УДК 539.3

Е.Н. Довбня, Н.А. Крупко

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

ВЛИЯНИЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны с круговым отверстием, расположенным в центре конструкции. Оболочка находится под действием осевого растяжения или внутреннего давления. Использовались уравнения теории пологих изотропных оболочек, которые совпадают с уравнениями теории изотропных оболочек с большим показателем изменчивости. Были задействованы интегральное преобразование Фурье, теория обобщенных функций. В результате задача сведена к решению системы граничных интегральных уравнений. Одно из преимуществ использования метода граничных интегральных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек, ослабленных отверстием, состоит в возможности определять искомые величины непосредственно на контуре отверстия, не вычисляя их на всей поверхности оболочки. Для получения ядер сингулярных интегральных уравнений были использованы интегральные представления перемещений и фундаментальные решения уравнений статики пологих изотропных оболочек. В качестве неизвестных функций использовались комбинации перемещений, углов поворота и их производных. Аналитические выкладки существенно упрощаются, если считать неизвестными на контуре не четыре функции, как это принято, а пять. В данной работе в качестве пятого уравнения используется дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные функции. При численном решении задачи для сведения системы интегральных уравнений к системе линейно-алгебраических уравнений использовались специальные квадратурные формулы для интегралов типа Коши, если неизвестные функции имели корневую особенность на концах промежутка интегрирования. Для сведения дифференциального уравнения к линейно-алгебраическому уравнению использовался метод конечных разностей. Приведены результаты значений коэффициентов концентрации напряжений в зависимости от кривизны изотропной оболочки. Также было произведено сравнение результатов с другими исследователями.

Ключевые слова: круговое отверстие, изотропная оболочка, мембранные напряжения, преобразование Фурье, метод граничных интегральных уравнений.

E.N. Dovbnya, N.A. Krupko

Donetsk National University, Donetsk, Ukraine

INFLUENCE OF CIRCULAR HOLE ON THE SHELL STRESS STATE FOR ARBITRARY GAUSSIAN CURVATURE

The work is devoted to determining isotropic shell of stress-strain state for arbitrary Gaussian curvature with a circular hole, located in the center of the structure. An axial tension or an internal pressure is applied to the surface of the shell. The isotropic shallow shell theory equations were used, which coincide with the isotropic shell theory equations with a large measure of variability. The integral Fourier transformation and the theory of generalized functions were applied. As a result the problem was reduced to solving the system of boundary integral equations. One benefit of using the method of boundary integral equations for the study of shell stress-strain state weakened by a hole is the ability to define the unknown quantities directly on the contour of the hole, not evaluating them on the whole surface of the shell. To obtain the kernels of the singular integral equations, integral representations of displacements and shallow isotropic shells static equations fundamental solutions were used. As the unknown functions, a combination of displacements, rotation angles and their derivatives were used. Analytical calculations are considerably simplified if it is assumed to take into account not four unknown functions on the contour, as it is customary, but five. In this paper it is chosen to use the differential equation which relates the unknown functions as the fifth equation of the boundary integral equations system. In order to obtain numerical solution of the problem, the method of mechanical quadratures for systems of integral equations and finite difference method for the fifth differential equation were used to reduce a problem to a system of linear algebraic equations. The stress concentration factors values depending on the isotropic shell curvature are given. Also the results were compared with other researchers.

Keywords: circular hole, isotropic shell, stress concentration factor, Fourier transformation, method of boundary integral equations.

Введение

Вопросы разрушения тонкостенных конструкций волнуют как инженеров, так и теоретиков. Задачи, которые касаются напряженно-деформированного состояния оболочек с таким концентратором напряжения, как круговое отверстие, интересовали многих авторов в связи с сильной концентрацией напряжений в окрестности отверстия. Из-за трудностей математического, вычислительного характера исследования в данной области обычно ограничиваются либо сферическими, либо цилиндрическими оболочками.

Первым, кто направил свои усилия для решения задачи о напряженном состоянии вокруг кругового отверстия в круговой цилиндрической оболочке, был А.И. Лурье [1]. Оболочка была нагружена осевым растяжением и внутренним давлением. Его расчеты основывались на методе возмущений. Подобное исследование было проведено

Ю.А. Шевляковым [2]. Он исследовал напряжения в сферическом днище резервуара, ослабленном малым круговым отверстием в центре при осесимметрической нагрузке. Считалось, что контур отверстия нагружен перерезающими усилиями, которые компенсируют действие внутреннего давления, или подкреплён абсолютно жестким патрубком. Решения обоих авторов действительны только для малых значений параметра r_0/Rh , где r_0 – радиус отверстия; h – толщина оболочки; R – радиус кривизны срединной поверхности оболочки. V. Dyke [3], J.G. Lekkerkerker [4] исследовали круговую цилиндрическую оболочку с отверстием при различных условиях нагрузки. Используя численные методы, каждый из них расширяет результаты, которые были получены предыдущими авторами, для больших значений параметра r_0/Rh . Цилиндрическим оболочкам с разными видами подкрепления отверстий были посвящены работы И.М. Пирогова [5].

Л.Б. Именитов рассмотрел сферическую оболочку в виде купола с одним жестко заделанным краем и произвольно расположенным неподкрепленным круговым отверстием. В его работе был предложен метод расчленения напряженного состояния [6]. А.А. Сяский, Е.И. Лунь занимались решением задачи о напряженном состоянии изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, край которого подкреплён широким упругим кольцом [7].

В дальнейшем наиболее существенные результаты были получены в работах Г.Н. Савина, который сформулировал общую постановку задачи о напряженном состоянии оболочки с отверстием, которое задается в виде гладкого криволинейного контура [8].

Достаточно полный анализ проведенных исследований по концентрации напряжений вблизи отверстий в оболочках приведен в монографии [9]. Влияние поперечного сдвига оболочки с отверстием и ряда других нагрузок, приложенных к конструкциям, описывается в работах [10–16]. Конические оболочки с круговым вырезом рассматриваются в [17].

Оболочки положительной гауссовой кривизны с отверстием были рассмотрены в [18–20]. Задачи сводились к решению системы граничных интегральных уравнений. Одно из преимуществ использования метода граничных интегральных уравнений для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек, ослабленных отверсти-

ем, состоит в возможности определять искомые величины непосредственно на контуре отверстия, не вычисляя их на всей поверхности оболочки. В качестве неизвестных функций использовались комбинации перемещений, углов поворота и их производных. Аналитические выкладки существенно упрощаются, если считать неизвестными на контуре не четыре функции, как это принято, а пять. В результате количество неизвестных превышает количество уравнений. Поэтому для обеспечения единственности решения необходимо добавить еще одно уравнение на контуре. В работе [20] предлагались разные варианты выбора пятого уравнения, но численные расчеты проводились только для случая, если задавалось пятое уравнение как компонент главного вектора. В данном исследовании в качестве пятого уравнения использовалось дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные функции. Таким образом, первые четыре уравнения – интегральные, пятое – дифференциальное.

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкая изотропная оболочка произвольной гауссовой кривизны и постоянной толщины h , которая находится под действием симметричной внешней нагрузки. Оболочка отнесена к системе ортогональных координат x, y с осями вдоль направлений главных кривизн оболочки, а ось z направлена по нормали к ней (рис. 1). Конструкция ослаблена неподкрепленным круговым отверстием радиусом r_0 (контур L), расположенным в центре системы координат, уравнение отверстия имеет вид

$$x=r_0 \cos \theta, y=r_0 \sin \theta, \theta \in (0; 2\pi].$$

Размер отверстия считаем большим по сравнению с толщиной оболочки, но малым по сравнению с другими линейными размерами конструкции, что позволяет рассматривать задачу в рамках двумерной теории оболочек.

Предполагается, что контур отверстия свободен от нагрузки на L .

Напряженное состояние тонкостенной конструкции представим как сумму напряженного состояния в оболочке без отверстия при заданной внешней нагрузке, которое считаем известным (будем обозначать величинами со звездочкой), и возмущенного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия.

Рис. 1. Тонкая оболочка с круговым отверстием

Граничные условия для возмущенного напряженного состояния имеют вид

$$T_n = -T_n^*, S_{n\tau} = -S_{n\tau}^*, M_n = -M_n^*, H_{n\tau} = -H_{n\tau}^*, N_n = -N_n^*,$$

где $T_n, S_{n\tau}$ – мембранные усилия на контуре отверстия; $M_n, H_{n\tau}$ – изгибающий и крутящий момент соответственно; N_n – перерезывающая сила.

Рассматриваемую оболочку считаем бесконечной, т.е. предполагаем, что внешний контур оболочки не оказывает влияния на напряженное состояние тела.

Как показывают результаты экспериментальных исследований, возмущенное напряженное состояние возле отверстий имеет локальный характер и быстро затухает при удалении от отверстия. Поэтому в свое время Г.Н. Савин [8] предложил для описания возмущенного напряженно-деформированного состояния использовать уравнения теории оболочек с большим показателем изменчивости [22], которые совпадают с уравнениями пологих оболочек [23].

В рамках теории пологих оболочек предполагается, что коэффициенты первой квадратичной формы поверхности равны 1, а главные кривизны оболочки k_1, k_2 (вдоль осей x, y соответственно) являются постоянными [24].

Основные соотношения теории пологих оболочек в случае изотропного материала принимают следующий вид [20]:

1) уравнения состояния исходя из гипотезы Кирхгофа–Лява записываются как

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= -X, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = -Y, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= N_1, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2, \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= -Z,\end{aligned}$$

где X, Y, Z – проекции внешней нагрузки на оси координат; T_1, T_2, S – мембранные усилия; M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты, N_1, N_2 – перерезывающие силы;

2) геометрические соотношения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \chi_1 &= -\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial \theta_2}{\partial y}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}$ – компоненты тангенциальной деформации срединной поверхности оболочки; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – компоненты изгибающей деформации; u, v, w – перемещения в направлениях x, y, z соответственно; θ_1, θ_2 – углы поворота нормали;

3) уравнение неразрывности деформации принимает вид

$$k_1^0 \chi_1 + k_2^0 \chi_2 + \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial y^2} = 0;$$

4) соотношения упругости запишутся как

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_1 + \epsilon_2), \quad S = \frac{Eh}{(1+\nu)} \epsilon_{12}, \\ H &= D(1-\nu) \chi_{12}, \quad M_1 = D(\chi_1 + \nu \chi_2), \quad M_2 = D(\nu \chi_1 + \chi_2),\end{aligned}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Дальнейшее исследование основано на использовании теории обобщенных функций, двумерного интегрального преобразования Фурье [20].

2. Система сингулярных интегральных уравнений

Если вместо усилий и моментов задать на контуре отверстия компоненты главного вектора и главного момента в качестве новых граничных величин, то можно существенно упростить ядра граничных интегральных уравнений [20].

Рис. 2. Часть контура L

Обозначим через L_s часть контура L с концом в текущей точке s (рис. 2), где $\vec{n}, \vec{\tau}$ нормаль и касательная к контуру L_s в точке s .

Граничные условия для возмущенного состояния запишем с учетом задания на контуре компонентов главного вектора $\vec{P}$ и главного момента $\vec{M}^{(s)}$ усилий, которые действуют вдоль части L_s контура L [18],

$$P_x = -P_x^*; P_y = -P_y^*; M_x^{(s)} = -M_x^{(s)*}; M_y^{(s)} = -M_y^{(s)*} \text{ на } L. \quad (1)$$

Неизвестные функции задаются через скачок функции при переходе через контур со стороны внешней нормали

$$\begin{aligned} \psi_1 &= Eh \left(\frac{\partial[u]}{\partial t} - n_2 \frac{\lambda}{R_2} [w] \right); \quad \psi_2 = Eh \left(\frac{\partial[v]}{\partial t} + n_1 \frac{[w]}{R_2} \right); \quad \psi_3 = \frac{Eh}{R_2} \left(\frac{\partial[\theta_1]}{\partial t} \right), \\ \psi_4 &= \frac{Eh}{R_2} \left(\frac{\partial[\theta_2]}{\partial t} \right); \quad \psi_5 = \frac{Eh}{R_2} (n_1 [\theta_1] + \lambda n_2 [\theta_2]), \end{aligned}$$

где n_1, n_2 – направляющие косинусы вектора внешней нормали к L вдоль осей x, y ; R_1, R_2 – радиусы главных кривизн оболочки; $\lambda = \frac{R_2}{R_1}$.

Система граничных интегральных уравнений для данной задачи, учитывая работу [20], где подробно изложено сведение подобных задач к системам граничных интегральных уравнений, запишется следующим образом:

$$\int_L \sum_{j=1}^5 K_{ij}(x(t)-x(s), y(t)-y(s)) \psi_j(s) ds = \pi^2 F_i^*(t), \quad t \in (-l; l), i=\overline{1,4}, \quad (2)$$

где l – полудлина контура.

Компоненты главного вектора $\vec{P}$ и главного момента $\vec{M}^{(s)}$ усилий приведены ниже:

$$\begin{aligned} P_x(s) &= \int_{L_s} T_1 dy - S dx; \quad P_y(s) = \int_{L_s} S dy - T_2 dx; \quad P_z(s) = \int_{L_s} N_n ds + k_2 P_y dy + k_1 P_x dx, \\ M_x^{(s)}(s) &= - \int_{L_s} P_z dy + k_1 M_z^{(s)} dx; \quad M_y^{(s)}(s) = \int_{L_s} P_z dx - k_2 M_z^{(s)} dy, \\ M_z^{(s)}(s) &= \int_{L_s} P_x dy - P_y dx. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (3) правая часть в (2) будет задана через производные выражений в (3):

$$F_1(s) = P'_x; \quad F_2(s) = P'_y; \quad F_3(s) = M'_x; \quad F_4(s) = M'_y.$$

Но при вычислении компонент главного вектора и момента в правой части системы (2) возникают 4 дополнительных константы $c_i, i=\overline{1,4}$, для определения которых используются дополнительные соотношения, следующие из условий однозначности перемещения и углов поворота при обходе контура L .

$$\begin{aligned} \int_L (\psi_5 - c(x\psi_4 - \lambda y\psi_3)) ds &= 0; \quad \int_L (x\psi_3 + y\psi_4) ds = 0, \\ \int_L \left(\psi_1 - \frac{c^2}{2} \left((y^2 - \lambda x^2) \psi_3 - 2\lambda xy\psi_4 + 2\frac{y}{c} \psi_5 \right) \right) ds &= 0, \\ \int_L \left(\psi_2 + \frac{c^2}{2} \left((y^2 - \lambda x^2) \psi_4 + 2xy\psi_3 + 2\frac{x}{c} \psi_5 \right) \right) ds &= 0, \end{aligned}$$

где $c = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}$.

Ядра системы (2) имеют особенность типа Коши. Подробная методика получения ядер описывается в работе [21].

Таким образом, задача сведена к решению системы граничных интегральных уравнений относительно пяти неизвестных функций. Для решения поставленной задачи необходимо выбрать соответствующее количество уравнений, которое бы обеспечило единственность решения. Данный вопрос был затронут во многих работах [18–21]. В частности, в работе [20] предлагалось выбрать интегральные уравнения, соответствующие компонентам главного вектора P_x, P_y и главного момента M_x, M_y , а в качестве пятого уравнения выбрать уравнение, которое бы соответствовало компонентам главного вектора P_z или главного момента M_z . Были также предложены варианты выбора в качестве пятого уравнения интегрального или дифференциального уравнения, связывающие неизвестные функции.

Численная реализация в [20] была проведена для случая, когда в качестве пятого уравнения задавались компоненты главного вектора P_z .

Существенным отличием данного исследования от предыдущих работ [18–21] является выбор в качестве пятого уравнения дифференциального уравнения и проведение численных расчетов с его использованием. Дифференциальное уравнение приведено ниже:

$$\frac{d^2\psi_5}{d\theta^2} = cr_0 \left(n_1 \frac{d\psi_3}{d\theta} + \lambda n_2 \frac{d\psi_4}{d\theta} + 2(-n_2\psi_3 + \lambda n_1\psi_4) \right) - \psi_5. \quad (4)$$

Был проведен сравнительный анализ результатов с разными вариантами выбора пятого уравнения. Оказалось, что выбор пятого дифференциального уравнения в виде (4) упрощает числовую реализацию задачи и улучшает сходимость метода.

Численный расчет системы (2) основывался на использовании специальных квадратурных формул для интегралов типа Коши в случае, если неизвестные функции имеют корневую особенность на концах промежутка интегрирования [24]. Таким образом, каждое уравнение системы (2) сводилось к N линейно-алгебраическим уравнениям относительно значений неизвестных подынтегральных функций в выбранных точках (узлах интерполяционного полинома). Для сведения

пятого дифференциального уравнения к линейно-алгебраическому уравнению использовался метод конечных разностей.

Для обеспечения единственности решения были использованы еще два алгебраических уравнения, которые были получены из следующих интегральных уравнений:

$$\int_L \psi_3 ds = 0; \int_L \psi_4 ds = 0.$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений размерности $(5N+4) \times (5N+4)$.

3. Результаты численного исследования

Для определения напряженного состояния около кругового отверстия в оболочке были вычислены коэффициенты концентрации напряжения

$$K_\theta^T = T_\theta / p_0 h; T_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \epsilon_\tau; \epsilon_\tau = \frac{1}{Eh} (n_2 \psi_1 - n_1 \psi_2); (p_0 h = pR/2).$$

Как показали результаты проведенных исследований, при выборе узлов разбиения достаточно ограничиться $n=20$, так как дальнейшее увеличение количества узлов разбиения практически не сказывается на результате.

Для сравнения с известными результатами рассматривалась оболочка нулевой гауссовой кривизны под действием осевого растяжения. Результаты сравнивались с работами [4, 9] и имеют хорошую сходимость. В работе [4] J.G. Lekkerkerker осуществил эксперимент для образца в виде цилиндрической оболочки с круговым отверстием, сделанной из стали. Нагрузка – осевое растяжение.

В табл. 1 приводятся результаты работы [4] в сравнении с коэффициентами концентрации напряжений, полученными в данном исследовании. Необходимо учитывать, что для моделирования задачи использовались различные теории, но, несмотря на это, погрешность вычислений не превосходит и 5 %.

Следующее сравнение было произведено для сферической оболочки, которая нагружена равномерным внутренним давлением интенсивности p . Граничные условия на неподкрепленном контуре, который

нагружен перерезывающими усилиями, уравнивающими действие внутреннего давления, имеют следующий вид:

$$T_n|_L = -pR/2; \quad M_n|_L = 0; \quad N_n|_L = -pr_0/2.$$

Таблица 1

Сравнение коэффициентов концентрации напряжений с работой [4]

θ	Результаты эксперимента [4]	Теоретические результаты [4]	Результаты, полученные в данной работе
0°	3,61	3,66	3,59
22°	2,62	2,78	2,73
90°	-1,27	-1,2	-1,24
135°	0,87	0,91	0,88
180°	3,7	3,66	3,59
225°	0,67	0,91	0,88
270°	-1,27	-1,2	-1,24
292°	-0,59	-0,65	-0,72

Введем параметр, относительно которого были получены результаты:

$$\beta = cr_0.$$

Таблица 2

Сравнение коэффициентов концентрации K_θ^T для оболочки, находящейся под действием внутреннего давления, с результатами других исследователей

β	K_θ^T , полученные в работе [2]	K_θ^T , полученные в работе [10]	Результаты данного исследования
0,10	2,008	2,008	2,008
0,20	2,031	2,034	2,034
0,45	2,184	2,177	2,178
1,00	2,716	2,744	2,792
1,10	2,844	2,867	2,931
1,20	3,044	2,994	3,087
1,35	3,243	3,188	3,345

Табл. 2 демонстрирует результаты, затрагивающие оболочки положительной гауссовой кривизны. Как видим, погрешность вычислений с другими авторами не превосходит и 5 %.

Рис. 3. Зависимость коэффициентов концентрации напряжений от кривизны оболочки

Рис. 4. Зависимость коэффициентов концентрации напряжений вдоль контура отверстия при заданных значениях параметра λ : $a - \lambda < 0$, $b - \lambda > 0$

На рис. 3 показано влияние гауссовой кривизны на напряженное состояние оболочки. Здесь параметр $\lambda = 1$ соответствует сферической оболочке; $\lambda = 0$ – цилиндрической оболочке; $\lambda = -1$ – псевдосфере. Данные и последующие результаты приводятся для случая, когда контур отверстия нагружен перерезывающими усилиями, в результате действия которых $P_z = 0$. Приведенные результаты соответствуют значению $\theta = 0^\circ$.

На рис. 4 представлены результаты для случая $\beta = 1$.

Выводы

В данной работе решена задача о влиянии кругового отверстия на напряженное состояние тонкостенной изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны. Были сделаны следующие выводы:

1) Максимальные значения коэффициентов концентрации напряжения K_{θ}^T при $\theta = 0$ достигаются для случая $\lambda = 1$, что соответствует сферической оболочке. Минимальные значения соответствуют случаю $\lambda = -1$, что соответствует псевдосферической оболочке.

2) При увеличении параметра β значения коэффициентов концентрации напряжения возрастают. После значения $\lambda = 0$ наблюдается монотонное возрастание K_{θ}^T .

3) Наибольшие значения K_{θ}^T при $\beta = 1$ в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ соответствуют случаю $\lambda = 1$ и принимают значение $K_{\theta}^T = 2,79$. Наименьшее значение K_{θ}^T в точке $\theta = 0$ соответствует случаю $\lambda = -1$, где $K_{\theta}^T = 2,35$, а в точке $\theta = \pi/2$ соответствует случаю $\lambda = -0,25$, где $K_{\theta}^T = 2,00$.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – Л.: Гостехиздат, 1947. – 252 с.
2. Шевляков Ю.А. Напряжение в сферическом днище, ослабленном круговым вырезом // Инж. сб. – М: Наука, 1956. – Вып. 24. – С. 226–230.
3. Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell // АТАА Journ. – 1967. – Vol. 5. – No. 9. – P. 87–91.
4. Lekkerkerker J.G. On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. – Delft: Vitgeverij Waltman, 1965.
5. Пирогов И.М. Влияние кривизны на распределение напряжений около отверстия в цилиндрической оболочке // Прикл. механика. – 1965. – Т.1, № 12. – С. 116–119.
6. Именитов Л.Б. Задача о сферической оболочке с неподкрепленным отверстием // Инженерный журнал. – 1963. – Т. 3, № 1. – С. 93–100.

7. Сяський А.А., Лунь Е.И. Напряженное состояние изотропной сферической оболочки с круговым отверстием // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 8. – С. 98–102.
8. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
9. Методы расчета оболочек: в 5 т. Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь [и др.]. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
10. Загора С.В., Чехов В.Н., Шнеренко К.И. О концентрации напряжений около кругового отверстия в трансверсально-изотропной сферической оболочке // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 12. – С. 99–106.
11. Loo Wen-da, Cheng Yao-shun. The effect of transverse shear deformation on stress concentration factors for shallow shells with a small circular hole // Applied Mathematics and Mechanics. – 1991. – Vol. 12(2). – P. 195–202.
12. Шевченко В.П., Загора С.В. О влиянии сдвиговой жесткости на напряженное состояние в трансформной сферической оболочке с двумя круговыми отверстиями при их сближении // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – № 12. – С. 56–62
13. Хома И.Ю., Стрыгина О.А. Напряженное состояние пологой сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы касательные напряжения // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 62–68.
14. Nitin K.J. Analysis of Stress Concentration and Deflection in Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates with Central Circular Hole under Transverse Static Loading // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2009. – Vol. 36. – P. 407–413.
15. Reissner E., Wan F.Y.M. Further considerations of stress concentration problems for twisted or sheared shallow spherical shells // International Journal Solids Structures. – 1994. – Vol. 31. – No. 16. – P. 2153–2165.
16. Hsu Chin-yun, Yeh Kai-yuan. The General Solution of Bending of a Spherical Thin Shallow Shell with a Circular Hole at the Center under Arbitrary Transverse Loads // Applied Mathematics and Mechanics. – 1980. – Vol. 1. – No. 3. – P. 341–356.
17. Чернышенко И.С., Сторожук Е.А., Харенко С.Б. Упругопластическое состояние гибких конических оболочек с круговым вырезом

при осевом растяжении // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 86–92.

18. Довбня Е.Н. Деформация контура кругового отверстия в ортотропных оболочках при растягивающей нагрузке // Вісник Донец. ун-ту. Сер. А. – 2000. – № 1. – С. 51–55.

19. Довбня Е.Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропной оболочки с круговым отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – № 27. – С. 154–158.

20. Довбня К.М. Розвиток методу граничних інтегральних рівнянь в теорії ортотропних оболонок з розрізами та отворами: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Донецьк, 2001. – 362 с.

21. Довбня Е.Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизн, ослабленных разрезами и отверстиями // Вісник Донец. ун-ту. Сер. А: природничі науки. – 1998. – Вип. 2. – С. 45–52.

22. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука. – 1976. – 512 с.

23. Власов В.З. Избранные труды: в 3 т. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.

24. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка. – 1976. – 444 с.

References

1. Lur'e A.I. Statics of Thin-walled Elastic Shells. State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. Moscow, 1947; translation, AEC-tr-3798, Atomic Energy Commission, 1959.

2. Shevliakov Iu.A. Napriazhenie v sfericheskom dnishche, oslablenom krugovym vyrezom [Stresses in the spherical bottom weakened by a circular cut]. *Inzhenernyj sbornik*, 1956, vol. 24, pp. 226-230.

3. Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell. *ATAA Journ.*, 1967, vol. 5, no. 9, pp. 87-91.

4. Lekkerkerker J.G. On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Delft: Vitgeverij Waltman, 1965.

5. Pirogov I.M. Vliyanie krivizny na raspredelenie napriazhenij okolo otverstiya v tsilindricheskoj obolochke [Effect of curvature on the stress

distribution near the hole in the cylindrical shell]. *Applied Mechanics*, 1965, vol.1, no. 12, pp. 116-119.

6. Imenitov L.B. Zadacha o sfericheskoy obolochke s nepodkreplennym otverstiem [The problem of a spherical shell with an unsupported hole]. *Inzhenernyi zhurnal*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 93-100.

7. Syaskii A.A., Lun E.I. State of stress in an isotropic spherical shell with a circular hole. *Prikladnaya mekhanika*, 1974, vol. 10, no. 8, pp. 884-887.

8. Savin G.N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij [Stress distribution around holes]. Kiev: Naukova dumka, 1968. 888 p.

9. Guz A.N., Chernyshenko I.S., Chekhov Val.N., Chekhov Vik.N., Shnerenko K.I. Metody rascheta obolochek: v 5 t. T.1. Teoriya tonkikh obolochek, oslablennykh otverstiyami [Methods of calculation of shells. In 5 vols. Vol. 1. The theory of thin shells weakened by holes]. Kiev: Naukova dumka, 1980, 636 p.

10. Zakora S.V., Chekhov V.N., Shnerenko K.I. Stress concentration around a circular hole in a transversely isotropic spherical shell. *Prikladnaya mekhanika*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1391-1397.

11. Loo Wen-da, Cheng Yao-shun. The effect of transverse shear deformation on stress concentration factors for shallow shells with a small circular hole. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1991, no. 12(2), pp. 195-202.

12. Shevchenko V.P., Zakora S.V. O vliyaniі sdvigovoy zhestkosti na napryazhennoe sostoyanie v transtropnoy sfericheskoy obolochke s dvumya krugovymi otverstiyami pri ikh sbliizhenii [On the effect of shear stiffness on the stress state in transtropic spherical shell with two circular holes on their approach]. *Dopovidi Natsional'noi akademii nauk Ukraini*, 2010, no. 12, pp. 56-62.

13. Khoma I.Yu., Starygina O.A. Napryazhennoe sostoyanie pologoj sfericheskoy obolochki s krugovym otverstiem, na poverkhnosti kotorogo zadany kasatelnye napryazheniya [Stress state of shallow spherical shell with a circular hole where shear stresses are given on the surface]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2010, no. 1 (47), pp. 62-68.

14. Nitin K.J. Analysis of Stress Concentration and Deflection in Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates with Central Circular Hole under Transverse Static Loading. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2009, vol. 36, pp. 407-413.

15. Reissner E., Wan F.Y.M. Further considerations of stress concentration problems for twisted or sheared shallow spherical shells. *International Journal Solids Structures*, 1994, vol. 31, no. 16, pp. 2153-2165.

16. Hsu Chin-yun, Yeh Kai-yuan. The General Solution of Bending of a Spherical Thin Shallow Shell with a Circular Hole at the Center under Arbitrary Transverse Loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 1, no. 3, pp. 341-356.

17. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A., Kharenko S.B. Elastoplastic state of flexible conical shells with a circular hole under axial tension. *International Applied Mechanics*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 679-684.

18. Dovbnya E.N. Deformatsiya kontura krugovogo otverstiya v ortotropnykh obolochkakh pri rastyagivaiushchej nagruzke [Deformation of the contour of a circular hole in orthotropic shells under tensile load]. *Visnik Donetskogo universitetu. Ser.A*, 2000, no. 1, pp. 51-55.

19. Dovbnya E.N. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie ortotropnoy obolochki s krugovym otverstiem [Stress-strain state of orthotropic shell with a circular hole]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 1997, no. 27, pp. 154-158.

20. Dovbnya K.M. Rozvitok metodu granichnykh integral'nykh rivnian' v teorii ortotropnykh obolonok z rozrizami ta otvorami [The development of the method of boundary integral equations in the theory of orthotropic shells with holes and cuts]. *Thesis of doctors degree dissertation physics and mathematics sciences*. Donetsk, 2001, 362 p.

21. Dovbnya E.N. Sistema granichnykh integral'nykh uravnenii dlia ortotropnykh obolochek nulevoi i otritsatel'noi krivizn, oslablennykh razrezami i otverstiiami [System of boundary integral equations for orthotropic shells with zero and negative curvature, weakened by cuts and holes]. *Visnik Donets'kogo universitetu. Ser. A: prirodnichi nauki*, 1998, vol. 2, pp. 45-52.

22. Goldenveizer A.L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka, 1976. 512 p.

23. Vlasov V.Z. Izbrannye trudy: v 3 t., T. 1. [Selected Works, in 3 vols, vol. 1]. Moscow: Akademiya nauk SSSR, 1962. 528 p.

24. Panasiuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. Raspredelenie napryazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh [The stress distribution around cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova dumka, 1976. 444 p.

Об авторах

Довбня Екатерина Николаевна (Донецк, Украина) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета (83055, Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24).

Крупко Наталья Андреевна (Донецк, Украина) – аспирант кафедры прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета (83055, Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24, e-mail: nataliekrupko@gmail.com).

About the authors

Dovbnya Ekaterina Nikolaevna (Donetsk, Ukraine) – Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mechanics and Computer Technology Donetsk National University (24, Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine).

Krupko Nataliia Andreevna (Donetsk, Ukraine) – Doctoral student Department of Applied Mechanics and Computer Technology Donetsk National University (24 Universitetskaya str., 83055, Donetsk, Ukraine, e-mail: nataliekrupko@gmail.com).

Получено 10.02.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Довбня Е.Н., Крупко Н.А. Влияние кругового отверстия на напряженное состояние оболочки произвольной гауссовой кривизны // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 108–125.

Please cite this article in English as:

Dovbnya E.N., Krupko N.A. Influence of circular hole on the shell stress state for arbitrary Gaussian curvature. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2013. No. 1. P. 108-125.