Интернет-журнал «Транспортные сооружения» <https://t-s.today>
Russian journal of transport engineering

2018, №1, Том 5 / 2018, No 1, Vol 5 <https://t-s.today/issue-1-2018.html>

URL статьи: <https://t-s.today/PDF/02SATS118.pdf>

DOI: 10.15862/02SATS118 (<http://dx.doi.org/10.15862/02SATS118>)

Статья поступила в редакцию 22.01.2018; опубликована 15.03.2018

Ссылка для цитирования этой статьи:

Пашков А.В. Динамический расчет балки на действие вращающегося эксцентрика как системы с двумя степенями свободы // Интернет-журнал «Транспортные сооружения», 2018 №1, <https://t-s.today/PDF/02SATS118.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/02SATS118

For citation:

Pashkov A.V. (2018). Dynamic calculation of the beam to the action of the rotating eccentric as a system with two degrees of freedom. *Russian journal of transport engineering*, [online] 1(5). Available at: <https://t-s.today/PDF/02SATS118.pdf> (in Russian) DOI: 10.15862/02SATS118

УДК 624.04

Пашков Алексей Владимирович

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский московский государственный строительный университет»
Москва, Россия¹

Доцент кафедры «Строительной и теоретической механики»

Кандидат технических наук

E-mail: PashkovAV@mgsu.ru

Динамический расчет балки на действие вращающегося эксцентрика как системы с двумя степенями свободы

Аннотация. В статье рассматриваются колебания упругой балки, вызванные инерционным воздействием неуровновешенного массивного вращающегося элемента. В отличие от традиционной модели с одной степенью свободы, учитывающей только прогиб балки, принята модель, учитывающая ещё и поворот оси балки за счет действия инерционного момента. Таким образом, балка с грузом рассматривается как упругая система с двумя степенями свободы.

Общий вид решения дифференциальных уравнений колебания системы получен для произвольного закрепления балки и произвольного расположения на ней установки с эксцентриком. Для частного случая – шарнирно закрепленной балки с расположением установки в середине пролета – получены собственные частоты, амплитудные значения прогиба и угла поворота, изгибающие моменты в наиболее напряженных сечениях. Исследована зависимость максимальных моментов от частоты вращения оси эксцентрика, а также от геометрических и инерционных свойств системы – радиуса инерции установки с эксцентриком, положения оси вращения над осью балки. Построены амплитудно-частотные характеристики.

Проведен анализ полученных результатов и их сравнение с результатами расчета по классической модели с одной степенью свободы. На основании этого в каждом конкретном случае можно судить об актуальности учета второй степени свободы или об отсутствии такой

¹ 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

необходимости. Показано, что полученные результаты в частном случае (при расположении оси вращения эксцентрика на одном уровне с осью балки) совпадают с классическими.

Ключевые слова: динамическая нагрузка; инерционная нагрузка; эксцентрик; возмущающая сила; вынужденные колебания; дифференциальные уравнения колебаний; собственные частоты; собственные формы; коэффициент динамичности; упругая балка; степень свободы

Введение

Большинство современных зданий и сооружений и элементы их конструкций в той или иной мере подвержены действию динамических нагрузок самой разнообразной природы. Это и сейсмическое воздействие, и действие технологических процессов на конструкции производственных зданий, и нагрузка от движущегося транспорта на элементы транспортных сооружений, и ветровая нагрузка. Динамические нагрузки могут возникать как в процессе эксплуатации сооружений, так и в процессе их возведения. Такие нагрузки зачастую многократно превышают статические и могут привести к недопустимым деформациям и напряжениям в элементах конструкций вплоть до их разрушения.

Изучению динамического поведения механических систем, конструкций и их элементов посвящено большое число исследований, отраженных как в классической, так и в современной литературе, например [2, 4, 5, 10]. Тем не менее, дальнейшее совершенствование и уточнение моделей динамического расчета конструкций не утрачивает своей актуальности.

В качестве источников динамического воздействия часто выступают различные технологические установки, станки, машины, имеющие неуравновешенные вращающиеся элементы (в дальнейшем будем применять к ним условный обобщающий термин «мотор с эксцентром»). Такое воздействие имеет гармонический характер, и является одним из классических примеров, приводимых в литературе по теории колебаний и динамике сооружений, например [8, 10]. Однако, как правило, его сводят к двум силам – вертикальной и горизонтальной составляющим силы инерции эксцентрика (рисунк 1), не учитывая создаваемый ею момент. Если основанием мотора служит балка, то в расчетной схеме его обычно заменяют точечной массой. При этом, ввиду значительно большей жесткости балки на растяжение-сжатие по сравнению с ее изгибной жесткостью, горизонтальными колебаниями мотора пренебрегают и учитывают только его вертикальные перемещения. Таким образом, расчетная модель балки с установленным на ней мотором представляется как система с одной степенью свободы, исследование которой хорошо отработано и не представляет больших сложностей [4, 7].

Рисунок 1. Классическая расчетная модель балки с вращающимся эксцентром (рисунок автора)

В работах [4, 9] упоминается о возможности учета инерции вращения. В этом случае мотор уже не может быть представлен точечной массой – необходимо учитывать его момент инерции. Таким образом, система имеет уже две степени свободы, а при учете горизонтальных колебаний – три. Однако дальнейшая методика динамического расчета балки с учетом этих

факторов не приводится. А она, как будет показано ниже, имеет существенные особенности по сравнению с обычно применяемыми методиками расчета систем с конечным числом степеней свободы.

Цели и задачи исследования

Целью настоящей работы является исследование вынужденных колебаний балки и возникающих в ней динамических усилий, возбуждаемых мотором с эксцентриком, с учетом инерции вращения и оценка актуальности учета появляющейся при этом второй степени свободы по сравнению с расчетом, учитывающим только одну степень свободы.

Основными задачами исследования являются:

- получение уравнений вынужденных колебаний мотора, как системы с двумя степенями свободы;
- определение динамических изгибающих моментов в сечениях шарнирно опертой балки;
- сравнение полученных результатов с известными результатами расчета, учитывающего одну степень свободы;
- оценка актуальности учета второй степени свободы в зависимости от геометрических и инерционных параметров системы.

Общая постановка задачи и методика решения

Рассмотрим невесомую упругую балку с произвольными граничными условиями, на которой закреплена массивная установка с неуравновешенным вращающимся элементом массы m_0 . Его можно заменить точечной массой (эксцентриком), смещенной относительно оси вращения на расстояние e (рис. 1а). Масса установки вместе с эксцентриком – m (при существенной массе балки она может быть включена сюда же с соответствующим коэффициентом приведения [7]). Высота оси вращения эксцентрика над балкой – h . Положение эксцентрика в произвольный момент времени определяется углом поворота α . При равномерном (установившемся) вращении $\alpha = Pt$, где P – угловая скорость в рад/с.

Рисунок 2. Расчетная схема задачи с учетом инерционного момента:

- а) параметры мотора с эксцентриком; б) приведение силы инерции к центру O ;
в) обобщенные координаты (рисунок автора)

Используя принцип Даламбера [1], динамическую нагрузку можно представить в виде силы инерции эксцентрика $\bar{\Phi}$. При равномерном вращении ее линия действия всегда проходит через ось вращения (центробежная сила), а модуль $\Phi = m_0 p^2 e$. Приводя нагрузку к центру O балки (рис. 1б), получим две силы и момент, изменяющиеся по гармоническому закону:

$$\Phi_x = \Phi \sin \alpha = m_0 p^2 e \sin pt;$$

$$\Phi_y = \Phi \cos \alpha = m_0 p^2 e \cos pt;$$

$$M_{Oz} = \Phi l \sin \alpha = m_0 p^2 e l \sin pt.$$

Пренебрегая горизонтальным перемещением мотора ввиду его малости по сравнению с вертикальным, получим систему с двумя степенями свободы, положение которой в произвольный момент времени определяется координатой y точки O (прогибом) и углом поворота φ (рис. 1в). Инерционные свойства системы определяются массой m мотора с эксцентриком и его моментом инерции относительно оси Oz : $J_{Oz} = J$.

Дифференциальные уравнения движения такой системы имеют вид [6, 11]:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = Q_1(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = Q_2(t) \end{cases}, \quad (1)$$

где: q_i – обобщенные координаты системы, a_{ij} – обобщенные коэффициенты инерции, c_{ij} – коэффициенты жесткости, $Q_i(t)$ – обобщенные силы.

В рассматриваемом случае

$$q_1 = y, \quad q_2 = \varphi, \quad a_{11} = m, \quad a_{22} = J, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \\ Q_1(t) = \Phi \cos pt, \quad Q_2(t) = \Phi h \sin pt,$$

и уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + c_{11}y + c_{12}\varphi = \Phi \cos pt \\ J\ddot{\varphi} + c_{21}y + c_{22}\varphi = \Phi h \sin pt \end{cases}. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) являются неоднородными, решение которых складывается из общего решения соответствующих однородных уравнений и частных решений неоднородных. Ограничимся исследованием частных решений, так как именно они определяют вынужденные колебания системы.

Заметим, что при совпадении фаз обобщенных сил частное решение системы (1) хорошо известно и приводится в многочисленной литературе по динамике сооружений [2, 4, 7]. Именно оно используется в большинстве исследований колебаний систем с двумя и более степенями свободы. В рассматриваемом же случае фазы обобщенных сил смещены друг относительно друга на величину $\pi/2$. Поэтому частное решение имеет более сложный вид:

$$\tilde{y} = A_1 \cos pt + B_1 \sin pt; \quad \tilde{\varphi} = A_2 \cos pt + B_2 \sin pt. \quad (3)$$

После подстановки решения (3) в систему (2) и группировки коэффициентов при $\cos pt$ и $\sin pt$ получаем систему алгебраических уравнений относительно A_1, B_1, A_2, B_2 , решая которую, находим

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{(c_{22} - Jp^2)\Phi}{c_{12}^2 - (c_{11} - mp^2)(c_{22} - Jp^2)}; & B_1 &= \frac{c_{12}\Phi h}{c_{12}^2 - (c_{11} - mp^2)(c_{22} - Jp^2)}; \\ A_2 &= \frac{c_{12}\Phi}{c_{12}^2 - (c_{11} - mp^2)(c_{22} - Jp^2)}; & B_2 &= -\frac{(c_{11} - mp^2)\Phi h}{c_{12}^2 - (c_{11} - mp^2)(c_{22} - Jp^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, вынужденные колебания по каждой из обобщенных координат представляют собой гармонические колебания с одинаковой частотой p и смещенные друг относительно друга по фазе на $\pi/2$.

Решение частной задачи

Дальнейшее исследование целесообразно проводить, имея конкретные условия закрепления балки и положение мотора на ней. Рассмотрим шарнирно-опертую балку длины l с расположением мотора в середине пролета. Линейные и угловые перемещения δ_{ij} срединного сечения балки от единичной силы и единичного момента могут быть определены известным способом по формуле Мора [3]. В рассматриваемом случае они имеют значения:

$$\delta_{11} = l^3/48EI = l^2/48i; \quad \delta_{22} = l/12EI = 1/12i; \quad \delta_{12} = 0,$$

где: $i = EI/l$ – приведенная жесткость балки.

Единичные эпюры моментов приведены на рисунке 3.

Рисунок 3. Эпюры моментов от единичных воздействий (рисунок автора)

Так как матрица коэффициентов δ_{ij} – оказалась диагональной, коэффициенты c_{ij} обратной ей матрицы жесткости имеют значения:

$$c_{11} = 1/\delta_{11} = 48i/l^2; \quad c_{22} = 1/\delta_{22} = 12i; \quad c_{12} = 0,$$

а собственные частоты

$$k_1 = \sqrt{c_{11}/m} = \sqrt{48i/ml^2} = \frac{4}{l} \sqrt{\frac{3i}{m}}; \quad k_2 = \sqrt{c_{22}/J} = \sqrt{12i/m\rho^2} = \frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{3i}{m}},$$

где: $\rho = \sqrt{J/m}$ – радиус инерции мотора относительно оси OZ.

Вторая частота может быть выражена через первую как

$$k_2 = \frac{l}{2\rho} k_1. \quad (5)$$

Собственные формы колебаний приведены на рисунке 4.

Рисунок 4. Собственные формы колебаний (рисунок автора)

Значения коэффициентов (4) в этом случае:

$$A_1 = \frac{\Phi}{c_{11} - mp^2} = \frac{\Phi}{c_{11}(1 - mp^2/c_{11})}; \quad B_2 = \frac{\Phi h}{c_{22} - Jp^2} = \frac{\Phi h}{c_{22}(1 - Jp^2/c_{22})}; \quad A_2 = B_1 = 0, \quad (6)$$

а решения (3), определяющие вынужденные колебания, упрощаются:

$$\tilde{y} = A_1 \cos pt; \quad \tilde{\varphi} = B_2 \sin pt.$$

Таким образом, прогиб и угол поворота срединного сечения изменяются независимо друг от друга по гармоническому закону с амплитудами A_1 , B_2 .

Для дальнейшего исследования введем коэффициенты динамичности, показывающие, во сколько раз амплитудные значения прогиба и угла поворота срединного сечения балки превосходят их значения от статического действия силы Φ и момента Φh . Для этого представим амплитуды (6) в виде:

$$A_1 = A_1^0 \frac{1}{|1 - p^2/k_1^2|} = \mu_1 A_1^0; \quad B_2 = B_2^0 \frac{1}{|1 - p^2/k_2^2|} = \mu_2 B_2^0,$$

где: $A_1^0 = \Phi/c_{11}$, $B_2^0 = \Phi h/c_{22}$ – значения прогиба и угла поворота в срединном сечении балки от статического действия силы Φ и момента Φh ; $k_1^2 = c_{11}/m$, $k_2^2 = c_{22}/J$ – квадраты собственных частот, μ_1 , μ_2 – коэффициенты динамичности, соответствующие первой и второй форме колебаний:

$$\mu_1 = \frac{1}{|1 - p^2/k_1^2|} = \frac{1}{|1 - z_1^2|}; \quad \mu_2 = \frac{1}{|1 - p^2/k_2^2|} = \frac{1}{|1 - z_2^2|}, \quad (7)$$

$$z_1 = p/k_1, \quad z_2 = p/k_2 \quad (8)$$

Используя найденные коэффициенты динамичности, изгибающий момент в произвольном сечении балки можно представить в виде

$$M = M_1 \cos pt + M_2 \sin pt = \mu_1 M_1^0 \cos pt + \mu_2 M_2^0 \sin pt, \quad (9)$$

где: $M_1 = \mu_1 M_1^0$, $M_2 = \mu_2 M_2^0$ – амплитудные значения момента в рассматриваемом сечении, соответствующие первой и второй форме колебаний, M_1^0 , M_2^0 – моменты от статического действия силы Φ и момента Φh . Наибольших значений $M_1^0 = \Phi l/4$, $M_2^0 = \Phi h/2$ они достигают в сечениях, непосредственно примыкающих к мотору (рисунок 5). Далее рассматриваются именно эти сечения.

Рисунок 5. Эпюры моментов от статического воздействия, равного амплитудным значениям динамического воздействия (рисунок автора)

Как видно из уравнения (9), изменение значений моментов по каждой из форм колебаний происходят по гармоническому закону со смещением друг относительно друга по фазе на $\pi/2$. Разность фаз обусловлена тем, что наибольшее значение момента по первой форме достигается при вертикальном положении эксцентрика, а по второй – при горизонтальном. Это обстоятельство не позволяет получить результирующий момент алгебраическим сложением этих двух составляющих, как это делается при совпадающих фазах.

Для нахождения амплитудного значения результирующего момента представим выражение (9) в другой форме:

$$M = M_0 \sin(pt + \gamma), \quad (10)$$

$$M_0 = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \quad (11)$$

$$\gamma = \arctg(M_1/M_2). \quad (12)$$

Выражение (11) представляет собой амплитудное значение результирующего момента, а (12) – его фазовое смещение по отношению к амплитудному значению момента M_2 .

Таким образом, результирующий момент также изменяется по гармоническому закону с той же частотой p . При этом амплитудное значение момента больше амплитудных значений его составляющих и не совпадает с ними по фазе (рисунок 6).

Рисунок 6. Общий вид зависимости от времени результирующего момента и его составляющих от времени (рисунок автора)

Для удобства практического расчета и анализа полученных результатов введем коэффициент

$$\eta = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\mu_2 M_2^0}{\mu_1 M_1^0} = \frac{1 - z_1^2}{1 - z_2^2} \cdot \frac{\Phi h / 2}{\Phi l / 4} = \frac{1 - z_1^2}{1 - z_2^2} \cdot \frac{2h}{l},$$

показывающий, во сколько раз амплитудное значение момента по второй форме колебаний превышает амплитудное значение момента по первой форме

С учетом выражений (5), (8) отношение $z_2/z_1 = k_1/k_2 = 2\rho/l$, следовательно $z_2 = (2\rho/l)z_1$. Тогда

$$\eta = \frac{1 - z_1^2}{1 - (2\rho/l)^2 z_1^2} \cdot \frac{2h}{l}. \quad (13)$$

Таким образом, коэффициент η в конечном итоге зависит от отношения частоты возмущающей силы (угловой скорости эксцентрика) к первой частоте собственных колебаний $z_1 = p/k_1$ системы, а также от радиуса инерции мотора с эксцентриком и высоты оси вращения, отнесенных к длине балки: ρ/l и h/l .

С использованием коэффициента η амплитудное значение результирующего момента (11) принимает вид

$$M_0 = \sqrt{M_1^2 + \eta^2 M_1^2} = M_1^0 \mu_1 \sqrt{1 + \eta^2} = M_1^0 \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{|1 - z_1^2|}, \quad (14)$$

что позволяет получить результаты расчета для модели с двумя степенями, рассмотрев гораздо более простую и известную модель с одной степенью свободы (см. рисунок 1). И даже

в ней достаточно вычислить только собственную частоту $k_1 = \sqrt{48i/ml^2}$ и значение момента $M_1^0 = \Phi l/4 = 0,25m_0 p^2 el$ от статического приложения вертикальной силы Φ .

Анализ полученных результатов

Для анализа полученного результата и сравнения его с классическим рассмотрим отношение полученного амплитудного значения момента к статическому значению по первой форме M_1^0 . С учетом (14), оно имеет вид:

$$\frac{M_0}{M_1^0} = \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{|1-z_1^2|}$$

На рисунке 7 приведены графики зависимости этого отношения от $z_1 = p/k_1$ (амплитудно-частотная характеристика) для различных значений h/l . При этом радиус инерции мотора с эксцентриком относительно оси Oz (см. рисунок 2) принят равным $\rho = 1,5h$, что соответствует однородному цилиндру радиуса $r = h$.

Рисунок 7. Амплитудно-частотная характеристика изгибающего момента для различных значений h/l (рисунок автора)

Как видно из приведенных графиков, в случае, когда $h/l = 0$, результат совпадает с известным решением для модели с одной степени свободы. При возрастании этого отношения появляется второй резонанс, причем его частота тем выше, чем больше это отношение. Частота первого резонанса остается неизменной.

В окрестности первого резонанса все графики близки друг к другу. Существенные различия проявляются после полуторакратного превышения частоты p первой собственной

частоты k_1 . Однако и при малых частотах имеет увеличение амплитудного значения момента по сравнению с классическим решением и разница между ними тем больше, чем больше отношение h/l .

Таким образом, зная предполагаемый режим работы машины и геометрические параметры системы, можно предварительно оценить актуальность учета второй степени свободы. Для большей наглядности на рисунке 8 приведены графики, иллюстрирующие превышение полученных результатов над классическими

$$\delta = \frac{M_0 - M_1^0}{M_1^0} \cdot 100\% = (\sqrt{1 + \eta^2} - 1) \cdot 100\%$$

в интервале частот от 0 до первого резонанса ($z_1 = 1$).

Рисунок 8. Превышение полученного амплитудного значения момента над амплитудным значением, найденным по классической методике (соответствует $h/l = 0$), выраженное в % (рисунок автора)

Заключение

В результате проведенного исследования предложен общий подход к динамическому расчету балки с эксцентриком как системы с двумя степенями свободы, вне зависимости от условий ее закрепления и расположения эксцентрика.

Для частного случая – шарнирного закрепления и расположения эксцентрика в середине пролета:

- определены основные характеристики колебаний и амплитудные значения моментов в наиболее напряженном сечении балки;
- дана оценка актуальности учета инерции вращения в зависимости от массово-геометрических параметров системы и предполагаемых рабочих частот вращения эксцентрика;
- получены коэффициенты, зависящие от параметров системы и частот вращения эксцентрика, позволяющие вычислять изгибающие моменты, возникающие в рассмотренной модели, основываясь на результатах для классической модели с одной степенью свободы.

Предложенный общий подход может быть аналогичным образом применен к исследованию других частных случаев закрепления балки и расположения эксцентрика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов В.И., Белов В.А., Егорычев О.О., Пашков А.В. Основные вопросы динамики. Учебное пособие по теоретической механике. – М.: МГСУ, 2009. – 114 с.
2. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
3. Варданян Г.С., Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности Учебник / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
4. Ганджунцев, М.И. Основы динамики и устойчивости стержневых систем: учебное пособие / М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков. – Москва: МГСУ, 2012. – 96 с. – ISBN 978-5-7264-0658-9.
5. Динамический расчет зданий и сооружений. Справочник проектировщика / Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984.
6. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний: учебник для вузов / Под общ. Ред. К.С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 272 с., ил.: (Сер. Механика в техническом университете; Т. 4).
7. Клейн Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики: учеб. Пособие для втузов / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – М.: «Высшая школа», 1972, 320 с.
8. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – Изд. 50-е, стер. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. – 448 с.
9. Мигунова М.В., Топчий Т.С. Критические частоты мотора с эксцентриком на отрыв с учетом неравномерности распределения реакции основания // Дни студенческой науки [Электронный ресурс]: сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов института строительства и архитектуры. – Москва: НИУ МГСУ, 2017. – С. 835 – 837. – Режим доступа: <http://mgsu.ru/resources/izdatelskayadeyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/> – Загл. с титул. экрана. ISBN 978-5-7264-1604-5.
10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер; Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
11. Яблонский А.А. Курс теории колебаний: учеб. пособие / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – Изд. 4-е, стер. – СПб.: Лань, 2003. – 248 с. – ISBN 5-8114-0519-7.

Pashkov Aleksey Vladimirovich

National research Moscow state civil engineering university, Moscow, Russia
E-mail: PashkovAV@mgsu.ru

Dynamic calculation of the beam to the action of the rotating eccentric as a system with two degrees of freedom

Abstract. The article deals with the vibrations of an elastic beam caused by the inertial action of an unbalanced massive rotating element. In contrast to the traditional model with one degree of freedom, which takes into account only the deflection of the beam, a model is adopted that takes into account also the rotation of the beam axis due to the action of the inertial moment. Thus, a beam with a load is considered as an elastic system with two degrees of freedom.

A general view of the solution of the differential equations of the oscillation of the system is obtained for arbitrary fastening of the beam and for the arbitrary arrangement of an installation with an eccentric on it. For the particular case of a hinged beam with the location of the installation in the middle of the span, the eigenfrequencies, amplitude values of deflection and angle of rotation, bending moments in the most stressed sections are obtained. The dependence of the maximum moments on the rotational speed of the eccentric axis, as well as on the geometric and inertial properties of the system – the radius of inertia of the installation with the eccentric, the position of the axis of rotation above the axis of the beam is investigated. The amplitude-frequency characteristics are constructed.

The analysis of the obtained results and their comparison with the results of calculation using the classical model with one degree of freedom are carried out. On this basis, in each specific case, it is possible to judge the relevance of accounting for the second degree of freedom or the absence of such a need. It is shown that the results obtained in the particular case (with the arrangement of the rotation axis of the eccentric at the same level as the beam axis) coincide with the classical ones.

Keywords: dynamic load; inertial load; eccentric; disturbing force; forced oscillations; differential equations of oscillations; natural frequencies; own forms; coefficient of dynamism; elastic beam; degree of freedom

REFERENCES

1. Antonov V.I., Belov V.A., Egorychev O.O., Pashkov A.V. (2009). Osnovnye voprosy dinamiki. Uchebnoe posobie po teoreticheskoy mekhanike. [*The main issues of dynamics. Textbook on Theoretical Mechanics.*] Moscow: MGSU, p. 114.
2. Bezukhov N.I., Luzhin O.V., Kolkunov N.V. (1987). Ustojchivost' i dinamika sooruzhenij v primerah i zadachah. [*Stability and dynamics of structures in examples and problems.*] Moscow: High school, p. 264.
3. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. (2014). Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti Uchebnik. [*Resistance of materials with the fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. Textbook.*] Moscow: INFRA-M, p. 512.
4. Ganjuntsev M.I., Petrakov A.A. (2012). Osnovy dinamiki i ustojchivosti sterzhnevyyh sistem: uchebnoe posobie. [*Fundamentals of Dynamics and Stability of Core Systems: Textbook.*] Moscow: MSUSE, p. 96. ISBN 978-5-7264-0658-9.
5. (1984). Dinamicheskij raschet zdaniy i sooruzhenij. Spravochnik proektirovshchika. [*Dynamic calculation of buildings and structures. Handbook of the designer.* Ed. by B.G. Koreneva, I.M. Rabinovich.] Moscow: Stroizdat.
6. Ilyin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. (2003). Teoriya kolebaniy: uchebnik dlya vuzov. [*Theory of vibration: a textbook for high schools.* Ed. by K.S. Kolesnikov.] Moscow: BMSTU, p. 272.
7. Klein G.K., Recach V.G., Rosenblatt G.I. (1972). Rukovodstvo k prakticheskim zanyatiyam po kursu stroitel'noj mekhaniki: ucheb. Posobie dlya vuzov. [*A guide to practical exercises on the course of building mechanics: Textbook. Allowance for technical colleges.*] Moscow: High school, p. 320.
8. Meshchersky I.V. (2010). Zadachi po teoreticheskoy mekhanike [Tekst]: ucheb. posobie dlya vuzov. [*Problems on theoretical mechanics [Text]: textbook for universities.* Ed. by V.A. Pal'mova, D.R. Merkin.] Saint Petersburg, Moscow, Krasnodar: Lan, p. 448.
9. Migunova M.V., Topchiy T.S. (2017). The critical frequencies of the motor with an eccentric on the separation, taking into account the uneven distribution of the reaction of the base. *MSUSE*, [online], pp. 835-837. Available at: <http://mgsu.ru/resources/izdatelskayadeyatel'nost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/> (in Russian) ISBN 978-5-7264-1604-5.
10. Timoshenko S.P., Yang D.H., Weaver U. (1985). *Vibration problems in engineering*. [Russ. ed.: *Kolebaniya v inzhenerenom dele*. Authorized transl. by L.G. Korneichuk; Ed. by E.I. Grigolyuk. Moscow: Mechanical Engineering, p. 472.]
11. Yablonsky A.A., Noreyko S.S. (2003). Kurs teorii kolebaniy: ucheb. Posobie. [*Course of the theory of vibration: Textbook. allowance.*] Saint Petersburg: Lan, p. 248. ISBN 5-8114-0519-7.