DOI: 10.15593/2224-9982/2019.56.05

УДК 539.3:534.83

Н.В. Осадчий, В.А. Малышев, В.Т. Шепель

ПАО «ОДК-Сатурн», Рыбинск, Россия

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧЕСКОЙ И ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Осуществлен анализ подходов к построению математических моделей статической и динамической прочности многослойных конструкций. Выполненный в работе анализ литературы показал, что в настоящее время для исследования статической и динамической прочности используются в основном двумерные модели, построенные с использованием упрощающих гипотез. Показано, что наиболее точными и наименее сложными являются модели с независимыми слоями. Причем дифференциальные уравнения и граничные условия целесообразно получать из условий минимума функционала полной потенциальной энергии многослойной конструкции. С помощью трехмерной модели исследован характер изменения перемещений по толщине пакета слоев в зависимости от жесткости слоя заполнителя при поперечном сжатии. Это позволило обоснованно выбрать гипотезы для построения корректных двумерных моделей. В частности, модели с независимыми слоями, дополненные условиями сопряжения на границах, использованы для построения моделей статической прочности трех и пятислойных сотовых панелей звукопоглощающих конструкций в виде замкнутых систем дифференциальных уравнений, имеющих решения в элементарных функциях. Полученные аналитические и верифицированные на их основе конечно-элементные модели позволяют оценить напряженно-деформированное состояние при различных условиях их закрепления, а также частоты и формы собственных колебаний панелей звукопоглощающих конструкций в процессе опытно-конструкторских работ. Выполненное сравнение расчетных и полученных методом голографической интерферометрии частот и форм свободных колебаний подтвердило их достоверность. Разработанные модели апробированы успешным их применением при проектировании конструкции панелей звукопоглощающих конструкций, что обеспечило выполнение требований норм летной годности авиационных двигателей 5-го поколения.

Ключевые слова: прочностная доводка, многослойные конструкции, панели звукопоглощающих конструкций, аналитические модели, дифференциальные уравнения.

N.V. Osadchy, V.A. Malyshev, V.T. Shepel

PJSC "UEC-Saturn", Rybinsk, Russian Federation

GENERATION OF STATIC AND DYNAMIC STRENGTH MODELS OF MULTI-LAYER STRUCTURES BASED ON THE VARIATION CALCULUS

The paper deals with the analysis of approaches to building the mathematical static and dynamic strength models of multi-layer structures. The performed literature analysis showed that currently, to investigate static and dynamic strength, 2D models built on the basis of simplifying hypotheses are mainly used. It is shown that the most accurate and least complicated are models with independent layers. Besides, there is a good reason to obtain differential equations and boundary conditions from the condition for minimum of the total potential energy functional of a multi-layer structure. With the help of a 3D model, the displacement behavior of the layer package in terms of thickness depending on the filler layer rigidity at transverse compression is investigated. This enabled to reasonably select the hypotheses for building 2D correct models. In particular, models with independent layers complemented with blending conditions at the boundaries are used for building the static strength models of three- and five-layer honeycomb acoustic panels by way of determined systems of differential equations in elementary functions solutions. The obtained analytical finite-element models verified on their basis allow evaluation of the stress-strain behavior under various fixing conditions, natural frequencies and vibration modes of acoustic panels at the design definition stage. The performed assimilation of frequencies and natural modes, both calculated and obtained by the holographic interferometry method, confirmed their authenticity. The developed models have been tested and are successfully applied in the acoustic panels design process, which enables meeting the airworthiness standard requirements for the 5th-generation aircraft engines.

Keywords: strength development, multi-layer structures, acoustic panels, analytical model, differential equations.

Введение

В аэрокосмической отрасли широко применяются многослойные конструкции, состоящие из несущих обшивок, разделенных слоями заполнителя. Они удачно сочетают эффективные весовые характеристики при высокой жесткости, несущей способности и хороших теплозащитных свойствах. Сотовые звукопоглощающие конструкции (ЗПК) применяются в качестве облицовочных панелей для улучшения акустических характеристик двигателя. Разрушение панелей ЗПК может привести к нарушению требований летной годности из-за помпажа, повреждений проточной части, вырыва закладных элементов и т.д. В связи с этим доведение панелей ЗПК до требований норм летной годности предполагает применение эффективных методов их прочностной доводки при минимальных затратах и в сжатые сроки, что возможно только с применением компьютерных технологий.

Для оценки статической и динамической прочности широко используются коммерческие программные продукты, реализующие метод конечных элементов (ANSYS, NASTRAN и пр.). Опыт их применения в области многослойных конструкций показал, что при всех своих достоинствах они обладают рядом существенных недостатков:

- выполнение условия непрерывности перемещений при переходе границы раздела слоев не гарантирует выполнение условия непрерывности поперечных нормальных и касательных напряжений;
- условия равновесия и совместности деформаций, легко вводимые в функционал метода вариационного исчисления посредством ограничений с множителями Лагранжа и повышающие достоверность расчета, не могут быть введены в пакеты коммерческих программ ввиду их закрытости;
- сильное влияние на результаты расчетов плотности конечно-элементной сетки и типа элементов, особенно в зонах закрепления и приложения нагрузки (влияние краевых эффектов).

В связи этим конечно-элементные модели многослойных конструкций с сотовым заполнителем должны быть верифицированными. На ранних стадиях проектирования ЗПК, когда окончательная геометрия конструкции не определена, верификацию конечно-элементной модели целесообразно выполнить на базе аналитических математических моделей, разработанных для многослойных конструкций с сотовым заполнителем. Необходимость этого обусловлена тем, что с точки зрения механики многослойные конструкции с сотовым заполнителем имеют ряд особенностей, основной из которых является высокая поперечная анизотропия упругих свойств при переходе от слоя к слою. Это приводит к резкому изменению угла поворота поперечного сечения слоя при переходе через границу раздела слоев, что выражается в характерной ZZ-образной эпюре продольных перемещений (рис. 1), известной в зарубежной литературе как ZZ-эффект [1].

Рис. 1. ZZ-образная эпюра изменения продольных перемещений по толщине слоев панели

Следует указать следующие особенности конструкций с сотовым заполнителем, которые также учитывались при построении математических моделей:

- сотовый заполнитель не оказывает сопротивления изгибающим и растягивающим нагрузкам (так называемый легкий заполнитель);
- при поперечном изгибе толщина заполнителя не изменяется до потери устойчивости стенок сот (абсолютно жесткий при поперечном сжатии);
- толщина несущих слоев значительно меньше толщины слоя заполнителя.

Принципы построения математических моделей многослойных конструкций с сотовым заполнителем

При разработке математических моделей приходится решать противоречивую задачу: достижение максимальной точности расчета при их минимальной математической сложности. Этим и обусловлено большое разнообразие математических моделей многослойных конструкций. На основе анализа более чем 400 работ Ег. Carrera в работе [1] предложил классификацию моделей многослойных конструкций, а также сформулировал требования, которым они должны отвечать.

Наиболее точными и универсальными являются математические модели, основанные на решении 3D-задачи теории упругости. Они не требуют введения упрощающих гипотез, касающихся механических характеристик материалов и характера деформирования слоев. В работе Brischetto [2] предложен метод точного трехмерного расчета на статическую прочность однослойных и многослойных плоских панелей и криволинейных оболочек. В работе рассмотрены изотропные, ортотропные композитные структуры, а также многослойные структуры с сотовым заполнителем. Рассматривались условия шарнирного опирания по контуру при нагружении синусоидальной нагрузкой. Автором получены дифференциальные уравнения равновесия сферической оболочки, которые легко преобразуются в уравнения для цилиндрической оболочки и плоской панели. Этим обеспечивается универсальность предложенного метода. Проверка метода была выполнена посредством сравнения результатов расчетов с результатами, полученными ранее Pagano [3], Fan и Zhang [4], Ren [5], Varadan и Bhaskar [6]. Общий недостаток данных моделей – решение является очень громоздким, требует больших вычислительных ресурсов из-за плохо обусловленной системы уравнений. С увеличением количества слоев число дифференциальных уравнений резко возрастает, так как для каждого слоя необходимо записать по три дифференциальных уравнения. Аналитическое решение можно получить лишь для условий шарнирного опирания кромок конструкции. Это делает эти модели малоприменимыми для выполнения инженерных расчетов, и они используются как «эталонные» для проверки более простых математических моделей многослойных конструкций.

В расчетной практике наибольшее распространение получили 2D-модели, которые строятся на основе 3D-моделей посредством введения упрощающих гипотез. В работе [1] выделено три типа моделей (рис. 2):

- эквивалентные однослойные модели (Equivalent Single Layer Model – ESLM);
- ZZ-модели (Zig-Zag Model – ZZM);
- модели с независимыми слоями (Layer-Wise Model – LWM).

Рис. 2. Эпюры продольных перемещений в 2D-моделях [1]

В моделях ESLM вводятся аппроксимирующие функции – гипотезы, описывающие характер изменения перемещений по толщине пакета слоев. Изменение перемещений по координатам x, y панели (см. рис. 2) описывается функцией $U(x, y)$, которая находится из решения системы дифференциальных уравнений. Преимущество ESLM в том, что количество дифференциальных уравнений не зависит от количества слоев. Кроме того, рациональным выбором аппроксимирующей функции легко удовлетворить условиям непрерывности перемещений и поперечных напряжений на границе раздела слоев, а также выполнить условия равновесия на границах модели. Недостаток заключается в том, что с помощью этой модели практически невозможно повторить ZZ-эпюру продольных перемещений, что сказывается на точности расчета напряжений как в слоях, так и вблизи границы раздела слоев. Для повышения точности необходимо увеличивать количество аппроксимирующих функций, что влечет за собой увеличение порядка системы дифференциальных уравнений.

В ZZ-моделях, в отличие от ESLM-моделей, для каждого слоя вводится своя функция-гипотеза, описывающая изменение перемещений по толщине слоя. Изменение перемещений по координатам x, y панели (см. рис. 2) описывается неизвестной функцией $U(x, y)$, которая находится также из решения системы дифференциальных уравнений. Следует отметить, что первыми, кто предложил использовать такие модели для исследования многослойных конструкций, являлись С.Г. Лехницкий [7] (расчет многослойных балок) и С.А. Амбарцумян [8] (расчет многослойных пластин и оболочек). Преимущество ZZ-моделей в том, что в этих моделях количество дифференциальных уравнений не зависит от количества слоев.

Более точными являются модели с независимыми слоями (LWM), в которых изменение перемещений по длине и толщине слоя для каждого слоя описывается своей гипотезой. Изменение перемещений по координатам x, y панели (см. рис. 2) описывается для каждого слоя своей функцией, которая находится из решения системы дифференциальных уравнений. По точности расчета эти модели приближаются к моделям, построенным на основе трехмерной теории упругости. Основной их недостаток – количество уравнений зависит от количества слоев.

Для математического описания характера изменения перемещений по толщине слоя или пакета слоев исследователями предложено достаточно большое количество аппроксимирующих функций. Прежде всего следует отметить степенные ряды Тейлора [9–11]. Их недостаток в том, что повышение точности расчета требует увеличения степени полинома, что, в свою очередь, увеличивает количество неизвестных функций. Это, с одной стороны, увеличивает порядок системы дифференциальных уравнений, а с другой – увеличивает количество задаваемых граничных условий и приводит к трудностям при их физической интерпретации. Эта проблема решается использованием аппроксимирующих функций более высокого порядка без введения дополнительных неизвестных: тригонометрические [12–14], гиперболические [15], экспоненциальные [16] и другие функции. Широко применяются и ряды, составленные из этих функций [17, 18]. Очень удобно, если функции, входящие в ряды, образуют ортогональную систему, что значительно упрощает выполнение математических вычислений. В частности, следует отметить ряды, составленные из полиномов Лежандра [19].

Анализ, выполненный в работе [20], показал, что математическую модель многослойной конструкции с сотовым заполнителем целесообразно строить на основе модели с независимыми слоями. В работе В.В. Болотина, Ю.В. Новичкова [21] эта модель адаптирована для анализа многослойных конструкций с сотовым заполнителем с учетом принятых гипотез и особенностей их механики. Однако в данном случае получить решения в аналитическом виде удастся только для простейших случаев закрепления кромок панели.

Перспективным направлением исследования статической прочности многослойных конструкций является применение вариационного исчисления. Дифференциальные уравнения и граничные условия в этом случае можно формировать на основе решения вариационной задачи [22] путем минимизации функционала полной потенциальной энергии анализируемой кон-

струкции. Преимущество этого подхода состоит в том, что дифференциальные уравнения формируются на основе четкого алгоритма, а при формировании естественных граничных условий не возникает противоречий и проблем с их физической интерпретацией. Эффективность применения вариационного подхода для прочностных расчетов в авиадвигателестроении наглядно продемонстрирована в работах И.А. Биргера [23, 24].

Тем не менее проблема прочностной доводки панелей ЗПК авиационных ГТД до требования норм летной годности и технического задания на их разработку на основе компьютерных технологий и экспериментальных исследований в перечисленных выше работах и работах прикладного характера не получила достаточного развития.

Обоснование выбора гипотез для построения 2D-модели

Одним из основных вопросов, который возникает при построении 2D-модели, является обоснованный выбор функции – гипотезы, которая будет описывать изменение перемещений по толщине слоев. С этой целью авторами в работе [25] было предложено использовать 3D-модель трехслойной прямоугольной панели с легким заполнителем, шарнирно опертой по кромкам и нагруженной равномерно распределенным поперечным давлением. Вариационная постановка задачи позволила получить систему дифференциальных уравнений, условия сопряжения слоев и условия равновесия на наружной и внутренней поверхностях панели. Данная задача с помощью метода двойных тригонометрических рядов [26] была сведена к системе из 9 дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_{mn}^k(z)$, $\psi_{mn}^k(z)$, $\chi_{mn}^k(z)$, где $k=1, 2, 3$, описывающих изменение перемещений по толщине слоев по координате z . В развернутом виде данная система дифференциальных уравнений при фиксированных $M = \pi m/a$ и $N = \pi n/b$ имеет вид

$$\begin{aligned} (M^2 E_{11}^k + N^2 G_{12}^k) \varphi_{mn}^k + G_{13}^k \frac{d^2}{dz^2} \varphi_{mn}^k + MN(E_{12}^k + G_{12}^k) \psi_{mn}^k - M(E_{13}^k + G_{13}^k) \frac{d}{dz} \chi_{mn}^k &= 0; \\ MN(E_{12}^k + G_{12}^k) \varphi_{mn}^k + (M^2 G_{12}^k + N^2 E_{22}^k) \psi_{mn}^k + G_{23}^k \frac{d^2}{dz^2} \psi_{mn}^k - N(E_{23}^k + G_{23}^k) \frac{d}{dz} \chi_{mn}^k &= 0; \\ M(E_{13}^k + G_{13}^k) \frac{d}{dz} \varphi_{mn}^k + N(E_{23}^k + G_{23}^k) \frac{d}{dz} \psi_{mn}^k - (M^2 G_{13}^k + N^2 G_{23}^k) \chi_{mn}^k + E_{33}^k \frac{d^2}{dz^2} \chi_{mn}^k &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Другие используемые при записи системы константы имеют общепринятый в теории упругости смысл. Однозначность решения системы (1) обеспечивается 18 условиями в точках $z = z_k$ ($k=0, 1, 2, 3$), которые расположены на сопрягаемых слоях и в точках наружной и внутренней поверхностей панели.

Решение системы (1) в классе полиномов позволило определить минимальную степень полинома, которая необходима для корректного решения задачи с учетом поперечной жесткости заполнителя. В случае полиномов 1-й степени

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^k(z) &= A_0^k + A_1^k z; \\ \psi_{mn}^k(z) &= B_0^k + B_1^k z; \\ \chi_{mn}^k(z) &= C_0^k + C_1^k z \end{aligned}$$

имеется 18 неизвестных констант $A_0^k, A_1^k, B_0^k, B_1^k, C_0^k, C_1^k$, где $k=1, 2, 3$, которые могут быть однозначно найдены из 18 условий в точках $z = z_k$. При этом система (1) остается невыполненной. При использовании полиномов 2-й степени

$$\varphi_{mn}^k(z) = A_0^k + A_1^k z + A_2^k z^2;$$

$$\psi_{mn}^k(z) = B_0^k + B_1^k z + B_2^k z^2;$$

$$\chi_{mn}^k(z) = C_0^k + C_1^k z + C_2^k z^2$$

имеется 27 независимых параметров $A_0^k, A_1^k, A_2^k, B_0^k, B_1^k, B_2^k, C_0^k, C_1^k, C_2^k$, где $k = 1, 2, 3$, из которых 18 констант могут быть однозначно найдены из 18 условий в точках $z = z_k$. Остальные 9 констант могут быть найдены из решения системы (1) в промежуточной по толщине точке каждого из слоев. Таким образом, для корректного решения задачи с учетом поперечной жесткости заполнителя степень аппроксимирующего полинома должна быть не менее 2. Были также получены эпюры продольных и поперечных перемещений по толщине при податливом и жестком в поперечном направлении заполнителе (рис. 3 и 4).

Рис. 3. Эпюры перемещений по толщине панели при податливом в поперечном направлении заполнителе:
 а – продольные перемещения U, V ; б – поперечные перемещения W

Рис. 4. Эпюры продольных перемещений U, V по толщине панели при жестком в поперечном направлении заполнителе

Таким образом, можно сделать следующее заключение:

- в случае малой поперечной жесткости заполнителя зависимость поперечных перемещений от поперечной координаты с достаточной точностью аппроксимируется полиномом 2-й степени, а зависимость продольных перемещений – полиномом 3-й степени (см. рис. 3);
- в случае жесткого в поперечном направлении заполнителя зависимость поперечных перемещений от поперечной координаты аппроксимируется полиномом 0-й степени (поперечные перемещения постоянны по толщине панели), а продольные перемещения по толщине заполнителя аппроксимируются полиномом 1-й степени (см. рис. 4).

Построение аналитических моделей статической прочности на основе вариационного исчисления

Оценка статической прочности панелей ЗПК на различных стадиях опытно-конструкторских работ может быть проведена на основе аналитических моделей. Они могут быть использованы и для верификации конечно-элементных моделей.

На основе гипотез, рассмотренных в предыдущем подразделе, авторами были построены аналитические модели трех- и пятислойных [27, 28, 29–31] конструкций с сотовым заполнителем для различных схем нагружения и различной геометрии.

Для всех аналитических моделей системы дифференциальных уравнений и естественные граничные условия получены из условий минимума функционала полной потенциальной энергии анализируемой конструкции. Для вывода зависимостей между перемещениями обшивок и заполнителя и их относительными деформациями в случае моделей с прямолинейной осью использовались соотношения Коши [32]. В случае моделей с круговой осью использовались соотношения для относительных деформаций теории тонких оболочек [33], деформации поперечного сдвига слоя заполнителя определялись с учетом его толщины [32].

Так, для пятислойной сотовой панели с круговой осью и легким заполнителем система дифференциальных уравнений имеет вид [27]

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_{22}}{R_1^4} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} - \frac{M_8}{R_1^3} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{M_{18}}{R_1^2} w(\alpha) - \frac{M_4}{2R_1^2} \frac{d^3 \omega_1}{d\alpha^3} + \frac{M_{14}}{2R_1} \left(\frac{d\omega_1}{d\alpha} \right) - \frac{M_6}{2R_1^2} \frac{d^3 \omega_2}{d\alpha^3} + \frac{M_{16}}{2R_1} \left(\frac{d\omega_2}{d\alpha} \right) - \\
 & - \left(\frac{M_8}{2R_1^3} + \frac{M_{22}}{R_1^4} \right) \frac{d^3 v}{d\alpha^3} + \left(\frac{M_8}{2R_1^3} + \frac{M_{18}}{R_1^2} \right) \frac{dv}{d\alpha} + q(\alpha) = 0; \\
 & \left(\frac{M_8}{R_1^3} + \frac{2M_{22}}{R_1^4} \right) \frac{d^3 w}{d\alpha^3} - \left(\frac{M_8}{R_1^3} + \frac{2M_{18}}{R_1^2} \right) \frac{dw}{d\alpha} - \left(\frac{M_4}{R_1^2} + \frac{M_{14}}{R_1} \right) \frac{d^2 \omega_1}{d\alpha^2} - \\
 & - \left(\frac{M_6}{R_1^2} + \frac{M_{16}}{R_1} \right) \frac{d^2 \omega_2}{d\alpha^2} - \left(\frac{2M_8}{R_1^3} + \frac{2M_{18}}{R_1^2} + \frac{2M_{22}}{R_1^4} \right) \frac{d^2 v}{d\alpha^2} = 0; \\
 & -2M_{10} \frac{d^2 \omega_1}{d\alpha^2} + 2(GF_1) \omega_1(\alpha) - M_{20} \frac{d^2 \omega_2}{d\alpha^2} - \left(\frac{M_4}{R_1^2} + \frac{M_{14}}{R_1} \right) \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{M_4}{R_1^2} \frac{d^3 w}{d\alpha^3} - \frac{M_{14}}{R_1} \frac{dw}{d\alpha} = 0; \\
 & -M_{20} \frac{d^2 \omega_1}{d\alpha^2} - 2M_{12} \frac{d^2 \omega_2}{d\alpha^2} + 2(GF_2) \omega_2(\alpha) - \left(\frac{M_6}{R_1^2} + \frac{M_{16}}{R_1} \right) \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{M_6}{R_1^2} \frac{d^3 w}{d\alpha^3} - \frac{M_{16}}{R_1} \frac{dw}{d\alpha} = 0,
 \end{aligned}$$

где $M_{i=4+2i}$ ($i = 0, \dots, 9$) – коэффициенты, зависящие от размеров панели и свойств материала обшивок и заполнителя; w, v – поперечные и продольные перемещения панели; ω_1, ω_2 – перемещения 1-го и 2-го слоев заполнителя; R_1 – радиус срединной поверхности внутренней обшивки; α – секторальный угол панели; $(GF)_1, (GF)_2$ – жесткость слоев заполнителя при поперечном сдвиге; q – равномерно распределенная нагрузка.

Полученная система решена методом операционного исчисления относительно неизвестных функций w, v, ω_1, ω_2 , выраженных через 10 базисных:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = \alpha;$$

$$F_3 = \sin \alpha, \quad F_4 = \cos \alpha, \quad F_5 = \alpha \sin \alpha, \quad F_6 = \alpha \cos \alpha;$$

$$F_7 = \exp(r_1 \alpha), \quad F_8 = \exp(-r_1 \alpha), \quad F_9 = \exp(r_2 \alpha), \quad F_{10} = \exp(-r_2 \alpha),$$

где $\pm r_1, \pm r_2$ – корни уравнения $Ar^4 + Br^2 + C = 0$. Функции w, v, ω_1, ω_2 имеют вид

$$v = C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3 + C_4 F_4 + C_5 F_5 + C_6 F_6 + C_7 F_7 + C_8 F_8 + C_9 F_9 + C_{10} F_{10};$$

$$w = C_{11} F_1 + C_{12} F_3 + C_{13} F_4 + C_{14} F_5 + C_{15} F_6 + C_{16} F_7 + C_{17} F_8 + C_{18} F_9 + C_{19} F_{10} - R_1^2 q / M_{18};$$

$$w_1 = C_{20} F_3 + C_{21} F_4 + C_{22} F_7 + C_{23} F_8 + C_{24} F_9 + C_{25} F_{10};$$

$$w_2 = C_{26} F_3 + C_{27} F_4 + C_{28} F_7 + C_{29} F_8 + C_{30} F_9 + C_{31} F_{10}.$$

Константы $C_1, C_2, \dots, C_{31}$ линейным образом выражаются через 10 независимых параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$. Окончательное решение относительно функций w, v, ω_1, ω_2 сводится к нахождению независимых постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$ через граничные условия.

Для трехслойной панели с круговой осью и легким заполнителем система дифференциальных уравнений имеет вид [28]

$$\begin{aligned} & \frac{(EF)}{R_1^2} \left(\frac{dv}{d\alpha} + w(\alpha) \right) + \frac{(EJ)_1}{2R_1^3} \left[\left(\frac{dv}{d\alpha} - \frac{d^2 v}{d\alpha^2} \right) - \left(\frac{d^3 v}{d\alpha^3} + \frac{d^2 v}{d\alpha^2} \right) \right] - \frac{(EJ)_2}{R_1^4} \left(\frac{d^3 v}{d\alpha^3} + \frac{d^4 w}{d\alpha^4} \right) - \\ & - \frac{(GF)_1}{2R_1^2} \left(\frac{d^3 \omega}{d\alpha^3} \right) + \frac{(GF)_2}{2R_1} \left(\frac{d\omega}{d\alpha} \right) + q(\alpha) = 0; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2(EF)}{R_1^2} + \frac{(EJ)_1}{R_1^3} \right) \left(\frac{d^2 v}{d\alpha^2} - \frac{dw}{d\alpha} \right) + \left(\frac{(EJ)_1}{R_1^3} + \frac{2(EJ)_2}{R_1^4} \right) \left(\frac{d^2 v}{d\alpha^2} - \frac{d^3 w}{d\alpha^3} \right) + \left(\frac{(GF)_1}{R_1^2} + \frac{(GF)_2}{R_1} \right) \frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} = 0;$$

$$(GF)_4 \omega(\alpha) - (GF)_3 \left(\frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} \right) - \frac{(GF)_2}{2R_1} \left(\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{dw}{d\alpha} \right) - \frac{(GF)_1}{2R_1^2} \left(\frac{d^2 v}{d\alpha^2} - \frac{d^3 w}{d\alpha^3} \right) = 0.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$w(\alpha) = C_{13} + C_{14} \alpha, \quad v(\alpha) = C_{15} + C_{16} \alpha, \quad w(\alpha) = C_{17} + C_{18} \alpha \quad \text{при } r_{1,2} = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha) &= C_1 \alpha \sin(\alpha) + C_2 \alpha \cos(\alpha) + C_3 \sin(\alpha) + C_4 \cos(\alpha), \\ v(\alpha) &= C_5 \alpha \sin(\alpha) + C_6 \alpha \cos(\alpha) + C_7 \sin(\alpha) + C_8 \cos(\alpha), \\ w(\alpha) &= C_9 \alpha \sin(\alpha) + C_{10} \alpha \cos(\alpha) + C_{11} \sin(\alpha) + C_{12} \cos(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad \text{при } r_{3,4,5,6} = \pm i;$$

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha) &= C_{19} sh(k\alpha) + C_{20} ch(k\alpha), \\ v(\alpha) &= C_{21} sh(k\alpha) + C_{22} ch(k\alpha), \\ \omega(\alpha) &= C_{23} sh(k\alpha) + C_{24} ch(k\alpha) \end{aligned} \right\} \quad \text{при } r_{7,8} = \pm (-K_2/K_1)^{1/2}$$

и частное решение вида

$$w(\alpha) = C, \quad v(\alpha) = 0, \quad \omega(\alpha) = 0,$$

где $k = \pm(-K_1/K_2)^{1/2}$; α – секторальный угол панели; w, v – поперечные и продольные перемещения панели; ω – перемещения заполнителя; $r_{1,...,8}$ – корни характеристического уравнения; $K_{1,2}$ – коэффициенты характеристического уравнения, зависящие от механических характеристик панели и ее размеров; $(EJ)_1$ – жесткость при изгибе, которая обусловлена деформациями растяжения-сжатия несущих обшивок; $(EJ)_2$ – жесткость, обусловленная собственным изгибом несущих обшивок; $(GF)_1, ..., (GF)_4$ – характеристики жесткости заполнителя при поперечном сдвиге; q – равномерно распределенная нагрузка.

Из коэффициентов $C_1, ..., C_{24}$ независимыми являются только 8, которые определяются из граничных условий.

Анализ решений систем дифференциальных уравнений показал, что они состоят из 2 решений:

- решения, которое описывает деформации балки с круговой осью и податливым на сдвиг заполнителем;
- решения, которое описывает «краевой эффект», возникающий вблизи мест закрепления и приложения сосредоточенных сил и быстро затухающий по мере удаления от этих мест [34].

Предложенные системы уравнений и их решения могут быть использованы как для оценок статической прочности панелей ЗПК, так и для верификации их конечно-элементных моделей.

Конечно-элементная модель частот и форм собственных колебаний панелей ЗПК

При проектировании панелей ЗПК, кроме статической прочности, необходима отстройка от резонансных режимов, для чего необходима информация о частотах и формах собственных колебаний. В отличие от работы [35], посвященной конечно-элементному анализу собственных частот и форм колебаний двухслойных звукопоглощающих панелей при действии гармонической нагрузки со стороны звуковой волны, в работе для исследования пятислойной панели ЗПК использовалась верифицированная модель на основе подтвержденных математических моделей [36].

В таблице представлены результаты оценки первых четырех форм собственных колебаний и отношение расчетных ν_p и экспериментальных $\nu_{\text{э}}$ значений частот собственных колебаний, полученных по верифицированной конечно-элементной модели пятислойной панели ЗПК.

Сравнение результатов, полученных с помощью конечно-элементной модели,
с результатами голографической интерферометрии реальной ЗПК

$\nu_p/\nu_{\text{э}}$	Частоты и формы собственных колебаний панели ЗПК	
	Твердотельная конечно-элементная модель	Экспериментальные значения
225/226

Окончание таблицы

$v_p/v_{\text{э}}$	Частоты и формы собственных колебаний панели ЗПК	
	Твердотельная конечно-элементная модель	Экспериментальные значения
382/328
485/510
910/842

Проверка достоверности модели частот и форм собственных колебаний верифицированной пятислойной панели ЗПК проводилась на основе экспериментальных данных, полученных путем проведения пинг-теста и голографической интерферометрии (испытания проводились ПАО «ОДК – Авиадвигатель» по техническому заданию ПАО «ОДК – Сатурн»). Экспериментальными данными, полученными как с помощью пинг-теста, так и методом голографической интерферометрии подтверждена достоверность конечно-элементной модели. В результате испытаний были выявлены 10 форм собственных колебаний реальной пятислойной панели ЗПК.

Таким образом, результаты сравнения значений частот и форм собственных колебаний, которые были получены расчетом и в ходе экспериментальных исследований, показали, что конечно-элементная модель позволяет получить достоверные оценки частот и форм собственных колебаний.

Заключение

На основе вариационного исчисления разработан комплекс математических моделей, позволяющий оценить напряженно-деформированное состояние, частоты и формы собственных колебаний многослойных сотовых панелей ЗПК авиационных двигателей, состоящих из нескольких разнородных по механическим характеристикам материалов. Математические модели позволяют целенаправленно формировать напряженно-деформированное состояние панелей ЗПК в процессе опытно-конструкторских работ по их созданию. Предложенные модели апробированы успешным их применением при разработке типовой конструкции панелей ЗПК, отвечающих требованиям норм летной годности и прошедших успешную их сертификацию в составе авиационных двигателей 5-го поколения.

Библиографический список

1. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Arch. Comput. Meth. Engng. – 2002. – Vol. 9(2). – P. 87–140.
2. Brischetto S. Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells // Composites. – 2017. – Part B, no. 119. – P. 230–252.
3. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. of Composite Materials. – 1970. – No. 4. – P. 20–34.
4. Fan J., Zhang J. Analytical solutions for thick, doubly curved, laminated shells // J. Eng. Mech. – 1992. – No. 118. – P. 1338–1356.
5. Ren J.G. Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending // Composite Sci. and Tech. – 1987. – No. 29. – P. 169–187.
6. Bhaskar K., Varadan T.K. Exact elasticity solution for laminated anisotropic cylindrical shells // Appl. Mech. – 1993. – No. 60. – P. 41–47.
7. Лехницкий С.Г. Расчет на прочность композитных балок // Вестник инженеров и техников. – 1935. – № 9. – С. 137–148.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 447 с.
9. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционного материала. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
10. Groha R.M.J., Tessler A. Computationally efficient beam elements for accurate stresses in sandwich laminates and laminated composites with delaminations, Comput // Methods Appl. Mech. Eng. – 2017. – № 320. – P. 369–395.
11. Cook G.M., Tessler A.I. A {3,2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams // Composites. – 1998. – Part B, no. 29B. – P. 565–576.
12. Ghugal Y.M. Flexure and vibration of thick beams using trigonometric shear deformation theory // Exp. Appl. Mech. – 2010. – No. 1(1). – P. 1–27.
13. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory // Mech. Adv. Composite Struct. – 2015. – No. 2(1). – P. 45–53.
14. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics // Composite Struct. – 2005. – No. 83. – P. 2225–2237.
15. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates / A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares // Composite Struct. – 2012. – No. 94. – P. 1814–1825.
16. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher order shear deformation theory // Composite Struct. – 2011. – No. 94. – P. 37–49.
17. Analysis of laminated composites and sandwich structures by trigonometric, exponential and miscellaneous polynomials and a MITC9 plate element / M. Filippi, M. Petrolo, S. Valvano, E. Carrera // Composite Struct. – 2016. – No. 150. – P. 103–114.
18. Best theory diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions / J. Yarasca, J.L. Mantari, M. Petrolo, E. Carrera // Composite Struct. – 2017. – No. 161. – P. 362–383.
19. Carrera E., Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems // Composite Struct. – 2005. – No. 69. – P. 271–293.
20. Carrera E., Ciuffreda A. Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loadings: a comparison of various theories // Composite Struct. – 2005. – No. 68. – P. 185–202.
21. Болотин В.В., Новичков Ю.В. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
22. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
23. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. – М.: Физика. Механика, 2015. – 152 с.
24. Биргер И.А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин / Оборонгиз. – М., 1959. – 29 с.
25. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Полиномиальная аппроксимация функции перемещения при изгибе трехслойной конструкции // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – № 2. – С. 2–8.

26. Srinivas S., Rao A.K. Bending, vibration and bulking of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates // *Solids Struct.* – 1970. – Vol. 6. – P. 1463–1481.
27. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Исследование поперечного изгиба пятислойной балки с круговой осью и податливым на сдвиг заполнителем // *Деформация и разрушение материалов.* – 2017. – № 11. – С. 16–22.
28. Осадчий Н.В., Шепель В.Т. Исследование поперечного изгиба сотовой трехслойной панели с круговой осью // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* – 2018. – № 1. – С. 86–93.
29. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Investigation of three-layer rectangular panel bending by variation method // *Russian Metallurgy (Metally).* – 2017. – No. 4. – P. 240–244.
30. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. / под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
31. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – 2-е изд. – Л.: Гос. союз. изд-во судостроит. пром-ти, 1962. – 432 с.
32. Ефимик В.А. Применение метода конечных элементов к задаче собственных колебаний прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника.* – 2014. – № 38. – С. 72–91.
33. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Методы выбора плотности и типа конечных элементов в задачах статической прочности многослойных конструкций // *Деформация и разрушение материалов.* – 2017. – № 1. – С. 10–17.
34. Осадчий Н.В., Шепель В.Т. Решение задачи изгиба пятислойной панели с использованием вариационного исчисления // *Изв. вузов. Авиационная техника.* – 2017. – № 1. – С. 26–31.
35. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Собственные частоты трехслойной панели с легким заполнителем // *Вестник ИРГТУ.* – 2014. – № 8(91). – С. 45–52.
36. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Исследование деформации пятислойной балки с податливым на сдвиг заполнителем при нагружении сосредоточенной силой // *Деформации и разрушение материалов.* – 2018. – № 7. – С. 11–16.

References

1. Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. *Arch. Comput. Meth. Engng*, 2002, Vol. 9(2), pp. 87-140.
2. Brischetto S., Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells. *Composites. Part B*, 119, 2017, pp. 230-252.
3. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *Journal of Composite Materials*, 1970, no. 4, pp. 20-34.
4. Fan J., Zhang J. Analytical solutions for thick, doubly curved, laminated shells. *J. Eng. Mech*, 1992, no. 118, pp. 1338-1356.
5. Ren J.G. Exact Solutions for Laminated Cylindrical Shells in Cylindrical Bending. *Composite Science and Technology*, 1987, no. 29, pp. 169-187.
6. Bhaskar K., Varadan T.K. Exact elasticity solution for Laminated Anisotropic Cylindrical Shells. *J. Appl. Mech*, 1993, no. 60, pp. 41-47.
7. Lekhnitskiy S.G. Raschet na prochnost kompozitnykh balok [Strength calculation for composite beams]. *Vestnik inzhenerov i tenikov*, 1935, no. 9, pp. 137-148.
8. Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]. Moscow: Nauka, 1974, 447 p.
9. Alfutov N.A., Zinovyev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloynykh plastin i obolochek iz kompozitsionnogo materiala [Calculation of multilayer plates and shells made of composite material]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1984, 264 p.
10. Groha R.M.J., Tessler A. Computationally efficient beam elements for accurate stresses in sandwich laminates and laminated composites with delaminations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 320 (2017), pp. 369-395.
11. Cook G.M., Tessler A. A {3,2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams. *Composites. Part B*, 29B, 1998, pp. 565-576.
12. Ghugal Y.M. Flexure and vibration of thick beams using trigonometric shear deformation theory. *J. Exp. Appl. Mech.*, 2010, no. 1(1), pp. 1-27.

13. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory. *Mech. Adv. Composite Structures*, 2015, 2(1), pp. 4-53.
14. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Composite Structures*, 83, 2005, pp. 2225-2237.
15. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N., Soares C.M.M. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, no. 94 (2012), pp. 1814-1825.
16. Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.*, 2011, no. 94, pp. 37-49.
17. Filippi M., Petrolo M., Valvano S., Carrera E. Analysis of laminated composites and sandwich structures by trigonometric, exponential and miscellaneous polynomials and a MITC9 plate element. *Composite Structures*, no. 150(2016), pp. 103-114.
18. Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E. Best Theory Diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions. *Composite Structures*, no. 161(2017), pp. 362-383.
19. Carrera E., Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, 2005, no. 69, pp. 271-293.
20. Carrera E., Ciuffreda A. Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loadings: a comparison of various theories. *Composite Structures*, no. 68 (2005), pp. 185-202.
21. Bolotin V.V., Novichkov Yu.V. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1980, 375 p.
22. Kan C.N. *Stroitel'naya mekhanika obolochek* [Construction mechanics shells]. Moscow: Mashinostroenie, 1966, 508 p.
23. Birger I.A. *Nekotoryye matematicheskiye metody resheniya inzhenernykh zadach* [Some mathematical methods for solving engineering problems]. Moscow: Fizika. Mekhanika, 2015, 152 p.
24. Birger I.A. *Variatsionnyye metody v stroitel'noy mekhanike turbomashin* [Variational methods in structural mechanics of turbomachines]. Moscow: Oborongiz, 1959, 29 p.
25. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Polinomialnaya approksimatsiya funktsii peremeshcheniya pri izgibe trekhslonnoy konstruksii [Polynomial approximation of the function of displacement during bending of a three-layer structure]. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2019, no. 2, pp. 2-8.
26. Srinivas S., Rao A.K. Bending, Vibration and Bulking of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates. *Solids Structures*, 1970, Vol. 6, pp. 1463-1481.
27. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Issledovaniye poperechnogo izgiba pyatislonnoy balki s krugovoy osyu i podatlivym na sdvig zapolnitelem [Investigation of transverse bending of a five-layer beam with a circular axis and a shear-compliant aggregate]. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2017, no. 11, pp. 16-22.
28. Osadchiy N.V., Shepel V.T. Issledovaniye poperechnogo izgiba sotovoy trekhslonnoy paneli s krugovoy osyu [The study of the transverse bending of the honeycomb three-layer panel with a circular axis]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2018, no. 1, pp. 86-93.
29. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Investigation of Three-Layer Rectangular Panel Bending by Variation Method. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2017, no. 4, pp. 240-244.
30. Timoshenko S.P., Gudyer Dzh. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Translation from English Edited by G.S. Shapiro. 2nd ed. Moscow: Nauka, 1979, 560 p.
31. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek. Izd. 2-e* [Theory of thin shells. 2nd Ed.]. Leningrad: Gosudarstvennoye soyuznoye izdatelstvo sudostroitel'noy promyshlennosti, 1962, 432 p.
32. Efimik V.A. *Primeneniye metoda konechnykh elementov k zadache sobstvennykh kolebaniy pryamougolnykh plastin i tsilindricheskikh obolochek* [Applying finite elements method to the problem of natural vibrations of rectangular plates and cylindrical shells]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2014, no. 38, pp. 72-91.
33. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. *Metody vybora plotnosti i tipa konechnykh elementov v zadachakh staticheskoy prochnosti mnogosloynnykh konstruksiy* [Methods for choosing the density and type of finite elements in problems of static strength of multilayer structures]. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2018, no. 1, pp. 26-31.

34. Osadchiy N.V., Shepel V.T. Resheniye zadachi izgiba pyatisloynoy paneli s ispolzovaniyem variatsionnogo ischisleniya [Resheniye zadachi izgiba pyatisloynoy paneli s ispolzovaniyem variatsionnogo ischisleniya]. Russian Aeronautics, 2018, no. 7, pp. 11-16.

35. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Sobstvennyye chastoty trekhsloynoy paneli s legkim zapolnitelem [Own frequencies of a three-layer panel with lightweight aggregate]. Proceedings of Irkutsk State Technical University, 2014, no. 8 (91), pp. 45-52.

36. Osadchiy N.V., Malyshev V.A., Shepel V.T. Issledovaniye deformatsii pyatisloynoy balki s podatlivym na sdvig zapolnitelem pri nagruzhении sosredotochennoy siloy [Investigation of the deformation of a five-layer beam with a flexible shear aggregate under loading with a concentrated force]. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2018, no. 7, pp. 11-16.

Об авторах

Осадчий Николай Васильевич (Рыбинск, Россия) – кандидат технических наук, эксперт КО «Прочность», ПАО «ОДК-Сатурн» (152903, г. Рыбинск, пр. Ленина, д. 163, e-mail: nikosadchii@yandex.ru).

Малышев Владимир Александрович (Рыбинск, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий специалист службы «Сертификация и летная годность», ПАО «ОДК-Сатурн» (152903, г. Рыбинск, пр. Ленина, д. 163; e-mail: malysheva314@mail.ru).

Шепель Вячеслав Тимофеевич (Рыбинск, Россия) – доктор технических наук, профессор, ведущий специалист службы «Сертификация и летная годность», ПАО «ОДК-Сатурн» (152903, Рыбинск, пр. Ленина, 163; e-mail: sshepel@yandex.ru).

About the authors

Nikolay V. Osadchy (Rybinsk, Russian Federation) – CSc in Technical Sciences, Expert of Strength Department, PJSC “UEC-Saturn” (163, Lenina st., Rybinsk, 152903, Russian Federation; e-mail: nikosadchii@yandex.ru).

Vladimir A. Malyshev (Rybinsk, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Specialist of Certification and Airworthiness Department, PJSC “UEC-Saturn” (163, Lenina st., Rybinsk, 152903, Russian Federation; e-mail: malysheva314@mail.ru).

Vyacheslav T. Shepel (Rybinsk, Russian Federation) – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Leading Specialist of Certification and Airworthiness Department, PJSC “UEC-Saturn” (163, Lenina st., Rybinsk, 152903, Russian Federation; e-mail: sshepel@yandex.ru).

Получено 03.03.2019