Интернет-журнал «Транспортные сооружения» <https://t-s.today>
Russian journal of transport engineering

2018, №2, Том 5 / 2018, No 2, Vol 5 <https://t-s.today/issue-2-2018.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/09SATS218.pdf>

DOI: 10.15862/09SATS218 (<http://dx.doi.org/10.15862/09SATS218>)

Статья поступила в редакцию 14.04.2018; опубликована 06.06.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:

Шейн А.И., Земцова О.Г. Исследование пограничной гиперповерхности области устойчивости в осях жесткостей // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2018 №2, <https://t-s.today/PDF/09SATS218.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/09SATS218

For citation:

Shein A.I., Zemtsova O.G. (2018). Research of the boundary hypersurface of the stability region in the axes of rigidity. *Russian journal of transport engineering*, [online] 2(5). Available at: <https://t-s.today/PDF/09SATS218.pdf> (in Russian). DOI: 10.15862/09SATS218

УДК 624.04

ГРНТИ 67.03.03

Шейн Александр Иванович

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия
Проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Механика»
Доктор технических наук, профессор
E-mail: shein-ai@yandex.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=479939

Земцова Ольга Григорьевна

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия
Доцент кафедры «Механика»
Кандидат технических наук
E-mail: zemtsova-og@yandex.ru

РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=512862

Исследование пограничной гиперповерхности области устойчивости в осях жесткостей

Аннотация. Областью устойчивости оптимизационной задачи условимся называть совокупность тех точек, которые соответствуют жесткостям системы, при которых равновесие устойчиво по отношению к возможным отклонениям данной системы. Область устойчивости отделяется от области неустойчивости пограничной гиперповерхностью. В работе приводится ранее полученное авторами аналитическое решение задачи оптимизации жесткостей рамных систем из условия устойчивости. При этом необходимые условия первого порядка не определяют характера вектора найденных значений погонных жесткостей. Как известно, в случае выпуклости гиперповерхности области устойчивости в заданном интервале разрешающие уравнения дают глобальный минимум.

В связи с этим данная работа посвящена исследованию выпуклости гиперповерхности области устойчивости системы в осях жесткостей. Это исследование, по сути, сводится к нахождению знакоопределенности угловых миноров из вторых дифференциалов функции Лагранжа задачи оптимизации жесткостей элементов рамных систем. В статье приводятся доказательства того, что пограничная гиперповерхность области устойчивости системы выпуклая и условно-стационарная точка x^* реализует на заданном интервале глобальный

минимум. Доказательство выполнено авторами путем обоснования того, что квадратичная форма вторых дифференциалов функции Лагранжа положительно определена.

Приведенное в статье решение относится к многоэтажным эстакадам, которые представляют собой свободные и/или несвободные рамные системы. Для таких систем наиболее характерно исчерпание несущей способности в виде потери устойчивости. Таким образом, полученное авторами аналитическое решение задачи оптимального проектирования транспортной эстакады дает готовые формулы для проектирования конструкций данного типа.

Ключевые слова: устойчивость; область устойчивости; область неустойчивости; пограничная гиперповерхность; выпуклость гиперповерхности; глобальный минимум; оптимизация; аналитическое решение

Введение

При решении оптимизационных задач [1, 2] вообще и при решении задач устойчивости [3, 4], в частности, редко удается воспользоваться аналитическими методами, так как аналитические решения, связанные с детерминантными уравнениями большой размерности, возможны лишь в крайне редких случаях. Даже при простейших расчетных схемах, такой способ оказывается практически нереализуемым из-за необходимости решения весьма сложных систем трансцендентных уравнений. Поэтому полученное в работе [5] замкнутое решение задачи оптимизации жесткостей элементов рамных систем имеет весьма важное значение, и, в случае выпуклости гиперповерхности области устойчивости в осях жесткостей, носит глобальный характер. В связи с этим данная работа посвящена исследованию выпуклости гиперповерхности области устойчивости в осях жесткостей. Это дополнительное исследование, по сути, сводится к нахождению знакоопределенности вторых дифференциалов функции Лагранжа [6, 7] задачи оптимизации жесткостей элементов рамных систем.

Состояние проблемы

Первые исследования характера гиперповерхности области устойчивости изложены в работе П.Ф. Папковича [8]. Им сформулирована и доказана теорема о выпуклости пограничной поверхности области устойчивости в координатных осях нагрузок на основе энергетического критерия. Исследованию этого вопроса, применительно к нелинейным консервативным системам, посвящена работа А.Р. Ржаницына [9]. Свойства граничной гиперповерхности области устойчивости в осях жесткостей рассматривал И.К. Цыпинас в работе [10].

Постановка задачи

Целью нашего исследования будет установление характера пограничной гиперповерхности области устойчивости, определяемой уравнениями метода перемещений в осях жесткостей.

По аналогии с П.Ф. Папковичем, условимся называть областью устойчивости совокупность тех точек, которые соответствуют жесткостям системы, при которых равновесие устойчиво по отношению к возможным отклонениям данной системы. Область устойчивости отделяется от области неустойчивости пограничной гиперповерхностью.

Математическая модель задачи оптимизации рам из условия устойчивости [5] записана в виде:

найти минимум веса (объема) материала рамы

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = V = \sum_{j=1}^{2m} \bar{\lambda}_j^2 \cdot x_j \\ \text{при условии} \\ D(x) = \det[r_{ik}] = 0, \\ x_j \geq 0; \end{array} \right\} \quad (1)$$

где $\bar{\lambda}_j$ – конструктивная гибкость стрелы,

x_j – искомая погонная жесткость,

$D(x)$ – определитель, составленный из коэффициентов системы однородных уравнений критического состояния рамной конструкции.

Система разрешающих уравнений – условия стационарности – вида

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial x_j} + u \cdot \frac{\partial D(x)}{\partial x_j} = 0, \\ j = 1, 2, \dots, 2m \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} = D(x) = 0; \end{array} \right\} \quad (2)$$

или [5]

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \bar{\lambda}_k^2 + u_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+k}} = \bar{\lambda}_{m+k}^2 + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot u_k = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = \pm \bar{\lambda}_{m+k-1} \cdot c_{k-1}^{-1/2} \cdot r_{kk-1} + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot r_{kk} \pm \bar{\lambda}_{m+k+1} \cdot c_{k+1}^{-1/2} \cdot r_{kk+1} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{а)} \\ \text{б)} \\ \text{в)} \end{array} \quad (3)$$

представляет собой необходимые условия экстремума первого порядка функции (3а) при ограничениях (3б). Здесь Φ – функция Лагранжа.

Как известно, необходимые условия первого порядка не определяют характера условной стационарной точки (другими словами – характера вектора найденных значений погонных жесткостей). В случае выпуклости гиперповерхности области устойчивости в заданном интервале, уравнения (3) дают глобальный минимум. для выяснения этого вопроса следует привлечь производные более высоких порядков функций $f(x)$ и $\psi_k(x)$. Отметим также, что внутри области определения функций (для свободной рамы $\pi/2 < v < \pi$, для несвободной рамы $\pi < v < 2\pi$) согласно уравнениям (4) и (6), или (5) и (6)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(v_1) &= \frac{24\bar{\lambda}_1^2}{\bar{\lambda}_{m+1}^2} \\ \gamma_1(v_k)(\bar{\lambda}_{m+k-1}^2 + \bar{\lambda}_{m+k}^2) - 2\bar{\lambda}_{m+k-1}\bar{\lambda}_{m+k}\gamma_2(v_k) &= 24\bar{\lambda}_k^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v_1) &= \frac{\bar{\lambda}_1^2 c_1}{\bar{\lambda}_{m+1}^2}, \\ \left(\frac{\bar{\lambda}_{m+k-1}^2}{c_{k-1}} + \frac{\bar{\lambda}_{m+k}^2}{c_k} \right) \theta_1(v_k) - 2(c_{k-1}c_k)^{-1/2} \bar{\lambda}_{m+k-1}\bar{\lambda}_{m+k}\theta_2(v_k) &= \bar{\lambda}_k^2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$x_i = \frac{N_i \cdot h_i}{v_i^2} \quad (6)$$

а также

$$\begin{aligned} x_{m+k} &= \frac{\bar{\lambda}_{m+k-1}x_k \frac{v_k}{\sin v_k} - \bar{\lambda}_{m+k} \left(x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\operatorname{tg} v_{k+1}} \right)}{6} + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}_{m+k+1}x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\sin v_{k+1}}}{6} \end{aligned} \quad (7)$$

для свободных рам, или

$$\begin{aligned} x_{m+k} &= \frac{\bar{\lambda}_{m+k-1}c_{k-1}^{-1/2}2x_{k-1}\varphi_3(v_{k-1})}{\bar{\lambda}_{m+k}c_k^{-1/2}} - \\ &- \frac{\bar{\lambda}_{m+k}c_k^{-1/2} [4x_k\varphi_2(v_k) + 4x_{k+1}\varphi_2(v_{k+1})] \left(x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\operatorname{tg} v_{k+1}} \right)}{\bar{\lambda}_{m+k}c_k^{-1/2}} + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}_{m+k+1}c_{k+1}^{-1/2}2x_{k+1}\varphi_3(v_{k+1})}{\bar{\lambda}_{m+k}c_k^{-1/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

для несвободных рам, имеется только одна условно-стационарная точка. Вопрос о наличии в ней относительного минимума может быть решен с помощью исследования знакоопределенности вторых дифференциалов.

Методика и результат

Пусть $\{x^*, u^*\}$ – решение уравнений. Для доказательства того, что пограничная гиперповерхность выпуклая и условно-стационарная точка x^* реализует на заданном интервале глобальный минимум, необходимо, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{j=1}^{2m} \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} (x^*, u^*) \quad (9)$$

на этом интервале была неотрицательно определена, и достаточно, чтобы она была положительно определенной для векторов, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_k(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Последнее уравнение при каждом k определяет касательную в точке x^* гиперповерхность к поверхности ограничения $\psi_k(x) = 0$. Нетрудно убедиться, что, поскольку уравнения ψ_k и целевая функция не содержат произведений $x_i \cdot x_j$, то при $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

К тому же

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{m+k} \partial x_{m+k}} = 0. \quad (11)$$

Следовательно, условие положительной определенности вторых дифференциалов, выраженное положительной определенностью последовательности главных миноров

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad (12)$$

может быть представлено в виде последовательности произведений элементов главной диагонали этих миноров

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} > 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_m^2} > 0. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} &= u_1^* \cdot \frac{\partial^2 \psi_1(x^*)}{\partial x_1^2}, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial^2 \psi_{k-1}(x^*)}{\partial x_k^2} u_{k-1}^* + \frac{\partial^2 \psi_k(x^*)}{\partial x_k^2} u_k^*. \end{aligned} \quad (14)$$

$$u_k^* = -\frac{\bar{\lambda}_{m+k}}{\sqrt{c_k}}$$

Множитель Лагранжа u_k^* – величина отрицательная.

Таким образом, для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена,

достаточно отрицательной определенности производных $\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i^2}$ на всем интервале x^* .

Для свободных рам можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{k-1}}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i^2} = \left[x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} \right]'' + \left[-x_k \frac{v_k}{\sin v_k} \right]'' = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + \frac{v_k^2}{\operatorname{tg}^2 v_k} + v_k^2 \right]' - \frac{1}{2} \left[\frac{v_k}{\sin v_k} + \frac{v_k^2}{\sin^2 v_k} \cos v_k \right]' = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{v_k^2}{2x_k \operatorname{tg}^2 v_k} + \frac{2v_k^3 - v_k}{2x_k \operatorname{tg} v_k} - \frac{v_k}{2x_k} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\frac{v_k}{\sin v_k} \left(\frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} - \frac{2v_k^2}{\operatorname{tg}^2 v_k} - (v_k^2 - 1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Исследуем знакоопределенность этого выражения.

Учитывая, что в области определения функций $\pi/2 < v < \pi$

$$\begin{aligned} \sin v &> 0, \\ \operatorname{tg} v &< 0, \\ v &< v^n, \\ v^2 &> 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

получаем, что все члены в круглых скобках отрицательны, т. е. функции отрицательны, и, следовательно, квадратичная форма положительно определена на заданном интервале. Значит, на интервале $\pi/2 < v < \pi$ пограничная гиперповерхность устойчивости выпуклая и условно-стационарная точка x^* реализует глобальный минимум. Для рам с

несмещающимися узлами сомножители $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ многочлена квадратичной формы представляют собой сумму вторых производных от функций $[4x_k \varphi_2(v_k)]$ и $[-2x_k \varphi_3(v_k)]$ или первые производные от функций $\theta_1(v_k)$ и $[-\theta_2(v_k)]$:

$$\theta_1(v_k) = [4x_k \varphi_2(v_k)]' = \frac{1}{4} v_k \frac{1 - \left(\frac{v_k}{\sin v_k} \right)^2}{\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_k}{2} \operatorname{tg} \frac{v_k}{2} \right)^2 \frac{1 - \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k}}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2} \right)^2}, \quad (16)$$

$$\theta_2(v_k) = [2x_k \varphi_3(v_k)]' = \frac{1}{4} v_k \frac{\left(\frac{v_k}{\sin v_k} \right)^2 \cos v_k - 1}{\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_k}{2} \operatorname{tg} \frac{v_k}{2} \right)^2 \frac{\frac{v_k}{\sin v_k} - 1}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2} \right)^2}. \quad (17)$$

Ввиду того, что задачу выявления знакоопределенности из-за громоздких окончательных формул $[\theta_1(v_k)]'$ и $[-\theta_2(v_k)]'$ в конечном итоге придется решать численно, то наиболее целесообразно, имея в виду определения производной как

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (18)$$

воспользоваться аналитическими выражениями для названных функций.

Вычисляя приращения функций в зависимости от $\Delta v = 0,002$ в интервале $6,28 > v > 3,14$, видим, что приращения положительны, следовательно, поскольку параметр v обратно пропорционален x , функции $[\theta_1(v_k)]'$ и $[-\theta_2(v_k)]'$ отрицательны, а квадратичная форма положительна. Область устойчивости выпуклая. Точка x^* реализует глобальный минимум.

Вывод

Гиперповерхность области устойчивости, заданная в осях жесткостей, выпукла в заданном интервале, и, следовательно, уравнения (3) определяют глобальный минимум задачи оптимизации жесткостей рамных систем $\{x^*\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеин А.И., Земцова О.Г. Оптимизация многомассовых гасителей колебаний при гармоническом воздействии [Текст] // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 113-122.
2. Шеин А.И., Земцова О.Г., Азимова Я.А. Расчёт и оптимизация арматуры композитных систем методом конечных элементов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. – 2017. – №6. – С. 2. – Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no6/stroitel'naya-mehanika/6.2/at_download/file.
3. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949. – 376 с.
4. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
5. Шеин А.И., Земцова О.Г. Замкнутое решение задачи оптимизации многоэтажных рамных систем из условия устойчивости // Транспортные сооружения. – 2018. – №2. – URL: <https://t-s.today/PDF/06SATS218.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06SATS218.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
8. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Часть II. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. – Л.: Госиздатсудпром, 1941.
9. Ржаницын А.Р. О некоторых свойствах области устойчивости состояний равновесия // Строительная механика и расчет сооружений. – 1964. – №1. – С. 1-8.
10. Цыпинас И.К. К вопросу о синтезе оптимальных систем, подверженных потере устойчивости. – В кн.: Литовский механический сборник. – Вильнюс. – 1968. – №2(3). – С. 22-23.

Shein Alexander Ivanovich

Penza state university of architecture and construction, Penza, Russia
E-mail: shein-ai@yandex.ru

Zemtsova Olga Grigorevna

Penza state university of architecture and construction, Penza, Russia
E-mail: zemtsova-og@yandex.ru

Research of the boundary hypersurface of the stability region in the axes of rigidity

Abstract. The stability region of the optimization problem is the set of those points that correspond to the rigidity of the system, under which the equilibrium is stable with respect to possible deviations of the given system. The stability region is separated from the instability region by a boundary hypersurface. The paper gives an earlier analytical solution of the problem of optimizing the rigidity of frame systems from the stability condition. In this case, the necessary first-order conditions do not determine the nature of the vector of the found values of the linear stiffnesses. As is well known, in the case of convexity of the hypersurface of the stability region in a given interval, the resolving equations give the global minimum.

In connection with this, this paper is devoted to the study of the convexity of the hypersurface of the domain of stability of a system in the axes of rigidity. This study essentially reduces to finding the sign-definite angular minors from the second differentials of the Lagrange function of the problem of optimizing the rigidity of the elements of frame systems. In this paper, we prove that the boundary hypersurface of the domain of stability of a system is convex and the conditionally stationary point x^* realizes a global minimum on a given interval. The proof was carried out by the authors by justifying the fact that the quadratic form of the second differentials of the Lagrange function is positive definite.

The solution given in the article refers to multi-storey overpasses, which are free and/or non-free frame systems. For such systems, the most typical is the exhaustion of the load-bearing capacity in the form of loss of stability. Thus, the analytical solution obtained by the authors of the problem of optimal design of the transport rack provides ready-made formulas for the design of structures of this type.

Keywords: stability; stability region; instability region; boundary hypersurface; convexity of a hypersurface; global minimum; optimization; analytical solution

REFERENCES

1. Shein A.I., Zemtsova O.G. (2010). Optimization of multimass vibration dampers with harmonic effect. *Izvestiya Vuzov. The Volga region. Technical science*, 1(13), pp. 113-122. (in Russian).
2. Shein A.I., Zemtsova O.G., Azimova Ja.A. (2017). Calculation and optimization of reinforcement of composite systems by the finite element method. *Modeling and mechanics of structures*, [online] 6, p. 2. Available at: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no6/stroitelnaya-mehanika/6.2/at_download/file.
3. Kornouhov N.V. (1949). Prochnost' i ustojchivost' sterzhnevyyh sistem. [*Strength and stability of rod systems.*] Moscow: Stroyizdat, p. 376.
4. Smirnov A.F. (1958). Ustojchivost' i kolebaniya sooruzhenij. [*Stability and oscillation of structures.*] Moscow: Transzheldorizdat, p. 571.
5. Shein A.I., Zemtsova O.G. (2018). Closed solution of the problem of optimizing multi-story frame systems from the stability conditions. *Russian journal of transport engineering*, [online] 2(5). Available at: <https://t-s.today/PDF/06SATS218.pdf> (in Russian). DOI: 10.15862/06SATS218
6. Smirnov A.F. (1958). Ustojchivost' i kolebaniya sooruzhenij. [*Stability and oscillation of structures.*] Moscow: Transzheldorizdat, p. 571.
7. Vasil'ev F.P. (1988). Chislennyye metody resheniya `ekstremal'nyh zadach. [*Numerical methods for solving extremal problems.*] Moscow: Science, p. 552.
8. Evtushenko Ju.G. (1982). Metody resheniya `ekstremal'nyh zadach i ih primeneniye v sistemah optimizatsii. [*Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems.*] Moscow: Science, p. 432.
9. Papkovich P.F. (1941). Stroitel'naya mehanika korablja. Chast' II. Slozhnyj izgib i ustojchivost' sterzhnej. Izgib i ustojchivost' plastin. [*Construction mechanics of the ship. Part II. Complex bending and stability of rods. Bending and stability of plates.*] Leningrad: Gosizdatsudprom.
10. Rzhantsyn A.R. (1964). On some properties of the stability region of equilibrium states. *Construction mechanics and design of structures*, 1, pp. 1-8. (in Russian).
11. Tsypinas I.K. (1968). On the question of the synthesis of optimal systems subject to loss of stability. *Lithuanian mechanical collection*, 2(3), pp. 22-23. (in Russian).