Интернет-журнал «Транспортные сооружения» <https://t-s.today>
Russian journal of transport engineering

2018, №2, Том 5 / 2018, No 2, Vol 5 <https://t-s.today/issue-2-2018.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/06SATS218.pdf>

DOI: 10.15862/06SATS218 (<http://dx.doi.org/10.15862/06SATS218>)

Статья поступила в редакцию 02.04.2018; опубликована 26.05.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:

Шеин А.И., Земцова О.Г. Замкнутое решение задачи оптимизации многоэтажных рамных систем из условия устойчивости // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2018 №2, <https://t-s.today/PDF/06SATS218.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/06SATS218

For citation:

Shein A.I., Zemtsova O.G. (2018). Closed solution of the problem of optimizing multi-story frame systems from the stability conditions. *Russian journal of transport engineering*, [online] 2(5). Available at: <https://t-s.today/PDF/06SATS218.pdf> (in Russian). DOI: 10.15862/06SATS218

УДК 624.04

ГРНТИ 67.03.03

Шеин Александр Иванович

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия
Проректор по научной работе
Заведующий кафедрой «Механика»
Доктор технических наук, профессор
E-mail: shein-ai@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=479939

Земцова Ольга Григорьевна

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», Пенза, Россия
Доцент кафедры «Механика»
Кандидат технических наук
E-mail: zemtsova-og@yandex.ru
РИНЦ: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=512862

Замкнутое решение задачи оптимизации многоэтажных рамных систем из условия устойчивости

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимизации многоэтажных рамных систем из условия устойчивости. При решении задачи оптимизации сечений элементов рамных систем, несущая способность которых определяется их устойчивостью, известными параметрами являются конфигурация, опорные крепления, материал и узловые нагрузки. В качестве оптимизируемого параметра принимается постоянная в пределах каждого стержня погонная жесткость на изгиб. Задача оптимизации решается по критерию минимума объема материала рамы.

Составленная авторами в общем виде математическая модель является задачей нелинейного математического программирования. Для ее решения используется метод множителей Лагранжа. Задача решается в два этапа. На первом этапе из условий стационарности авторами получены соотношения между узловыми перемещениями для свободных и несвободных рам. На втором этапе при найденных значениях этих соотношений детерминантное условие критического состояния рамной конструкции можно представить в виде системы уравнений. При этом система уравнений, полученная по методу множителей Лагранжа, становится аналитически разрешимой относительно неизвестных погонных

жесткостей, поскольку входящие в нее уравнения не содержат взаимных произведений трансцендентных функций от неизвестных.

В работе в замкнутом виде получены уравнения, позволяющие определить оптимальные погонные жесткости стоек и ригелей свободных и несвободных рам. Выполнена проверка полученного аналитического решения.

Для подбора оптимальных жесткостей из условия устойчивости нужно, задавшись конструктивными гибкостями элементов, с использованием представленных в статье функций определить критические параметры, а затем определить погонные жесткости стоек и ригелей.

Ключевые слова: оптимизация; устойчивость; погонная жесткость на изгиб; оптимальная жесткость стержня; многоэтажная рамная система; математическая модель; метод множителей Лагранжа; замкнутое решение

Введение

На предприятиях нефтеперерабатывающей, химической, газовой, металлургической, энергетической промышленности широко применяется транспортирование продукта по трубопроводам, прокладываемым над землей по отдельно стоящим опорам – многоэтажным эстакадам¹. В связи с широким использованием транспортных эстакад возникает проблема их рационального или оптимального проектирования. Расчетные схемы многоэтажных эстакад представляют собой свободные и/или несвободные рамные системы, для которых характерно исчерпание несущей способности в виде потери устойчивости. Таким образом, задача оптимального проектирования транспортной эстакады принимает вид задачи оптимизации многоэтажной рамной системы из условия устойчивости. Решения оптимизационных задач строятся и на основе серии численных решений [1, 2], и путем «нащупывания» и отбрасывания малоиспользуемых резервов конструктивной системы [3], и при помощи прямого численного решения задач нелинейного программирования и т. п. Но наиболее важными являются замкнутые решения задач оптимизации, позволяющие получать готовые формулы для проектирования отдельных классов конструкций [4, 5].

1. Математическая модель задачи оптимизации из условия устойчивости.

Определение оптимальных соотношений перемещений рам в критическом состоянии

При оптимизации сечений элементов рамных систем, несущая способность которых определяется их устойчивостью, известными являются конфигурация, опорные закрепления, материал и узловые нагрузки. Оптимизируемая рама состоит из n стержней неизвестной погонной жесткости на изгиб ($i_j = x_j$), которую примем постоянной в пределах каждого стержня. Требуется найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых функция веса (объема)

$$G = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^2 \cdot x_i$$

принимает минимальное значение. Здесь λ_i – конструктивная гибкость i -ого стержня. При этом необходимо, чтобы рама находилась в критическом состоянии, и были удовлетворены необходимые условия прочности.

Уравнение критического состояния по методу перемещений в матричной форме имеют вид:

¹ Пособие по проектированию отдельно стоящих опор и эстакад под технологические трубопроводы (к СНиП 2.09.03-85) [Текст]. / ЦНИИПромзданий. – М., 1989.

$$R \cdot Z = 0, \quad (1)$$

где Z – вектор-столбец неизвестных перемещений узлов рамы;

R – матрица реакций, соответствующая заданной системе.

Как известно, нетривиальному решению системы уравнений соответствует равенство нулю определителя системы уравнений (1):

$$|R| = \det[r_{ik}] = 0. \quad (2)$$

Это уравнение выражает условие критического состояния рамы.

Здесь r_{ik} – реакции в дополнительных связях от единичных перемещений узлов, зависящие от неизвестных погонных жесткостей стоек и ригелей и параметров

$$v_j = \sqrt{\frac{N_j \cdot h_j}{x_j}}, \quad (3)$$

где N_j – продольная сила в стержне;

h_j – длина стержня.

При решении задачи оптимизации сечений и жесткостей рамы расчетные нагрузки в узлах являются известными и принимаются как предельные (критические). Поэтому продольные силы N в отдельных элементах легко могут быть найдены.

Для многоэтажных свободных и несвободных рам (рис. 1) уравнение метода перемещений (1) имеют трехчленную структуру, а коэффициенты при неизвестных образуют якобиеву матрицу

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{m,m-1} & r_{mm} \end{pmatrix} \quad (4)$$

порядка $m \times m$.

Элементы этой матрицы имеют вид

$$r_{ik} = -x_k \frac{v_k}{\sin v_k}, \quad i \neq k$$
$$r_{kk} = x_{k-1} \frac{v_{k-1}}{\operatorname{tg} v_{k-1}} + x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + 6x_{m+k} \quad (5)$$

для свободных рам, и

$$r_{ik} = 2x_k \cdot \varphi_3(v_k), \quad i \neq k$$
$$r_{kk} = 4x_{k-1} \cdot \varphi_2(v_{k-1}) + 4x_k \cdot \varphi_2(v_k) + c_k x_{m+k} \quad (6)$$

для несвободных рам, где c_k – коэффициенты, характеризующие закрепление ригелей;
 $\varphi(v)$ – специальные функции [6, 7].

Рисунок 1. Деформированные схемы свободной и несвободной рам (составлено авторами)

Условие (2) является основным ограничением оптимизационной задачи из условия устойчивости. Ограничения по прочности сжатых элементов можно будет добавить после решения главной задачи.

Таким образом, математическая модель задачи может быть записана в виде:

Найти минимум веса (объема) материала рамы

$$\left. \begin{aligned} f(x) = V = \sum_{j=1}^{2m} \bar{\lambda}_j^2 \cdot x_j \\ \text{при условии} \quad R \cdot Z = 0, \quad Z \neq 0, \\ D(x) = |R| = \det[r_{ik}] = 0, \\ x_j \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Составленная в общем виде математическая модель (7) является задачей нелинейного математического программирования. Для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа. Этот метод, как показано ниже, позволяет получить замкнутое аналитическое решение и в процессе решения раскрывает очень важные особенности задачи оптимизации многоэтажных рам из условия устойчивости.

Составим функцию Лагранжа, т. е. перейдем от условной задачи (7) к безусловной

$$\Phi = V + u \cdot D(x), \quad (8)$$

где u – неопределенный множитель Лагранжа.

Необходимые условия минимума получаем, вычисляя и приравнявая нулю частные производные функции (8) по x_j и u :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial V}{\partial x_j} + u \cdot \frac{\partial D(x)}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= D(x) = \det[r_{ik}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, 2m, \quad (9)$$

Вектор неизвестных погонных жесткостей $\{x\}$ и множитель u можно определить непосредственно из решения системы уравнений (9). Однако, как отмечено в работе [8], даже при простейших расчетных схемах, такой способ оказывается практически нереализуемым из-за необходимости решения весьма сложных систем трансцендентных уравнений. По-видимому, по этой причине метод Лагранжа не находил непосредственного применения в оптимизационных задачах. Мы воспользуемся системой (9) для другой цели – попытаемся определить соотношения между неизвестными метода перемещений. При найденных значениях этих соотношений, условие критического состояния можно будет представить уже не равенством нулю детерминанта (2), а системой уравнений вида:

$$b_{k-1} \cdot r_{kk-1} + b_k \cdot r_{kk} + b_{k+1} \cdot r_{kk+1} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } b_k = Z_k / Z_n.$$

Рассмотрим последние $m+1$ уравнений системы (9), где дифференцирование ведется по жесткостям ригелей и параметру u :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+k}} &= \bar{\lambda}_{m+k}^2 + u \cdot \frac{\partial D(x)}{\partial x_{m+k}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \det[r_{ik}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Первые m уравнений системы (11) можно записать в виде:

$$\bar{\lambda}_{m+k}^2 + u \cdot c_k \cdot A_{kk} = 0, \quad (12)$$

где A_{kk} – алгебраическое дополнение элемента r_{kk} .

Представим эти алгебраические дополнения в виде произведения двух миноров:

$$A_{kk} = D_{k-1} \cdot D'_{m-k}, \quad (13)$$

где D_{k-1} – главные миноры $k-1$ порядка, имеющие вид:

$$D_0 = 1; \quad D_1 = r_{11}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}; \quad \dots$$

D'_{m-k} – главные миноры $m-k$ порядка, имеющие вид:

$$D_{m-1} = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} & 0 & \dots \\ r_{32} & r_{33} & r_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad D_{m-2} = \begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} & 0 & \dots \\ r_{43} & r_{44} & r_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}; \quad \dots$$

Преобразуем теперь уравнения (12) к виду

$$\frac{c_k}{\bar{\lambda}_{m+k}^2} + D_{k-1} \cdot D'_{m-k} = -\frac{1}{u}. \quad (14)$$

Последнее уравнение системы (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \det[r_{ik}] &= r_{11} \cdot D_{m-1} - r_{12}^2 \cdot D_{m-2} = \\ &= r_{11} \cdot r_{22} \cdot D_{m-2} - r_{12}^2 \cdot D_{m-2} - r_{11} \cdot r_{23}^2 \cdot D_{m-3} = \dots = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим совместное решение уравнений $m+k$, $m+k+1$ и $2m+1$ системы (11). Выражения для D_{k-1} будем записывать в развернутой форме. Для $k=1$ получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{\bar{\lambda}_{m+1}^2} \cdot D'_{m-1} &= \frac{c_2}{\bar{\lambda}_{m+2}^2} \cdot r_{11} \cdot D'_{m-2} \\ r_{11} \cdot D'_{m-1} &= r_{12}^2 \cdot D'_{m-2} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$r_{11}^2 \cdot \frac{\bar{\lambda}_{m+1}^2}{c_1} = r_{12}^2 \cdot \frac{\bar{\lambda}_{m+2}^2}{c_2}, \quad (17)$$

откуда

$$r_{11} \cdot \bar{\lambda}_{m+1} \cdot c_1^{-1/2} = \pm r_{12} \cdot \bar{\lambda}_{m+2} \cdot c_2^{-1/2}. \quad (18)$$

Учитывая схему деформации свободной и несвободной рамы при потере устойчивости (рис. 1) получаем для свободной рамы ($c_k = \text{const}$):

$$\bar{\lambda}_{m+1} \cdot r_{11} + \bar{\lambda}_{m+2} \cdot r_{12} = 0, \quad (19a)$$

для несвободной рамы:

$$\bar{\lambda}_{m+1} \cdot c_1^{-1/2} \cdot r_{11} - \bar{\lambda}_{m+2} \cdot c_2^{-1/2} \cdot r_{12} = 0. \quad (19b)$$

Рассмотрим $m+2$, $m+3$ и $2m+1$ уравнения ($k=2$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_2}{\bar{\lambda}_{m+2}^2} \cdot r_{11} \cdot D'_{m-2} &= \frac{c_3}{\bar{\lambda}_{m+3}^2} \cdot (r_{11}r_{22} - r_{12}^2) \cdot D'_{m-3} \\ (r_{11}r_{22} - r_{12}^2) \cdot D'_{m-2} &= r_{11}r_{23}^2 \cdot D'_{m-3} \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

откуда с учетом (19a) и (19b) получаем для свободной рамы

$$\bar{\lambda}_{m+1} \cdot r_{21} + \bar{\lambda}_{m+2} \cdot r_{22} + \bar{\lambda}_{m+3} \cdot r_{23} = 0, \quad (21a)$$

для несвободной рамы:

$$-\bar{\lambda}_{m+1} \cdot c_1^{-1/2} \cdot r_{21} + \bar{\lambda}_{m+2} \cdot c_2^{-1/2} \cdot r_{22} - \bar{\lambda}_{m+3} \cdot c_3^{-1/2} \cdot r_{23} = 0. \quad (21б)$$

Совместное решение уравнений $m+3$, $m+4$ и $2m+1$ с учетом полученных выражений (21а) и (21б) дает

$$\bar{\lambda}_{m+2} \cdot r_{32} + \bar{\lambda}_{m+3} \cdot r_{33} + \bar{\lambda}_{m+4} \cdot r_{34} = 0$$

и

$$-\bar{\lambda}_{m+2} \cdot c_2^{-1/2} \cdot r_{32} + \bar{\lambda}_{m+3} \cdot c_3^{-1/2} \cdot r_{33} - \bar{\lambda}_{m+4} \cdot c_4^{-1/2} \cdot r_{34} = 0.$$

Очевидно, что k -ое уравнение будет иметь вид

$$\pm \bar{\lambda}_{m+k-1} \cdot c_{k-1}^{-1/2} \cdot r_{kk-1} + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot r_{kk} \pm \bar{\lambda}_{m+k+1} \cdot c_{k+1}^{-1/2} \cdot r_{kk+1} = 0. \quad (22а)$$

Таким образом, отношение угловых перемещений имеет вид

$$\frac{Z_k}{Z_{k+n}} = \frac{\bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2}}{\bar{\lambda}_{m+k+n} \cdot c_{k+n}^{-1/2}}. \quad (23)$$

Для рам регулярной структуры с одинаковыми значениями конструктивной гибкости ригелей получаем

$$Z_k = \text{const}. \quad (24)$$

При этом уравнения (а) примут вид

$$\pm r_{kk-1} + r_{kk} \pm r_{kk+1} = 0. \quad (22б)$$

Аналогичные (24) и (22б) зависимости и для $n(m_1-2)$ уравнений в случае, когда n частей рамы состоят из m_1 этажей с одинаковыми гибкостями $\bar{\lambda}_{m+k}$.

Таким образом, условия стационарности (9) позволили установить соотношения между неизвестными метода перемещений исходной задачи (7).

Эти соотношения можно использовать для дискретизации детерминантного критерия потери устойчивости.

2. Аналитическое решение задачи оптимизации

Воспользуемся полученными уравнениями (22а) для формирования ограничений в виде системы уравнений вместо общего определителя (2).

Рассматриваемая задача (7) будет иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Найти} \\ \min f(x) = V = \sum_{j=1}^{2m} x_j \cdot \bar{\lambda}_j^2 \\ \text{при} \\ \psi_k = \pm \bar{\lambda}_{m+k-1} \cdot c_{k-1}^{-1/2} \cdot r_{kk-1} + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot r_{kk} \pm \bar{\lambda}_{m+k+1} \cdot c_{k+1}^{-1/2} \cdot r_{kk+1} = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{а)} \\ \text{б)} \end{array} \quad (25)$$

Функция Лагранжа примет вид:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{2m} x_j \cdot \bar{\lambda}_j^2 + \sum_{k=1}^m u_k \cdot \psi_k, \quad (26)$$

а необходимые условия стационарности запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} &= \bar{\lambda}_k^2 + u_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+k}} &= \bar{\lambda}_{m+k}^2 + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot u_k = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} &= \pm \bar{\lambda}_{m+k-1} \cdot c_{k-1}^{-1/2} \cdot r_{kk-1} + \bar{\lambda}_{m+k} \cdot c_k^{-1/2} \cdot r_{kk} \pm \bar{\lambda}_{m+k+1} \cdot c_{k+1}^{-1/2} \cdot r_{kk+1} = 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{а)} \\ \text{б)} \\ \text{в)} \end{array} \quad (27)$$

Эта система уже аналитически разрешима относительно неизвестных погонных жесткостей x_j и параметров u_k , поскольку входящие в нее уравнения не содержат взаимных произведений трансцендентных функций от неизвестных.

Из (27б) находим

$$u_k = -c_k^{-1/2} \cdot \bar{\lambda}_{m+k}. \quad (28)$$

Следовательно, чтобы определить значения $x_1, x_2, \dots, x_m$, соответствующие погонным жесткостям стоек, надо последовательно решить m уравнений (27а), каждое от одной переменной. Значения переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}$ находятся из условий (27в), в которые подставляются найденные $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Для рам со смещающимися узлами уравнения (27в) имеют вид

$$\psi_1 = \left(x_1 \frac{v_1}{\operatorname{tg} v_1} + x_2 \frac{v_2}{\operatorname{tg} v_2} + 6x_{m+1} \right) \bar{\lambda}_{m+1} - \bar{\lambda}_{m+1} x_2 \frac{v_2}{\sin v_2} = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi_k &= \bar{\lambda}_{m+k-1} \left(-x_k \frac{v_k}{\sin v_k} \right) + \bar{\lambda}_{m+k} \left(x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\operatorname{tg} v_{k+1}} + 6x_{m+k} \right) + \\ &+ \bar{\lambda}_{m+k+1} \left(-x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\sin v_{k+1}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$\gamma_1(v) = \left(x \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)' \cdot 2 = \frac{v}{\operatorname{tg} v} + \left(\frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)^2 + v^2, \quad (31)$$

$$\gamma_2(v) = \left(x \frac{v}{\sin v} \right)' \cdot 2 = \frac{v}{\sin v} + \left(\frac{v}{\sin v} \right)^2 \cdot \cos v, \quad (32)$$

$$\gamma_3(v) = \left(x \frac{v}{\operatorname{tg} v} - x \frac{v}{\sin v} \right)' = \left(\frac{v}{2} \right)^2 + \left(\frac{v}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^2 - \frac{v}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (33)$$

Теперь уравнения (27а) для свободных рам с учетом (29) и (30) получаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(v_1) &= \frac{24\bar{\lambda}_1^2}{\bar{\lambda}_{m+1}^2} \\ \gamma_1(v_k)(\bar{\lambda}_{m+k-1}^2 + \bar{\lambda}_{m+k}^2) - 2\bar{\lambda}_{m+k-1}\bar{\lambda}_{m+k}\gamma_2(v_k) &= 24\bar{\lambda}_k^2 \end{aligned} \right\}. \quad (34)$$

Для рам с несмещающимися узлами уравнения (27в) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \bar{\lambda}_{m+1}c_1^{-1/2} [4x_1\varphi_2(v_1) + 4x_2\varphi_2(v_2) + c_1x_{m+1}] - \bar{\lambda}_{m+2}c_2^{-1/2} [2x_2\varphi_3(v_2)] = 0 \\ \psi_k &= -\bar{\lambda}_{m+k-1}c_{k-1}^{-1/2} [2x_k\varphi_3(v_k)] + \bar{\lambda}_{m+k}c_k^{-1/2} [4x_k\varphi_2(v_k) + 4x_{k+1}\varphi_2(v_{k+1}) + c_kx_k] - \\ &\quad - \bar{\lambda}_{m+k+1}c_{k+1}^{-1/2} [2x_{k+1}\varphi_3(v_{k+1})] = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (35)$$

Уравнения (27а) с учетом (35) получаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v_1) &= \frac{\bar{\lambda}_1^2 c_1}{\bar{\lambda}_{m+1}^2}, \\ \left(\frac{\bar{\lambda}_{m+k-1}^2}{c_{k-1}} + \frac{\bar{\lambda}_{m+k}^2}{c_k} \right) \theta_1(v_k) - 2(c_{k-1}c_k)^{-1/2} \bar{\lambda}_{m+k-1}\bar{\lambda}_{m+k}\theta_2(v_k) &= \bar{\lambda}_k^2, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где обозначено:

$$\theta_1(v_k) = [4x\varphi_2(v_k)]' = \frac{1}{4}v_k \frac{1 - \left(\frac{v_k}{\sin v_k} \right)^2}{\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_k}{2} \operatorname{tg} \frac{v_k}{2} \right)^2 \frac{1 - \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k}}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2} \right)^2}, \quad (37)$$

$$\theta_2(v_k) = [2x\varphi_3(v_k)]' = \frac{1}{4}v_k \frac{\left(\frac{v_k}{\sin v_k} \right)^2 \cos v_k - 1}{\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_k}{2} \operatorname{tg} \frac{v_k}{2} \right)^2 \frac{\frac{v_k}{\sin v_k} - 1}{\left(\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} - \frac{v_k}{2} \right)^2}. \quad (38)$$

Введем обозначение:

$$\theta_3(v) = [4x\varphi_2(v) - 2x\varphi_3(v)]' = \frac{v/2}{\operatorname{tg} \frac{v}{2}} + \left(\frac{v/2}{\operatorname{tg} \frac{v}{2}} \right)^2 + \left(\frac{v}{2} \right)^2. \quad (39)$$

Для рам регулярной структуры с одинаковыми значениями конструктивной гибкости ригелей уравнения (34) и (36) примут вид

$$\gamma_3(v) = \frac{6\bar{\lambda}_k^2}{\bar{\lambda}_{m+k}^2}, \quad (34a)$$

$$\theta_3(v) = \frac{\bar{\lambda}_k^2 c_k}{2\bar{\lambda}_{m+k}}. \quad (36a)$$

Из уравнений (34) и (36) по известным значениям гибкостей легко определяются погонные жесткости стоек $x_1, x_2, \dots, x_m$, а затем из уравнений (27в) – значения погонных жесткостей ригелей рам.

Проведем проверку аналитического решения. Необходимо убедиться в тождественности решений исходной (7) и преобразованной (25) задач. Для этого нужно, чтобы решение преобразованной задачи (34) или (36) обращало уравнение стационарности исходной задачи (9) в тождество. Поскольку в процессе решения нам понадобится дифференцировать определитель матрицы жесткостей, то, чтобы не загромождать решение, ограничимся рассмотрением двухэтажной свободной рамы. Определитель этой рамы имеет вид

$$D(x) = \det[r_{ik}] = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}. \quad (40)$$

Необходимые условия экстремума (9) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D(x)}{\partial x_1} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r_{11}}{\partial x_1} & 0 \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial r_{11}}{\partial x_1} r_{22} = -\frac{2\bar{\lambda}_1^2}{u}, \\ \frac{\partial D(x)}{\partial x_2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial r_{12}}{\partial x_2} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ \frac{\partial r_{21}}{\partial x_2} & \frac{\partial r_{22}}{\partial x_2} \end{vmatrix} = -\frac{2\bar{\lambda}_2^2}{u}, \\ \frac{\partial D(x)}{\partial x_3} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r_{11}}{\partial x_3} & 0 \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \frac{\partial r_{11}}{\partial x_3} r_{22} = 6r_{22} = -\frac{\bar{\lambda}_3^2}{u}, \\ \frac{\partial D(x)}{\partial x_4} &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & \frac{\partial r_{22}}{\partial x_4} \end{vmatrix} = \frac{\partial r_{22}}{\partial x_4} r_{11} = 6r_{11} = -\frac{\bar{\lambda}_4^2}{u}, \\ D(x) &= r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Третье и четвертое уравнения полученной системы дают

$$r_{22} = -\frac{\bar{\lambda}_3^2}{6u}, \quad (42)$$

$$r_{11} = -\frac{\bar{\lambda}_4^2}{6u}. \quad (43)$$

Из последнего уравнения системы (41) получаем

$$r_{12} = \sqrt{r_{11} r_{22}}, \quad (44)$$

или с учетом (42) и (43)

$$r_{12} = \frac{\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_4}{6u}. \quad (45)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{11}}{\partial x_1} &= \left(x_1 \frac{v_1}{\operatorname{tg} v_1} \right)' = \frac{\gamma_1(v_1)}{2}, \\ \frac{\partial r_{11}}{\partial x_2} &= \frac{\partial r_{22}}{\partial x_2} = \left(x_2 \frac{v_2}{\operatorname{tg} v_2} \right)' = \frac{\gamma_1(v_2)}{2}, \end{aligned} \quad (46)$$

и подставляя полученные выражения в первые два уравнения системы (41), получаем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(v_1) &= \frac{24\bar{\lambda}_1^2}{\bar{\lambda}_3^2}, \\ (\bar{\lambda}_3^2 + \bar{\lambda}_4^2)\gamma_1(v_2) - 2\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4\gamma_2(v_2) &= 24\bar{\lambda}_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Эти уравнения полностью соответствуют уравнениям аналитического решения (34). Подстановка численного решения, получаемого из уравнений (34) и (27в), в уравнения стационарности (9) обращает их в тождество. Таким образом, решения задач (7) и (25) совпадают.

Для подбора оптимальных жесткостей из условия устойчивости нужно, задавшись конструктивными гибкостями элементов, с использованием функций $\gamma(v)$ и $\theta(v)$ определить критические параметры, чтобы затем из уравнений

$$x_i = \frac{N_i \cdot h_i}{v_i^2} \quad (48)$$

определить погонные жесткости стоек.

Погонные жесткости ригелей вычисляются из уравнений

$$\begin{aligned} x_{m+k} &= \frac{\bar{\lambda}_{m+k-1} x_k \frac{v_k}{\sin v_k} - \bar{\lambda}_{m+k} \left(x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\operatorname{tg} v_{k+1}} \right)}{6} + \\ &\quad + \frac{\bar{\lambda}_{m+k+1} x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\sin v_{k+1}}}{6} \end{aligned} \quad (49)$$

для свободных рам, и

$$x_{m+k} = \frac{\bar{\lambda}_{m+k-1} c_{k-1}^{-1/2} 2x_{k-1} \varphi_3(v_{k-1})}{\bar{\lambda}_{m+k} c_k^{-1/2}} -$$

$$- \frac{\bar{\lambda}_{m+k} c_k^{-1/2} [4x_k \varphi_2(v_k) + 4x_{k+1} \varphi_2(v_{k+1})] \left(x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} + x_{k+1} \frac{v_{k+1}}{\operatorname{tg} v_{k+1}} \right)}{\bar{\lambda}_{m+k} c_k^{-1/2}} +$$

$$+ \frac{\bar{\lambda}_{m+k+1} c_{k+1}^{-1/2} 2x_{k+1} \varphi_3(v_{k+1})}{\bar{\lambda}_{m+k} c_k^{-1/2}} \quad (50)$$

для несвободных рам.

Для регулярных рам формулы для определения жесткостей ригелей, с учетом выражений

$$x_k \frac{v_k}{\operatorname{tg} v_k} - x_k \frac{v_k}{\sin v_k} = -x_k v_k \operatorname{tg} \left(\frac{v_k}{2} \right), \quad (51)$$

$$4x_k \varphi_2(v_k) - 2x_k \varphi_3(v_k) = x_k \frac{v_k}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{v_k}{2} \right), \quad (52)$$

удобнее представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_{m+1} &= -\frac{1}{6} x_1 \frac{v_1}{\operatorname{tg} v_1} + \frac{1}{6} x_2 v_2 \operatorname{tg} \left(\frac{v_2}{2} \right) \\ x_{m+k} &= -\frac{1}{6} (x_k + x_{k+1}) v \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_{m+1} &= -\frac{1}{c} \left[4x_1 \varphi_2(v_1) + x_2 \frac{v/2}{\operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} \right)} \right] \\ x_{m+k} &= -\frac{1}{c} (x_k + x_{k+1}) \frac{v/2}{\operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (50a)$$

для свободных и несвободных рам, соответственно. При выпуклости области устойчивости [9, 10, 11] решение имеет глобальный характер.

Заключение

Таким образом, получены разрешающие уравнения, позволяющие легко определить оптимальные условия устойчивости жесткости плоских рам. Для свободных рам это уравнения (34), (48) и (49); для несвободных рам с несмещающимися узлами это уравнения (36), (48), (50).

ЛИТЕРАТУРА

1. Муханов А.В. Оптимизация строительных конструкций на основе численного и аналитического решения задач механики неоднородных тел: автореф. дис. ... канд. тех. наук [Текст]. – Ростов-на-Дону, 2013. – 24 с.
2. Шеин А.И., Земцова О.Г., Азимова Я.А. Расчёт и оптимизация арматуры композитных систем методом конечных элементов [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. – 2017. – №6. – Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnal/nob/stroitel'naya-mehanika/6.2/at_download/file.
3. Мироненко И.В. Оптимизация конструкций железобетонных балок и рам методом эволюционного моделирования: автореф. дис. ... канд. тех. наук [Текст]. – Брянск, 2013. – 20 с.
4. Шеин А.И. Оптимальные размеры прямоугольного сечения бруса при косом изгибе // Интернет-журнал «Науковедение», 2016, Том 8, №2 [Электронный ресурс]. – М.: Науковедение, 2016. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/116TVN216.pdf> (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ.
5. Шеин А.И., Земцова О.Г. Оптимизация многомассовых гасителей колебаний при гармоническом воздействии [Текст] // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 113-122.
6. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем [Текст]. – М.: Стройиздат, 1949. – 376 с.
7. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений [Текст]. – М.: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
8. Гениев Г.А. О принципе эквиградиентности и применении его к оптимизационным задачам устойчивости стержневых систем [Текст] // Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. – №6. – С. 8-13.
9. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Часть II. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин [Текст]. – Л.: Госиздатсудпром, 1941.
10. Ржаницын А.Р. О некоторых свойствах области устойчивости состояний равновесия [Текст] // Строительная механика и расчет сооружений. – 1964. – №1. – С. 1-8.
11. Цыпинас И.К. К вопросу о синтезе оптимальных систем, подверженных потере устойчивости [Текст]. – В кн.: Литовский механический сборник. – Вильнюс. – 1968. – №2(3). – С. 22-23.

Shein Alexander Ivanovich

Penza state university of architecture and construction, Penza, Russia
E-mail: shein-ai@yandex.ru

Zemtsova Olga Grigorevna

Penza state university of architecture and construction, Penza, Russia
E-mail: zemtsova-og@yandex.ru

Closed solution of the problem of optimizing multi-story frame systems from the stability conditions

Abstract. The article deals with the problem of optimizing multi-story frame systems from the stability condition. When solving the problem of optimizing the cross-sections of the elements of frame systems, the bearing capacity of which is determined by their stability, the known parameters are configuration, support fastenings, material and nodal loads. As an optimized parameter, the constant bending stiffness within each rod is assumed. The optimization problem is solved by the criterion of minimum volume of the frame material.

The mathematical model compiled by the authors in a general form is a nonlinear mathematical programming problem. To solve it, the method of Lagrange multipliers is used. The problem is solved in two stages. At the first stage of the stationary conditions, the authors obtained the relationships between the nodal displacements for free and non-free frames. In the second stage, at the found values of these relations, the determinant condition of the critical state of the frame structure can be represented in the form of a system of equations. In this case, the system of equations obtained by the method of Lagrange multipliers becomes analytically solvable with respect to unknown linear stiffnesses, since the equations entering into it do not contain reciprocal products of transcendental functions from unknowns.

In work, in closed form, equations are obtained that allow determining the optimal linear stiffnesses of columns and crossbars of free and non-free frames. The analytical solution obtained is checked.

To select the optimal stiffnesses from the stability condition, it is necessary to define the critical parameters using the constructive flexibility of the elements, using the functions presented in the paper, and then determine the linear stiffnesses of the posts and crossbars.

Keywords: optimization; stability; bending stiffness; optimal stiffness of the rod; multi-storey frame system; mathematical model; Lagrange multiplier method; closed solution

REFERENCES

1. Mukhanov A.V. (2013). Optimizatsiia stroitelnykh konstruksii na osnove chislennogo i analiticheskogo resheniia zadach mekhaniki neodnorodnykh tel. [*Optimization of building structures on the basis of numerical and analytical solution of problems of mechanics of heterogeneous bodies.*] Rostov-on-Don, p. 24.
2. Shein A.I., Zemtsova O.G., Azimova Ja.A. (2017). Calculation and optimization of reinforcement of composite systems by the finite element method. *Modeling and mechanics of structures*, [online] 6. Available at: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no6/stroitel'naya-mehanika/6.2/at_download/file (in Russian).
3. Mironenko I.V. (2013). Optimizatsiya konstruksij zhelezobetonnyh balok i ram metodom `evoljutsionnogo modelirovaniya. [*Optimization of the structures of reinforced concrete beams and frames by the method of evolutionary modeling.*] Bryansk, p. 20.
4. Shein A.I. (2017). Optimum dimensions of a rectangular section of a beam with oblique bending. *Naukovedenie*, [online] 2(8). Available at: <http://naukovedenie.ru/PDF/116TVN216.pdf> (in Russian).
5. Shein A.I., Zemtsova O.G. (2010). Optimization of multimass vibration dampers with harmonic effect. *Proceedings of high schools. The Volga region. Technical science*, [online] 1(13), pp. 113-122. (in Russian).
6. Kornouhov N.V. (1949). Prochnost' i ustojchivost' sterzhnevyyh sistem. [*Strength and stability of rod systems.*] Moscow: Stroyizdat, p. 376.
7. Smirnov A.F. (1958). Ustojchivost' i kolebaniya sooruzhenij. [*Stability and oscillation of structures.*] Moscow: Transzheldorizdat, p. 571.
8. Geniev G.A. (1979). On the principle of equi-gradientness and its application to optimization problems of stability of rod systems. *Construction mechanics and design of structures*, [online] 6, pp. 8-13. (in Russian).
9. Papkovich P.F. (1941). Stroitel'naja mehanika korablja. Chast' II. Slozhnyj izgib i ustojchivost' sterzhnej. Izgib i ustojchivost' plastin. [*Construction mechanics of the ship. Part II. Complex bending and stability of rods. Bending and stability of plates.*] Leningrad: Gosizdatsudprom.
10. Rzhantsyn A.R. (1979). On some properties of the stability region of equilibrium states. *Construction mechanics and design of structures*, [online] 1, pp. 1-8. (in Russian).
11. Tsypinas I.K. (1968). On the question of the synthesis of optimal systems subject to loss of stability. *Lithuanian mechanical collection*. - Vilnius, [online] 2(3), pp. 22-23. (in Russian).