $p^2 \times p^2$; 2. $G \cong E_{p^3}$; 3. группа одного из 7 типов теоремы 2.*

Заключение

На базе результатов данной статьи получено описание конечных нильпотентных M_{n1} -групп и M_{n2} -групп. Оно будет приведено в следующей статье.

Список литературы

1. Половицкий Я.Д., Волочков А.А. О максимальных антицепях нециклических подгрупп конечных групп // Вып. 2(41), 2018, с.16-24.
2. Половицкий Я.Д., Волочков А.А. Конечные нильпотентные группы d_n -ширина которых не превосходит трех // Вып. 2(41), 2018, с.25-30.
3. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. М.:Наука, 2000. 230 С.
4. Черников Н.С., Половицкий Я.Д., Чечулин В.Л. Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп // Укр. матем. журнал. Т. 48 Т4. 1996. С. 533-539.

One generalisation of a minimal noncyclic groups

Ja.D. Polovitsky, A.A. Volochkov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; (342) 239 63 21

A finite groups, in which maximal length of antichains of noncyclic subgroups(d_n -width) of the group P is more than maximal d_n -width $s_n(P)$ of its proper subgroups are considered. Such an abelian p -groups with $s_n(P) \leq 5$ and finite p -groups, which is minimal regarding property «any two noncyclic subgroups is incident» are described

Keywords: p -groups; subgroup; d_n -width.