DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2015.1.05
УДК 519.977

**Российский
Журнал
Биомеханики**
www.biomech.ru

УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ТИПА «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»

С.В. Русаков, М.В. Чирков

Кафедра прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета, Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: rusakov@psu.ru

Аннотация. На основе классической системы популяционной динамики типа «хищник–жертва» поставлена задача управления. Анализируется случай, когда значения параметров системы неизвестны, а значения фазовых переменных могут быть измерены в любой момент времени с необходимой точностью (кибернетическая модель «белый ящик»). Управление означает возможность добавлять (убавлять) в систему извне любое необходимое количество «жертвы». Задача описана нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель управления заключается в обеспечении асимптотической стабилизации численности «хищника» около заданного значения. С помощью первого метода Ляпунова проведено исследование устойчивости управления. Получены ограничения на параметры системы уравнений, при выполнении которых решение является устойчивым (неустойчивым) узлом или устойчивым (неустойчивым) фокусом. Поскольку параметры системы неизвестны, достижение цели управления возможно только при использовании алгоритмов управления с обратной связью. Рассмотренный алгоритм основан на использовании регулятора ПИД (пропорционального, интегрального, дифференциального). С использованием критерия Рауса–Гурвица получены ограничения на управляющие параметры. Для данной системы установлено основное функциональное назначение составных частей ПИД-регулятора. Показано, что для рассматриваемой системы недостаточно ПИ-регулятора и только наличие дифференциального слагаемого обеспечивает возможность устойчивого управления для любого соотношения параметров системы. Приведены результаты вычислительных экспериментов с различными наборами управляющих параметров. Рассматриваемое управление переводит систему в устойчивое стационарное состояние при выполнении полученных ограничений. Также рассмотрены вопросы идентификации параметров модели. Показано, что использование управления в виде ПИД-регулятора позволяет эффективно решать обратную задачу определения параметров классической системы «хищник–жертва».

Ключевые слова: система «хищник–жертва», устойчивость по Ляпунову, управление с обратной связью, регулятор ПИД (пропорциональный, интегральный, дифференциальный), идентификация параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные модели популяционной динамики, предложенные в работах Лотки и Вольтерра [7, 10], к настоящему времени получили самое широкое распространение. Их разнообразные обобщения нашли применение не только в биологии, но и в медицине, экономике, социальных науках. Особый интерес представляют задачи управления в подобных системах. Здесь можно отметить следующие работы,

посвященные использованию системы «хищник–жертва» в различных областях. Обобщение модели Лотки–Вольтерра для описания взаимодействия одновалентных антител с размножающимся одновалентным антигеном предложено в работе [6]. Исследование поведения траекторий этой модели проведено в работах [8, 9], где показано, что в рассматриваемой модели существуют устойчивые периодические решения малой и большой амплитуды, а также приведена биологическая интерпретация полученных результатов. В работе [4] рассматривается оптимальное дискретное управление в системе «хищник–жертва», предложенный алгоритм основан на сведении нелинейной системы к кусочно-линейной, для построения управляющей функции решается классическая задача линейного программирования. Показано, что описанный алгоритм позволяет приводить нелинейную систему Лотки–Вольтерра в состояние равновесия. Применение системы «хищник–жертва» в социальных процессах анализируется в работе [2]. В монографии [3] решен целый ряд задач по стабилизации и управлению в экосистемах, имеется обширная библиография по исследуемой проблематике. В работе [5] предложен и исследован алгоритм управления с обратной связью системой типа «хищник–жертва».

В технических системах, рассматриваемых как «черный (серый, белый) ящик», популярным способом управления с обратной связью является использование так называемых ПИД-регуляторов (пропорциональных, интегральных, дифференциальных), позволяющих перевести систему из одного состояния в другое. Применение этой «технологии управления» к системам типа популяционной динамики практически не исследовано.

Настоящая работа посвящена изучению классической системы типа «хищник–жертва», для которой имеет место нетривиальная особая точка типа «центр». Выбор авторами этой модели обусловлен двумя моментами: с одной стороны, она является достаточно типичным представителем класса моделей популяционной динамики, с другой – имеет достаточно простую структуру и небольшое число параметров, что позволяет провести ее детальное аналитическое исследование. Поставлена задача управления этой системой, обеспечивающего ее перевод в устойчивое стационарное состояние и реализуемого с помощью ПИД-регулятора. Кроме того, предложен алгоритм идентификации параметров данной системы, базирующийся на результатах управления ею.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу управления для классической системы типа «хищник–жертва» [3]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha_1 X - \beta_1 XY + U(t, X, Y), \\ \dot{Y} &= -\alpha_2 Y + k\beta_1 XY, \quad t > 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}0 < k < 1, \quad \alpha_1, \beta_1, \alpha_2 > 0, \\ X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0, \quad X_0, Y_0 > 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Будем полагать, что значения параметров задачи (1)–(2) нам неизвестны, но значения функций $X(t)$ и $Y(t)$ могут быть получены (измерены) в любой момент времени с необходимой точностью (кибернетическая модель «белый ящик»), а управление $U(t, X, Y)$ означает возможность добавлять (убавлять) в систему любое необходимое количество «жертвы».

Цель управления – обеспечить асимптотическую стабилизацию функции $Y(t)$ около заданного значения:

$$Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Проведем обезразмеривание задачи (1)–(2), выбрав в качестве характерного значения и «хищника», и «жертвы» величину A , а характерного времени – величину $\Delta t = \alpha_2^{-1}$; сохраняя прежнее обозначение для времени, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy + u(t, x, y), \\ \dot{y} &= -y + k\beta xy, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 0 < k < 1, \quad \alpha, \beta > 0, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0, y_0 > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\alpha_2} A, \quad u(t, x, y) = \frac{U(t, X, Y)}{\alpha_2 A}. \quad (7)$$

Для начала проанализируем вариант $u(t, x, y) = \text{const}$ с помощью первого метода Ляпунова. Нетрудно установить, что в этом случае нетривиальным стационарным решением задачи (4)–(5) является

$$x^* = \frac{1}{k\beta}, \quad y^* = 1, \quad u^* = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (8)$$

и корни соответствующего характеристического уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \pm \sqrt{D}, \quad D = \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 - \beta. \quad (9)$$

При $\alpha < \beta$ это решение является устойчивым узлом в случае $D > 0$ и устойчивым фокусом при $D < 0$. В случае $\alpha > \beta$ имеем соответственно неустойчивый узел и неустойчивый фокус. Таким образом, в этом варианте устойчивое решение получится только в случае выполнения условия $\alpha < \beta$.

УПРАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Поскольку параметры системы (1) нам неизвестны, достижение цели управления (3) возможно только при использовании алгоритмов управления с обратной связью. Для реализации такого алгоритма рассмотрим управляющую функцию в виде ПИД-регулятора, широко используемого при управлении в различных технических системах (см. например [1]):

$$u(t, x, y) = K_{\Pi} \cdot e(y) + K_{\text{И}} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_{\text{Д}} \cdot \dot{e}(y), \quad K_{\Pi}, K_{\text{И}}, K_{\text{Д}} = \text{const}, \quad (10)$$

где $e(y)$ – функция рассогласования; $e(y) = 1 - y(t)$.

Для исследования устойчивости системы (4) с управлением вида (10) методом Ляпунова предварительно преобразуем ее, продифференцировав первое уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z, \\ \dot{z} &= (\alpha - \beta y)z + \beta xy(1 - k\beta x) + \dot{u}(t, x, y, z), \\ \dot{y} &= -y + k\beta xy,\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$\dot{u}(t, x, y, z) = -y(1 - k\beta x)(-K_{\Pi} + K_{\Delta}(1 - k\beta x)) + K_{\Pi}(1 - y) - K_{\Delta}k\beta zy. \quad (12)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (13)$$

где

$$a_1 = \beta(1 + K_{\Delta}k) - \alpha, \quad a_2 = \beta(1 + K_{\Pi}k), \quad a_3 = K_{\Pi}k\beta. \quad (14)$$

Воспользуемся критерием Рауса–Гурвица, согласно которому все корни характеристического уравнения (13) имеют отрицательную действительную часть тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{aligned}T_1 &= a_1 = \beta(1 + K_{\Delta}k) - \alpha > 0, \\ T_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 = (\beta(1 + K_{\Delta}k) - \alpha)\beta(1 + K_{\Pi}k) - K_{\Pi}k\beta > 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Нетрудно показать, что следствием соотношений (15) являются ограничения

$$K_{\Delta} > \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = K_{\Delta}^*, \quad (16)$$

$$K_{\Pi} < \frac{1}{k} (\beta(1 + K_{\Delta}k) - \alpha)(1 + K_{\Pi}k) = K_{\Pi}^*. \quad (17)$$

Таким образом, основное функциональное назначение составных частей (слагаемых) ПИД-регулятора заключается в следующем:

- «дифференциальная» составляющая обеспечивает устойчивость управления в случае $\alpha > \beta$ (условие (16));
- «интегральное» слагаемое дает необходимое значение величины управления

$$K_{\Pi} \int_0^t e(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u^* \quad (18)$$

и должно удовлетворять условию (17);

- «пропорциональная» составляющая позволяет регулировать скорость выхода на стационарное решение.

Полученные результаты иллюстрируются на рисунке, где приведены данные расчетов для некоторых наборов параметров. Во всех случаях параметры модели имели значения $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $k = 0,8$, начальные условия $x_0 = 1$, $y_0 = 0,8$. Варьировались коэффициенты ПИД-регулятора. Рассматриваются четыре варианта, здесь же приведены значения критериев (16)–(17) и собственные значения соответствующего уравнения (13):

 Рис. Результаты управления: *a* – вариант 1; *б* – вариант 2; *в* – вариант 3; *г* – вариант 4

- 1) $K_{\Pi} = 2, K_{\text{И}} = 0,8, K_{\text{Д}} = 2, K_{\text{Д}}^* = 1,25, K_{\text{И}}^* = 1,95, \lambda_1 \approx -0,255, \lambda_{2,3} \approx -0,173 \pm i \cdot 1,576$;
- 2) $K_{\Pi} = 2, K_{\text{И}} = 0,8, K_{\text{Д}} = 1, K_{\text{Д}}^* = 1,25, K_{\text{И}}^* = -0,65, \lambda_1 \approx -0,237, \lambda_{2,3} \approx 0,218 \pm i \cdot 1,730$;
- 3) $K_{\Pi} = 2, K_{\text{И}} = 3, K_{\text{Д}} = 2, K_{\text{Д}}^* = 1,25, K_{\text{И}}^* = 1,95, \lambda_1 \approx -0,852, \lambda_{2,3} \approx 0,126 \pm i \cdot 1,673$;
- 4) $K_{\Pi} = 2, K_{\text{И}} = -3, K_{\text{Д}} = 1, K_{\text{Д}}^* = 1,25, K_{\text{И}}^* = -0,65, \lambda_{1,2} \approx -0,293 \pm i \cdot 1,724, \lambda_3 \approx 0,785$.

В варианте 1 выполняются оба условия (16)–(17) и наблюдается устойчивый выход на стационарные решения. В варианте 2 нарушаются оба условия (16)–(17) и видно, что в системе нарастают колебания, в результате которых численность жертвы становится отрицательной. В варианте 3 нарушается только условие (17), здесь качественное поведение решения аналогично варианту 2. В варианте 4 нарушается только условие (16) и наблюдается монотонный рост численности «хищника» и функции управления. Таким образом, данные расчетов подтверждают полученные выше теоретические оценки.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ

Полученные результаты можно использовать при идентификации параметров реальной системы типа «хищник–жертва», для которой имеется возможность проводить серию экспериментов. В случае отсутствия управления тип особой точки «центр» и размерное время, за которое система совершает полный цикл, определяется из соотношения

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}. \quad (19)$$

Поскольку эта величина достаточно просто определяется из экспериментальных данных, то мы получаем соотношение для параметров системы

$$\alpha_1 \alpha_2 = \left(\frac{2\pi}{T_c} \right)^2. \quad (20)$$

Кроме того, эксперимент дает возможность оценить снизу и сверху отношение α_1 / β_1 . При применении стабилизирующего управления, обеспечивающего значение $Y_* = A$, количество «жертвы» и интегральная составляющая ПИД-регулятора стремятся к значениям (8)

$$X_* = \frac{A}{k\beta} = \frac{\alpha_2}{k\beta_1}, \quad (21)$$

$$U_* = \frac{A}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{1}{k} \left(A - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right). \quad (22)$$

Таким образом, для определения четырех параметров системы (1) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, k$ мы имеем 3 соотношения (20)–(22). Если провести две серии экспериментов со стабилизацией численности «хищника» около значений A_i ($i = 1, 2$), получим

$$U_*^{(i)} = \frac{A_i}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{1}{k} \left(A_i - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right), \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Тогда из уравнений (23) имеем

$$k = \frac{A_1 - A_2}{U_*^{(1)} - U_*^{(2)}}, \quad (24)$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = A_1 - k \cdot U_*^{(1)}, \quad (25)$$

и система уравнений (20), (21), (25) легко разрешается относительно неизвестных α_1 , α_2 , β_1 .

Таким образом, использование управления в виде ПИД-регулятора позволяет эффективно решать обратную задачу определения параметров классической системы «хищник–жертва».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решена задача управления системой типа «хищник–жертва» с неизвестными заранее значениями параметров. При этом использован способ управления с обратной связью в виде ПИД-регулятора. Показано, что для рассматриваемой системы недостаточно ПИ-регулятора и только наличие Д-компоненты обеспечивает возможность устойчивого управления для любого соотношения параметров системы. В случае, если имеется возможность проводить натурные эксперименты, данный способ управления позволяет определить все параметры исследуемой системы, используя результаты двух серий испытаний с разным значением цели управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
2. Гизатуллин Х.Н. Моделирование трудноформализуемых социально-экономических процессов // Журнал экономической теории. – 2008. – № 1. – С. 10–23.
3. Ильичев В.Г. Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. – М.: Физматлит, 2008. – 231 с.
4. Михайлова Е.В. Оптимальное управление в системе Лотки–Вольтерры «хищник–жертва» // Труды 3-й Всерос. науч. конф., 29–31 мая 2006 г. Часть 2. Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. Математическое моделирование и краевые задачи / СамГТУ. – Самара, 2006. – С. 123–126.
5. Русаков С.В. Система «хищник–жертва» с управлением с обратной связью // Известия Института математики и информатики УдГУ. – 2012. – Вып. 1 (39). – С. 116–117.
6. Bell G. Prey-predator equations simulating an immune response // Math. Biosci. – 1973. – № 16. – P. 291–314.
7. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. – Philadelphia: Williams & Wilkins Company, 1925. – 460 p.
8. Pimbley G.H. Periodic solutions of predator-prey equations simulating an immune response, I // Math. Biosci. – 1974. – № 20. – P. 27–51.
9. Pimbley G.H. Periodic solutions of predator-prey equations simulating an immune response, II // Math. Biosci. – 1974. – № 21. – P. 251–277.
10. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Met. Acad. Lincei Roma. – 1926. – № 2. – P. 31–113.

FEEDBACK CONTROL IN A CLASSICAL “PREDATOR-PREY” SYSTEM

S.V. Rusakov, M.V. Chirkov (Perm, Russia)

The control problem based on a classical predator-prey system is posed. We analyze the case where the values of parameters of a system are unknown and the values of state variables can be measured at any time with the required accuracy (cybernetic “white-box” model). Control implies the ability to add (to diminish) any required number of prey to the system from the outside. The problem is described by a nonlinear system of ordinary differential equations. The objective of control is to reach the asymptotic stabilization of the number of predator near the prescribed value. We investigate stability of control using the first Lyapunov method. We impose restrictions on the parameters of the system of equations. Under these restrictions, the solution is stable (unstable) node or stable (unstable) focus. Since the parameters of the system are unknown, reaching the purpose of control is possible only by using the algorithms of feedback control. The proposed algorithm is based on a PID (proportional, integral, differential)-regulator. We define restrictions on the control parameters using the Routh–Hurwitz criterion. For this system, we establish the basic functionality of the components of the PID-regulator. It is shown that PI-regulator is not enough for the system under consideration and only the differential term provides the stable control for any ratio of the parameters of the system. We present the results of computational experiments with different sets of control parameters. The control under consideration allows us to reach a stable stationary state of the system if the obtained restrictions hold. We also consider the identification of the model parameters. It is shown that the control in the form of PID-regulator enables us to effectively solve the inverse problem of parameter identification of a classical predator-prey system.

Key words: “predator-prey” system, Lyapunov stability, feedback control, regulator PID (proportional, integral, differential), parameter identification.

Получено 16 декабря 2014