DOI: 10.15593/2224-9982/2017.51.04

УДК 534.1:539.3

О.В. Репецкий¹, И.Н. Рыжиков², Нгуен Тьен Куэт²

¹ Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского, Иркутск, Россия

² Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН С РАССТРОЙКОЙ ПАРАМЕТРОВ

Рабочие колеса турбомашин часто работают в сложных условиях: это высокие скорости вращения и температуры, а также большие переменные нагрузки от газовых сил. Колебания рабочих колес турбомашин являются дополнительным важным фактором, который значительно влияет на их прочность и долговечность. Обычно при решении задач динамики, прочности и долговечности роторов турбомашин с использованием численных методов они моделируются как идеальные циклически-симметричные системы. Однако в реальных рабочих колесах при их изготовлении и эксплуатации всегда имеются малые отличия лопаток друг от друга (по массе, геометрии, свойствам материалов), эти малые отличия называются расстройкой параметров (mistuning). Расстройка параметров нарушает циклическую симметрию рабочих колес турбомашин, может привести к локализации колебаний и оказывать значительное влияние на их динамические характеристики (частоты, формы колебаний, динамические напряжения) и, как следствие, на их долговечность. В статье представлены математические модели для решения задач динамики рабочих колес с расстройкой параметров. Также в программном комплексе ANSYS проведен расчет долговечности рабочего колеса фирмы Rolls-Royce. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: рабочее колесо, турбомашин, колебания, частоты, метод конечных элементов, математическая модель, долговечность, расстройка, напряжение, ANSYS.

O.V. Repetckii¹, I.N. Ryzhikov², Nguyen Tien Quyet²

¹ Irkutsk State Agrarian University named after A.A. Ezhevsky, Irkutsk, Russian Federation

² Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

NUMERICAL INVESTIGATION DYNAMICS AND DURABILITY OF BLADED DISK OF TURBOMACHINERY WITH MISTUNING PARAMETERS

The turbomachines rotor is often working in difficult conditions at high rotational speeds and temperatures. The vibrations of turbomachines rotors are an important factor that significantly affects their strength and durability. When investigating the dynamics and durability of turbomachines rotors, it is known that ideal rotors are cyclic-symmetric systems. However, in real bladed disks, when producing or operating them, small differences of the blades from each other (by mass, geometry, property of the material) always arise, all small differences of the blades are called the mistuning. The mistuning disrupts the cyclic symmetry of rotor of turbomachines, which significantly affects the dynamic characteristics and durability of the turbomachines bladed disks. This work presents mathematical modeling, numerical methods for solving problems of dynamics and durability of the Rolls-Royce bladed disk. As a result, received forms of oscillations, frequencies, amplitudes, dynamic stresses and durability of turbomachine bladed disks. The results are in good agreement with the experimental results.

Keywords: bladed disk, turbomachinery, vibrations, frequencies, finite element method, mathematical model, durability, mistuning, stress, ANSYS.

Введение

Расстройка параметров является одним из важных факторов, который может оказывать значительное влияние на колебания, напряженное состояние и, как следствие, на долговечность рабочих колес турбомашин. Рабочие колеса обычно моделируются как системы с конструктивной поворотной симметрией. Расстройка параметров нарушает эту симметрию, может привести к локализации колебаний, т.е. к локальному увеличению амплитуд и динамических напряжений при вынужденных колебаниях, что неизбежно ведет к снижению долговечности турбомашин.

Исследование расстройки параметров началось достаточно давно. В 1976 г. Whitehead в своей работе [1] представил коэффициент максимального увеличения амплитуды колебаний в зависимости от числа рабочих лопаток N :

$$\gamma = \frac{u_{\text{расс(макс)}}}{u_{\text{настр(макс)}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{N}),$$

где γ – максимальный коэффициент увеличения амплитуды колебаний; $u_{\text{расс(макс)}}$ – максимум значения амплитуды колебаний рабочих колес с расстройкой; $u_{\text{настр(макс)}}$ – максимум значения амплитуды колебаний рабочих колес без расстройки. В 2001 г. J.R. Bladh определил значение расстройки параметров лопаток в виде [2, 3]

$$\Delta f_i = \frac{f_{j,i} - \bar{f}_j}{\bar{f}_j},$$

где $f_{j,i}$ – значение частоты j -й формы колебания лопаток, $i = 1, \dots, N$; $\bar{f}_j$ – среднее арифметическое значение основных частот.

В данной статье представлены математические модели для анализа колебаний и долговечности рабочих колес. Также представлены результаты расчетов собственных, вынужденных колебаний и долговечности рабочего колеса фирмы Rolls-Royce с 29 лопатками, выполненных в пакете ANSYS.

Общий вид и вид одного сектора рабочего колеса показаны на рис. 1.

Рис. 1. Рабочее колесо фирмы Rolls-Royce: *а* – полный диск; *б* – один сектор

Исследование собственных колебаний рабочего колеса

Решение проблемы собственных значений циклически симметричной системы без расстройки параметров может быть получено непосредственно из уравнения свободных колебаний [4–6]

$$M\ddot{\delta} + K\delta = 0,$$

причем

$$\delta = \delta_0 \cos(\omega t - \beta),$$

где M – матрица масс конструкции; K – основная матрица жесткости конструкции; $\ddot{\delta}$ – ускорение в узловых точках; δ – вектор перемещений; δ_0 – амплитуда; ω – круговая частота системы; β – фаза колебаний.

После преобразования получим

$$(K - \omega^2 M) \delta_0 = 0.$$

Для расчета систем с циклической симметрией и эффектом расстройки параметров развит метод исследования конструкций с неидентичными параметрами [7, 8]. В случае свободных колебаний для данного метода имеем [4, 6, 7, 9–13]

$$\ddot{\delta} + \omega_B^2 A \delta = 0,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 + 2R^2 + \Delta f_1 & -R^2 & 0 & \dots & -R^2 \\ -R^2 & 1 + 2R^2 + \Delta f_2 & -R^2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R^2 & 0 & 0 & -R^2 & 1 + 2R^2 + \Delta f_N \end{bmatrix},$$

где ω_B – номинальная частота собственных колебаний лопатки без расстройки; Δf_i – расстройка i -й лопатки ($i = 1, \dots, N$), $\Delta f_i = (\omega_{Bi}^2 - \omega_B^2) / \omega_B^2$; R^2 – безразмерный параметр стыковки, $R^2 = \omega_C^2 / \omega_B^2$; ω_C – частота собственных колебаний связующего элемента между лопатками; ω_{Bi} – реальная частота собственных колебаний i -й лопатки и $\omega_B = \sqrt{k_{bi}/m}$. Здесь k_{bi} – эквивалентная жесткость лопатки, а m – сосредоточенная масса лопатки.

Вектор перемещений (амплитуды) расстроенной системы с учетом первого и второго порядков расстройки выразим в виде

$$\delta_i^* = \delta_i + \Delta \delta_i + \Delta^2 \delta_i,$$

где δ_i – вектор амплитуды лопаток без расстройки; $\Delta \delta_i$ – вектор амплитуды лопаток с расстройкой первого порядка и $\Delta^2 \delta_i$ – вектор амплитуды лопаток с расстройкой второго порядка; $i = 1, \dots, N$.

Собственные значения системы с расстройкой можно определить из выражения вида

$$\omega_i^* = \omega_i + \Delta \omega_i + \Delta^2 \omega_i,$$

где ω_i – вектор собственных частот лопаток без расстройки (идеальных конструкций); $\Delta \omega_i$ – вектор собственных частот лопаток с расстройкой первого порядка и $\Delta^2 \omega_i$ – вектор собственных частот лопаток с расстройкой второго порядка; $i = 1, \dots, N$. Следует отметить, что

$$\omega_i^* = \omega_i / \omega_{bi}^2.$$

Для определения собственных значений и перемещений системы с расстройкой первого и второго порядков используем следующие формулы:

– первый порядок

$$\Delta \omega_i = 2R^2,$$

$$\{\Delta \delta_i\}_{i-1} = -R^2 / (\Delta f_i - \Delta f_{i-1}),$$

$$\{\Delta \delta_i\}_i = 0,$$

$$\{\Delta \delta_i\}_{i+1} = -R^2 / (\Delta f_i - \Delta f_{i+1}),$$

$$\{\Delta \delta_i\}_j = 0 \text{ (для всех других значений);}$$

– второй порядок

$$\Delta^2 \omega_i = R^4 \left(1 / (\Delta f_i \Delta f_{i-1}) + 1 / (\Delta f_i \Delta f_{i+1}) \right),$$

$$\{\Delta^2 \delta_i\}_{i-2} = R^4 / (\Delta f_i - \Delta f_{i-1})(\Delta f_i - \Delta f_{i-2}),$$

$$\{\Delta^2 \delta_i\}_{i-1} = 0,$$

$$\{\Delta^2 \delta_i\}_{i-2} = -R^4 / 2 \left[1 / (\Delta f_i - \Delta f_{i-1}) + 1 / (\Delta f_i - \Delta f_{i+1}) \right],$$

$$\{\Delta^2 \delta_i\}_{i+1} = 0,$$

$$\{\Delta^2 \delta_i\}_{i+2} = R^4 / (\Delta f_i - \Delta f_{i+1})(\Delta f_i - \Delta f_{i+2}),$$

$$\{\Delta \delta_i\}_j = 0 \text{ (для всех других значений).}$$

Результаты расчета собственных частот (Гц) колебаний рабочего колеса методом конечных элементов (МКЭ) (табл. 1) хорошо согласуются с результатами эксперимента (Эксп.). Формы собственных колебаний рабочего колеса показаны на рис. 2.

Таблица 1

Значения собственных частот колебаний рабочего колеса

Номер лопатки	f_Mode 1		f_Mode 2		f_Mode 3		f_Mode 7		f_Mode 10		f_Mode 11	
	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ
1	403,8	416,3	1255,0	1304,5	1766,0	1843,3	4393,2	4511,5	6392,1	6265,3	6837,3	6770,1
2	404,4	416,3	1256,4	1305,5	1767,0	1843,3	4387,0	4511,5	6390,5	6265,3	6839,7	6774,1
3	405,0	416,4	1257,3	1305,5	1768,0	1843,3	4383,3	4511,6	6385,6	6265,8	6837,6	6774,1
4	403,7	416,4	1254,7	1307,3	1766,6	1843,5	4392,2	4511,6	6389,5	6305,2	6836,7	6774,3
5	403,0	416,4	1251,9	1307,3	1765,6	1843,5	4397,5	4511,6	6394,6	6305,2	6824,3	6774,3
6	403,0	416,4	1251,8	1308,6	1764,6	1844,0	4398,1	4512,0	6394,7	6312,4	6831,9	6775,7
7	403,4	416,6	1252,8	1308,6	1763,8	1844,0	4389,1	4512,0	6390,3	6312,4	6834,2	6775,7
8	404,5	416,6	1255,8	1309,4	1766,6	1844,5	4392,5	4512,8	6387,4	6316,2	6836,3	6776,5
9	405,0	416,7	1256,1	1309,4	1766,3	1844,5	4382,6	4512,8	6390,1	6316,2	6862,8	6776,5
10	404,5	416,8	1256,8	1310,2	1766,7	1844,8	4391,6	4513,4	6389,3	6319,2	6837,0	6777,4
11	404,0	416,8	1254,6	1310,2	1764,5	1844,8	4384,4	4513,4	6389,5	6319,2	6840,4	6777,4
12	404,8	417,3	1256,7	1311,1	1769,2	1845,0	4391,0	4514,0	6401,1	6322,2	6860,1	6778,9
13	403,1	417,4	1252,0	1311,1	1764,9	1845,0	4395,7	4514,0	6397,1	6322,2	6829,8	6778,9
14	402,6	417,9	1250,3	1312,1	1764,6	1845,1	4385,2	4514,5	6396,7	6325,0	6832,6	6780,2
15	403,5	417,9	1252,9	1312,2	1765,5	1845,1	4393,2	4514,5	6393,0	6325,0	6833,8	6780,2
16	404,4	418,5	1254,8	1313,2	1765,4	1845,2	4392,2	4515,1	6389,0	6328,1	6836,5	6781,3
17	405,0	418,5	1256,6	1313,2	1766,7	1845,2	4392,2	4515,1	6390,0	6328,2	6840,4	6781,3
18	404,5	419,1	1256,0	1314,2	1766,6	1845,3	4388,8	4515,7	6390,2	6331,3	6833,0	6782,3
19	403,7	419,1	1254,0	1314,2	1767,5	1845,3	4393,1	4515,7	6391,0	6331,3	6829,2	6782,3
20	403,0	419,5	1251,0	1315,2	1766,6	1845,4	4378,2	4516,2	6394,0	6334,4	6834,0	6783,1
21	403,7	419,5	1253,4	1315,2	1766,9	1845,4	4383,0	4516,2	6390,6	6334,4	6831,2	6783,1
22	405,3	419,9	1256,8	1315,9	1768,5	1845,5	4387,2	4516,8	6387,9	6337,2	6837,9	6783,8
23	404,8	419,9	1256,4	1315,9	1768,3	1845,5	4381,2	4516,8	6389,4	6337,3	6835,6	6783,8
24	404,2	420,2	1255,0	1316,5	1767,2	1845,6	4385,8	4517,2	6391,4	6339,6	6838,3	6784,4
25	404,0	420,2	1254,0	1316,5	1765,9	1845,6	4383,4	4517,2	6390,1	6339,6	6841,2	6784,4
26	402,4	420,3	1250,6	1316,9	1761,4	1845,6	4401,8	4517,5	6393,9	6341,2	6838,4	6784,8
27	402,6	420,3	1250,4	1316,9	1760,4	1845,6	4405,1	4517,5	6390,2	6341,2	6841,3	6784,8
28	402,3	420,4	1250,2	1317,1	1760,1	1845,7	4402,9	4517,7	6395,4	6342,1	6839,9	6785,0
29	402,8	420,4	1252,4	1317,1	1761,3	1845,7	4399,7	4517,7	6389,4	6342,1	6834,0	6785,0

Рис. 2. Формы колебаний рабочего колеса фирмы Rolls-Royce

Расстройка параметров вводилась путем присоединения к периферии лопаток дополнительных масс (Δm , кг) [14], значения дополнительных масс приведены ниже, законы расположения дополнительных масс показаны на рис. 3. Величина расстройки, вычисленная по формуле Whitehead [1], представлена на рис. 4.

Значения дополнительных масс [13]

Номер лопатки	Δm , кг	Номер лопатки	Δm , кг	Номер лопатки	Δm , кг
1	0,001251440	11	0,001451640	21	0,001356856
2	0,001302147	12	0,001302100	22	0,001125158
3	0,000025486	13	0,000065488	23	0,000085489
4	0,001102156	14	0,001502634	24	0,001402132
5	0,001305234	15	0,001600680	25	0,001202183
6	0,001205214	16	0,001166480	26	0,001102121
7	0,000802923	17	0,000735542	27	0,001302524
8	0,001100598	18	0,001553548	28	0,000356542
9	0,001302003	19	0,001135789	29	0,001205558
10	0,001202100	20	0,001257365

Рис. 3. Рабочее колесо с дополнительными массами

Рис. 4. Нормированные значения расстройки лопаток основных форм колебаний

Исследование вынужденных колебаний рабочего колеса

На практике лопатка возбуждалась через 20 сопловых лопаток (по всей длине пера лопаток). В качестве переменной нагрузки рассматривалась сила, определяемая с помощью ряда Фурье [7, 15–17]:

$$P(t) = L_0 (1 + 0,5 \cos \varphi + 0,025 \cos 2\varphi),$$

где первый член в уравнении представляет собой статическую часть.

Результаты характеристик вынужденных колебаний рабочего колеса с расстройкой параметров под действием возбуждающей нагрузки $P(t)$, при которых возникают максимальные значения амплитуд перемещений и напряжений колебаний, представлены на рис. 5 и 6.

Рис. 5. Значения амплитуд перемещений при вынужденных колебаниях колеса в зависимости от частот колебания

Рис. 6. Значения напряжений при вынужденных колебаниях колеса в зависимости от частот колебания

Значения коэффициентов увеличения амплитуды колебаний в зависимости от числа лопаток рабочего колеса, полученные при вынужденных колебаниях, оказались меньше, чем максимальный коэффициент увеличения амплитуды колебаний (Whitehead [1], Petrov [18], Klauke [19], Panning [20]) (рис. 7).

Рис. 7. Значения коэффициентов увеличения амплитуды колебаний в зависимости от числа лопаток

Расчет долговечности

Следующим шагом исследований были расчеты в программном комплексе ANSYS (модуль расчета долговечности nCode DesignLife) долговечности рабочего колеса (в часах работы) с разной степенью расстройки.

Расстройка моделировалась путем присоединения дополнительных масс разной величины к периферии лопаток. Были подготовлены и проанализированы три варианта распределения дополнительных масс, присоединяемых к лопаткам колеса:

Вариант 1. Значения дополнительных масс разные, массы присоединены к периферии всех лопаток.

Вариант 2. Значения дополнительных масс одинаковые (0,00211 кг), массы присоединены к периферии 28 лопаток, последняя лопатка без дополнительной массы.

Вариант 3. Значения дополнительных масс одинаковые (0,005 кг), массы присоединены к периферии 28 лопаток, последняя лопатка без дополнительной массы.

Схема определения долговечности с применением модуля расчета долговечности nCode DesignLife показана на рис. 8, основные результаты расчета долговечности рабочего колеса с расстройкой при его вынужденных колебаниях представлены на рис. 9 и в табл. 2.

Рис. 8. Схема определения долговечности рабочего колеса в пакете ANSYS nCode DesignLife

Рис. 9. Основные результаты расчета долговечности рабочего колеса

Таблица 2

Результаты расчета долговечности

f_mode	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	Собственные частоты, Гц					
	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.	МКЭ	Эксп.
1	416.3864	403.8574	403.3854	397.8125	410.3864	402.9375
2	1304.5584	1255.0780	1296.5417	1261.0000	1300.2214	1252.6875
3	1843.3258	1766.0640	1803.3784	1766.3125	1826.6854	1765.6750
Долговечность	1,7525E+5 ч		1,6503E+5 ч		1,2402E+5 ч	

Из результатов видно, что наибольшей долговечностью обладает колесо, у которого дополнительные массы присоединены ко всем лопаткам (вариант 1). Увеличение дополнительной массы, а также наличие у соседних лопаток относительно большой расстройки ведет к снижению долговечности (варианты 2 и 3). Данное обстоятельство должно учитываться при проектировании, производстве и эксплуатации турбомашин.

Заключение

В данной работе представлены математические модели для решения задач динамики рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров. Рассчитаны характеристики собственных колебаний (частоты и формы) и вынужденных колебаний (динамические напряжения и амплитуды), а также проведена оценка долговечности рабочего колеса фирмы Rolls-Royce, расстройка которого смоделирована путем присоединения дополнительных масс к периферии лопаток. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Расчеты долговечности проведены для разных вариантов распределения дополнительных масс по лопаткам рабочего колеса. По результатам исследований разработаны рекомендации для повышения долговечности рабочих колес при их изготовлении и эксплуатации.

Библиографический список

1. Whitehead D.S. Effect of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes, *Journal of mechanical engineering science*. – 1966. – Vol. 8, № 1. – P. 15–21.
2. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced order modeling / R. Bladh, M.P. Castanier, C. Pierre, M.J. Kruse // *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*. – 2002. – P. 311–324.
3. A compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration / S. Lim, R. Bladh, M.P. Castanier, C. Pierre // *AIAA Paper*. – 2003. – № 2003-1545.
4. Рыжиков И.Н., Репецкий О.В., Нгуен Тьен Куэт. Один из подходов к оценке долговечности рабочих колес турбомашин // *Вестник ИрГТУ*. – 2015. – № 5(100). – С. 22–27.
5. Рыжиков И.Н., Репецкий О.В., Нгуен Тьен Куэт. Динамика элементов роторов турбомашин на переходных режимах работы с учетом нелинейных эффектов // *Вестник ИрГТУ*. – 2016. – № 11. – С. 61–68.
6. Репецкий О.В., Рыжиков И.Н., Нгуен Тьен Куэт. Прогнозирование уровней напряжений в лопатках рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров // *Вестник ИРСХА*. – 2017. – № 78. – С. 142–151.
7. Мехатроника / Б. Хайманн, В. Герт, К. Попп, О.В. Репецкий. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-я РАН, 2010. – 601 с.
8. Repetckii O., Ryzhikov I., Nguyen Tien Quyet. Dynamics of gas turbine engines rotors taking into account non linear effects // *Vibroengineering Procedia*. – 2016. – Vol. 8. – P. 361–365.
9. Wei S.T., Pierre C. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry. Part I. Free vibration // *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. – 1988. – Vol. 110, № 4. – P. 429–438.
10. Wei S.T., Pierre C. Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry. Part II. Forced Vibration // *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. – 1988. – Vol. 110, № 4. – P. 439–449.
11. Temis Yu.M., Yakushev D.A. Optimal design of the compressor blade form. Problems of strength and plasticity. – 2011. – Vol. 73. – P. 141–149.
12. Irretier H. Transient vibrations of turbine blades due to passage through partial admission and nozzle excitation resonance // *Proc. IFToMM Intl. Conf. Rotor Dynamics*. – Tokyo, 1986. – Vol. 1. – P. 30.
13. Kayser A. Entwicklung eines Programmes zur Lebensdauer berechnung von Turbinenschaufeln. B.Sc. Thesis / Institute of Mechanics, University of Kassel. – Kassel, 1990. – 110 p.
14. Beirow B. Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise. – Cottbus, 2009.
15. Zienkiewicz O.C. The finite element method: its basis and fundamentals. – Butterworth: Heinemann, 2005. – 752 p.
16. Ewins D.J. Bladed disc vibration – a review of techniques and characteristics // *Proc. Inst. Mech. Engineers., International Conference of Recent Advances in Structural Dynamics*. – Southampton, 1980. – P. 187–210.
17. Lim S., Pierre C., Castanier M.P. Predicting blade stress levels directly from reduced-order vibration models of mistuned bladed disks // *Journal Turbomachinery*. – 2006. – Vol. 128. – P. 206–210.
18. Petrov E.P., Iglın S.P. Search of the worst and best mistuning patterns for vibration amplitudes of bladed disks by the optimization methods using sensitivity coefficients // *Proceedings of the 1st ASSMO UK Conference. Engineering Design Optimization*. – Ilkley, 1999. – P. 303–310.
19. Klauke T. Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterräder im Hinblick auf Verstimmung und Lokalisierung. – Cottbus: Der Andere Verlag, 2008. – 169 p.
20. Panning L., Sextro W., Popp K. Design of friction dampers for mistuned bladed disks // *PAMM Proa APPL. Math. Mech*. – 2003. – № 3. – P. 118–119.

References

1. Whitehead D.S. Effect of Mistuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1966, Vol. 8, No. 1, pp. 15-21.
2. Bladh R., Castanier M.P., Pierre C., and Kruse M.J. Dynamic Response Predictions for a Mistuned Industrial Turbomachinery Rotor Using Reduced Order Modeling, *ASME J. Eng. Gas Turbines Power*, 2002, pp. 311-324.

3. Lim S., Bladh R., Castanier M. P., and Pierre C. A Compact, Generalized Component Mode Mistuning Representation for Modeling Bladed Disk Vibration," AIAA Paper No. 2003-1545.
4. Ryzhikov I.N., Repetskiy O.V., Nguen T'en Kuet. Odin iz podkhodov k otsenke dolgovechnosti rabochikh koles turbomashin [An approach to turbomachinery bladed disc durability estimation]. *Vestnik IrGTU*. 2015, no. 5 (100), pp. 22-27.
5. Ryzhikov I.N., Repetskiy O.V., Nguyen Tien Quyet. Dinamika elementov rotorov turbomashin na perekhodnykh rezhimakh raboty s uchetom nelineynykh effektiv [Turbomachinery rotor element dynamics in transient modes considering non-linear effects]. *Vestnik IrGTU*, 2016, no. 11, pp. 61-68.
6. Repetskiy O.V., Ryzhikov I.N., Nguyen Tien Quyet. Prognozirovaniye urovney napryazheniy v lopatkakh rabochikh koles turbomashin s rasstroikoy parametrov [Prediction of stress levels in the impeller blades of turbomachines with disturbed parameters]. *Vestnik IrSKhA*, 2017, no. 78, pp. 142-151.
7. Khaymann B., Gert V., Popp K., Repetskiy O.V. Mekhatronika [Mechatronics]. Novosibirsk: *Izd-vo Sibirskogo Otdeleniya RAN*, 2010, 601 p.
8. Repetskii O., Ryzhikov I., Nguyen Tien Quyet. Dynamics of gas turbine engines rotors taking into account non linear effects. *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, Vol. 8, pp. 361-365.
9. Wei S.T., Pierre C. Localization phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part I: Free Vibration. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1988, Vol. 110, no.4, pp. 429-438.
10. Wei S.T., Pierre C. Localization phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part II: Forced Vibration. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1988, Vol. 110, no. 4, pp. 439-449.
11. Temis Yu.M., Yakushev D.A. Optimal design of the compressor blade form. *Problems of strength and plasticity Problems of strength and plasticity*, 2011, Vol. 73, pp. 141-149.
12. Irrerier H. Transient Vibrations of Turbine Blades Due to Passage Through Partial Admission and Nozzle Excitation Resonance. *Proc. IFTOMM Intl. Conf. Rotor Dynamics*. Tokyo, 1986, Vol. 1, 30 p.
13. Kayser A. Entwicklung eines Programmes zur Lebensdauer berechnung von Turbinenschaufeln. BSc Thesis. Kassel: Institute of Mechanics, University of Kassel, 1990, 110 p.
14. Beirow B. Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise. Cottbus, 2009.
15. Zienkiewicz O.C. The finite element method: Its basis and fundamentals. Butterworth: Heinemann, 2005, 752 p.
16. Ewins D.J. Bladed Disc Vibration - A Review of Techniques and Characteristics. *Proc. Inst. Mech. Engineers., International Conference of Recent Advances in Structural Dynamics*. Southampton, 1980, pp. 187-210.
17. Sang-Ho Lim. Pierre C., Castanier M.P. Predicting blade stress levels directly from reduced-order vibration models of mistuned bladed disks. *Journal Turbomachinery*, 2006, Vol. 128, pp. 206-210.
18. Petrov E.P., and Igin S.P. Search of the worst and best mistuning patterns for vibration amplitudes of bladed disks by the optimization methods using sensitivity coefficients. *Proceedings of the 1st ASSMO UK Conference. Engineering Design Optimization* (Ilkley, UK, 1999), pp. 303-310.
19. Klauke T. Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterräder im Hinblick auf Verstimmung und Loaklisierung. Cottbus: Der Andere Verlag, 2008, 169 p.
20. Panning L., Sextro W., Popp K. Design of Friction Dampers for Mistuned Bladed Disks. *PAMM Proa APPL. Math. Mech.*, 2003, no. 3, pp. 118-119.

Об авторах

Репецкий Олег Владимирович (Иркутск, Россия) – доктор технических наук, профессор, проректор по международным связям Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (664003, г. Иркутск, пос. Молодежный, e-mail: repetskii@igsha.ru).

Рыжиков Игорь Николаевич (Иркутск, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроительные технологии и материалы» Иркутского национального исследовательского технического университета (664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 83, e-mail: rin111@list.ru).

Нгуен Тьен Куэт (Иркутск, Россия) – аспирант кафедры «Машиностроительные технологии и материалы» Иркутского национального исследовательского технического университета (664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 83, e-mail: savoixanh@mail.ru).

About the authors

Oleg V. Repetckii (Irkutsk, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Vice-Rector for International Relations, Irkutsk State Agrarian University named after A.A. Ezhevsky, (Molodezhny settlement, Irkutsk, 664007, Russian Federation, e-mail: repetckii@igsha.ru).

Igor N. Ryzhikov (Irkutsk, Russian Federation) – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, Engineering Technologies and Materials Department, Irkutsk National Research Technical University (83, Lermontov st., Irkutsk, 664064, Russian Federation, e-mail: rin111@list.ru).

Nguyen Tien Quyet (Irkutsk, Russian Federation) – Postgraduate Student, Engineering Technologies and Materials Department, Irkutsk National Research Technical University (83, Lermontov st., Irkutsk, 664064, Russian Federation, e-mail: cavoixanh@mail.ru).

Получено 20.10.2017