DOI: 10.15593/2224-9982/2017.48.05

УДК 621.755

Н.Н. Зайцев, Д.Н. Зайцев, А.А. Макаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА С МНОГОРЯДНЫМ ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРУЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

Применение шаровых автобалансирующих устройств для компенсации эксплуатационных изменений дисбаланса роторных систем без их остановки представляет интерес из-за относительной конструктивной простоты этих устройств. Однако практическое использование таких автобалансирующих устройств требует инженерного понимания особенностей механизма динамического взаимодействия неуравновешенного ротора и шаров в обойме автобалансирующего устройства в широком диапазоне частот вращения роторной системы. С этой целью в статье рассматриваются установившиеся режимы однодискового ротора с многорядным шаровым автобалансирующим устройством, для чего используются уравнения динамики, полученные на основе модели ротора Джеффкотта. С применением известных зависимостей круговой прямой синхронной прецессии, свойственной этой модели ротора, получены выражения для координат центра масс роторной системы с неподвижными относительно вращающейся обоймы шарами. Установлено, что в этом случае вектор дисбаланса такой системы будет располагаться вдоль линии действия вектора дисбаланса системы без шаров. Показано, что силой,двигающей шары по обойме, является сила инерции, действующая на шар в прецессионном движении и стремящаяся расположить шар вдоль линии вектора смещения вала ротора на дальней от оси опор стороне обоймы. Наглядно продемонстрировано, что возможность режима автобалансировки только на сверхкритической частоте вращения обусловлена механизмом самоцентрирования гибких роторов. Отмечается, что поведение шаров во вращающейся обойме будет определяться внешним демпфированием ротора и силами, действующими на шары в обойме: силами инерции, вязкого сопротивления, трения и тяжести, а также возможным эксцентриситетом беговых дорожек.

Ключевые слова: шаровое автобалансирующее устройство, однодисковый ротор, многорядный автобалансирующий, уравнения динамики, дисбаланс, инерционная сила, эксперимент, стробоскопическая подсветка.

N.N. Zaytsev, D.N. Zaytsev, A.A. Makarov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ENGINEERING ANALYSIS OF STEADY-STATE REGIMES OF THE SINGLE-DISK ROTOR WITH MULTI-ROW BALL SELF-BALANCING DEVICE

Application of ball self-balancing device to compensate operational imbalance changes of the rotor systems without stopping is of interest due to the relative constructive simplicity of these devices. However, the practical use of such self-balancing devices requires engineering comprehension of the mechanism of dynamic interaction between the unbalanced rotor and the balls in the cage of self-balancing device in a wide range of rotation frequencies of the rotor system. With this aim in view, the article considers a steady-state regimes of the single-disk rotor with multi-row ball self-balancing device. It is used the dynamic equations obtained based on the Jeffcott rotor model. Expressions for the coordinates of mass center of the rotor system with motionless balls in rotating cage are obtained using well-known dependences of circular direct synchronous precession, which is typical for this rotor model. It is established that in this case, the imbalance vector of this system will be located on action line of imbalance vector of the system without the balls. It is shown that the force that moves the balls in cage is the inertial force acting on a ball in a precession movement. The inertial force seeks to position the ball along the line of displacement vector of the rotor shaft on the cage side which is far from the axis of supports. It is demonstrated that the ability to self-balancing mode only at supercritical rotational speed is due to the self-centering mechanism of flexible rotors. It is noted that the behavior of the balls in the rotating cage will be determined by the external damping of rotor and the forces acting on the balls in a cage: the inertia forces, viscous resistance, friction and gravity, as well as the possible eccentricity of the races.

Keywords: ball self-balancing device, single-disk rotor, multi-row self-balancing device, dynamic equations, imbalance, inertia force, experiment, stroboscopic illumination.

Введение

Для устранения «на ходу» эксплуатационных изменений дисбаланса роторов возможно использование пассивных (прямого действия [1]) автобалансирующих устройств (АБУ). Одним

из таких устройств является шаровое АБУ, представляющее собой дисковую обойму с периферийным кольцевым каналом, в котором находятся свободно перемещающиеся шары. В установившихся режимах сверхкритических частот вращения ротора шары устанавливаются в таком неподвижном относительно вращающейся обоймы расположении, при котором компенсируются возникшие изменения дисбаланса. Такое свойство шарового АБУ подтверждено теоретическими и экспериментальными исследованиями [1–10]. В то же время исследователями отмечается, что на докритических частотах вращения такая автобалансировка не происходит. При этом считается, что на докритических и критических частотах такое АБУ увеличивает дисбаланс, что осложняет его использование в высокоскоростных роторных системах большой мощности.

Большинство теоретических исследований шарового АБУ основано на использовании математической модели Джеффкотта [11] для статически неуравновешенного однодискового ротора, установившимся режимом вращения которого с постоянной частотой является круговая прямая синхронная прецессия [12, 13]. Соответственно, полагается, что плоскость обоймы АБУ совмещена с плоскостью дисбаланса, а на перемещающиеся по обойме шары воздействуют силы вязкого трения. При этом в большинстве случаев пренебрегается влиянием силы тяжести. Одним из основных направлений этих исследований является математический анализ устойчивости теоретически возможных расположений шаров в однорядной (с одним кольцевым каналом) обойме АБУ в установившихся режимах вращения ротора с постоянной частотой.

Другими направлениями исследований являются: построение обобщенной математической модели роторов с расположением обоймы АБУ вне плоскости дисбаланса ротора [14, 15], математическое моделирование возможности автобалансировки динамической неуравновешенности ротора с помощью нескольких АБУ, расположенных в различных сечениях ротора [7, 16, 17], моделирование переходных режимов АБУ [18, 19], параметрический анализ границ устойчивости автобалансировки [4, 10, 16, 20] и влияние на работу АБУ неидеальности его обоймы [21–23].

Способность к автобалансировке зависит от емкости шарового АБУ, определяемой суммарным дисбалансом шаров, который рассчитывается как сумма произведений массы каждого шара на радиус его беговой дорожки [1]. Для обеспечения необходимой емкости возможно использование многорядных АБУ, обойма которых имеет несколько концентрических кольцевых каналов [1, 24, 25]. В работах [24, 25] приводится математическое исследование условий автобалансировки оптических дисков с помощью шарового АБУ с двумя и тремя беговыми дорожками, в которых перемещаются одинаковые по массе шары. Однако использование в математических моделях этих исследований полярных координат и векторно-матричных уравнений затрудняет наглядный инженерный анализ закономерностей поведения шаров в различных установившихся режимах вращения ротора с постоянной частотой в диапазоне ее докритических и закритических значений.

Построение математической модели

Для проведения инженерного анализа получим уравнения динамики однодискового ротора с многорядным шаровым АБУ, воспользовавшись моделью ротора Джеффкотта [11]. Соответственно, рассматривается ротор с диском, включающим обойму с шарами и расположенным посередине пролета невесомого вала между двумя одинаковыми изотропными упруго-демпферными опорами (рис. 1). Диск вращается с постоянной частотой ω относительно своего геометрического центра, расположенного на оси вала. При прогибе и/или смещении вала в опорах центр диска обращается вокруг геометрической оси опор (прецессионное движение [12]). При этом вращающийся диск совершает плоскопараллельное движение прецессии.

Рис. 1. Однодисковый ротор с многорядным АБУ

Относительно движения шаров в обойме принимаются следующие допущения: масса отдельного шара мала по отношению к массе диска с обоймой АБУ; шары рассматриваются как точечные массы, испытывающие при перемещении вязкое сопротивление; шары при движении не сталкиваются; не учитывается воздействие сил тяжести и контактного трения

Расчетная схема в плоскости прецессии диска с АБУ представлена на рис. 2.

Рис. 2. Расчетная схема динамики системы ротор – шаровое АБУ: O – центр прецессии на оси расточки подшипников; O_1 – центр диска и обоймы АБУ (точка крепления к валу); C – центр масс диска с обоймой без шаров; C_S – центр масс системы диск – шары; C_i – центр масс шара; R_i – радиус орбиты центра масс C_i ; $O_1C_S = a_S$ – эксцентриситет центра масс системы диск – шары; $O_1C = a$ – эксцентриситет центра масс диска с обоймой; $OO_1 = r$ – смещение вала; ω – частота собственного вращения ротора; ψ_S – сдвиг фаз вращения векторов смещения вала $\vec{r}$ и дисбаланса $M_S \vec{a}_S$ системы диск – шары; α_i и ϕ_i – угловые координаты положения шара в соответствующих СК; θ – угловая координата вектора смещения $\vec{r}$ в неподвижной СК Oxy ; x_1, y_1 – координаты центра O_1 диска в СК Oxy ; $F_{ц}$ – инерционная сила, действующая на шар в прецессионном движении; $\vec{F}_\tau, \vec{F}_n$ – тангенциальная и нормальная проекции силы $F_{ц}$

Вводятся следующие системы координат (СК):

1. Неподвижная СК Oxy с началом O на оси расточки опорных подшипников. Оси Ox и Oy в плоскости, перпендикулярной оси подшипников. Ось Oz направлена по оси подшипников, образуя правую систему координат, и является осью прецессионного движения.

2. Подвижная СК $O_1x'_0y'_0$ с началом O_1 в центре диска обоймы, расположенном на геометрической оси вала и смещенном относительно оси подшипников на величину r в результате прогиба вала и/или смещения вала в опорах. Плоскость $O_1x'_0y'_0$ совпадает с плоскостью неподвижной СК Oxy . В плоскости прецессионного движения оси $O_1x'_0$ и $O_1y'_0$ всегда параллельны осям Ox и Oy соответственно.

3. Вращающаяся СК $O_1x'y'$ с началом O_1 в центре диска. Ось O_1x' направлена по вектору дисбаланса (эксцентриситета центра масс) диска с обоймой без шаров. Оси O_1x' и O_1y' вращаются вокруг начала координат с направлением и частотой вращения ω диска. Таким образом, диск в СК $O_1x'y'$ неподвижен (не вращается).

Координаты используемых СК связаны следующими соотношениями:

– для $O_1x'y'$ и $O_1x'_0y'_0$

$$\begin{aligned}x'_0 &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, & y'_0 &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \\x' &= x'_0 \cos \omega t + y'_0 \sin \omega t, & y' &= -x'_0 \sin \omega t + y'_0 \cos \omega t;\end{aligned}\tag{1}$$

– для $O_1x'_0y'_0$ и Oxy

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x'_0, & y &= y_1 + y'_0, \\x'_0 &= x - x_1, & y'_0 &= y - y_1.\end{aligned}$$

Уравнения динамики рассматриваемого однодискового ротора с многоядным АБУ получим из уравнений Лагранжа в предположении, что в обойме АБУ имеется n разных по массе шаров, движущихся по своим кольцевым дорожкам, выполненным концентрично с центром диска.

Уравнения Лагранжа в общем виде для рассматриваемого случая

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i},$$

где q_i и $\dot{q}_i$ – соответственно обобщенная координата и ее производная по времени; T и Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергия; R – диссипативная функция Рэлея, учитывающая влияние сил вязкого сопротивления.

Обобщенными координатами выберем координаты x_1 и y_1 точки O_1 в неподвижной СК Oxy и угловые координаты φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) шаров, отсчитываемые от оси $O_1x'_0$. При этом (см. рис. 2)

$$\varphi_i = \omega t + \alpha_i,\tag{2}$$

где α_i – угловая координата шара во вращающейся СК $O_1x'y'$, а в установившихся режимах ротора $\omega = \text{const}$.

Координаты в неподвижной СК Oxy :

– центра масс C диска с обоймой АБУ без шаров

$$x_c = x_1 + a \cos \omega t, \quad y_c = y_1 + a \sin \omega t;$$

– центров масс шаров, C_i

$$x_{ci} = x_1 + R_i \cos \varphi_i, \quad y_{ci} = y_1 + R_i \sin \varphi_i.$$

Кинетическая энергия вращающегося диска с АБУ

$$T = 0,5M (\dot{x}_1 - a\omega \sin \omega t)^2 + 0,5M (\dot{y}_1 + a\omega \cos \omega t)^2 + 0,5J_C \omega^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n 0,5m_i \left(\dot{x}_1 - R_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n 0,5m_i \left(\dot{y}_1 + R_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i \right)^2,$$

где J_C , M , a – соответственно полярный момент инерции, масса и эксцентриситет центра масс диска с обоймой; m_i , R_i – соответственно масса и радиус орбиты движения i -го шара.

Потенциальная энергия

$$\Pi = 0,5c(x_1^2 + y_1^2),$$

где c – коэффициент упругости ротора. В рассматриваемом случае определяется через коэффициенты жесткости вала c_B и одинаковых опор $c_{оп}$ по формуле [13]

$$c = 1/[(c_B)^{-1} + (2c_{оп})^{-1}].$$

Диссипативная функция, учитывающая влияние на динамику ротора внешнего вязкого сопротивления, зависящего от скорости абсолютных перемещений центра диска (O_1) в пространстве,

$$R_p = 0,5b(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2),$$

где b – коэффициент внешнего демпфирования ротора.

Диссипативная функция, учитывающая влияние на движение шаров вязкого сопротивления, зависящего от тангенциальной скорости $v_i^T = R_i(\dot{\varphi}_i - \omega)$ центра масс C_i шара в обойме,

$$R_{ш i} = 0,5b_{0i}R_i^2(\dot{\varphi}_i - \omega)^2,$$

где b_{0i} – коэффициент вязкого сопротивления для i -го шара.

В результате искомая математическая модель динамики однодискового ротора с АБУ, содержащим n шаров, представляет собой систему дифференциальных уравнений $(2n + 4)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \bar{b}\dot{x}_1 + \omega_{0s}^2 x_1 &= \bar{M}a\omega^2 \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i), \\ \ddot{y}_1 + \bar{b}\dot{y}_1 + \omega_{0s}^2 y_1 &= \bar{M}a\omega^2 \sin \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i (-\ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i + \dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i), \\ R_i \ddot{\varphi}_i + \bar{b}_{0i} R_i (\dot{\varphi}_i - \omega) &= \ddot{x}_1 \sin \varphi_i - \ddot{y}_1 \cos \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\bar{b} = \frac{b}{M_s}, \quad \bar{M} = \frac{M}{M_s}, \quad \bar{m}_i = \frac{m_i}{M_s}, \quad \omega_{0s}^2 = \frac{c}{M_s}, \quad \bar{b}_{0i} = \frac{b_{0i}}{m_i}, \quad M_s = M + \sum_{i=1}^n m_i.$$

Полученная система уравнений содержит два уравнения прецессионного движения геометрического центра диска с АБУ и n уравнений движения шаров.

Распределением в этих уравнениях шаров по нескольким концентрическим беговым дорожкам соответственно получается математическая модель однодискового ротора с многорядным шаровым АБУ.

При движущихся относительно обоймы шарах координаты мгновенного центра масс C_s системы диск – шары в СК $O_1 x' y'$ определяются формулами

$$x'_s = \bar{M}a + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i, \quad y'_s = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i.$$

Инерционные силы, действующие на шары

Для определения сил, перемещающих шары по обойме, рассмотрим уравнение движения i -го шара. Окончательный вид третьего уравнения в системе (3) получен в процессе вывода из уравнения

$$m_i R_i \ddot{\phi}_i + b_{0i} R_i (\dot{\phi}_i - \omega) = m_i (\ddot{x}_1 \sin \phi_i - \ddot{y}_1 \cos \phi_i), \quad (4)$$

где правая часть представляет собой двигающую шары по обойме тангенциальную к окружности беговой дорожки проекцию в СК $O_1 x' y'$ инерционной центробежной силы $F_{ц}$, действующей на шар в прецессионном движении. Схематично сила $F_{ц}$ изображена на рис. 2, в том числе в виде своих составляющих: тангенциальной F_{τ} и нормальной F_n к окружности беговой дорожки.

Тангенциальная T и нормальная N составляющие результирующей всех инерционных сил, действующих на шар во вращающейся СК $O_1 x' y'$, определяются через выражения соответственно тангенциальной и нормальной проекций абсолютного ускорения центра масс шара C_i и с учетом выражения (2) при $\omega = \text{const}$ имеют вид

$$\bar{T}_i = m_i (R_i \ddot{\alpha}_i - \ddot{x}_1 \cos(\alpha_i + \omega t) + \ddot{y}_1 \sin(\alpha_i + \omega t)), \quad (5)$$

$$\bar{N}_i = m_i (R_i \omega^2 + R_i \dot{\alpha}_i^2 - \ddot{x}_1 \cos(\alpha_i + \omega t) - \ddot{y}_1 \sin(\alpha_i + \omega t)). \quad (6)$$

Векторы сил $\bar{T}_i$ и $\bar{N}_i$ коллинеарны соответственно векторам $\bar{F}_{\tau i}$ и $\bar{F}_{ni}$, показанным на рис. 2.

Из уравнений (4)–(6) и рис. 2 следует:

1) под действием тангенциальной силы $\bar{F}_{\tau}$ шар будет стремиться к расположению на дальней от оси опор (центра O) стороне вращающейся обоймы вдоль линии смещения (OO_1) центра диска, при котором достигается $\bar{F}_{\tau} = 0$;

2) шар может занять некоторое неподвижное относительно вращающейся обоймы положение, когда тангенциальная сила T будет уравновешена силой вязкого сопротивления, а также силой трения, неучитываемой в рассматриваемой задаче, но возможной из-за наличия нормальной силы N .

Математическая модель установившихся режимов

Если предположить, что при установившемся режиме вращения ротора с некоторой постоянной частотой ($\omega = \text{const}$) шары будут стремиться занять неподвижное во вращающемся диске положение, определяемое неизменными угловыми координатами α_i^0 в СК $O_1 x' y'$, то система диск – неподвижные шары будет представлять собой традиционный однодисковый ротор Джеффкотта с эксцентриситетом a_s центра масс C_s (см. рис. 2), координаты которого в СК $O_1 x' y'$

$$x'_s = \bar{M}a + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i^0, \quad y'_s = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i^0. \quad (7)$$

Статическая неуравновешенность такого ротора при одинаковых изотропных опорах порождает круговую прямую синхронную прецессию [12], при которой вектор-радиус $\vec{r}$ центра O_1 диска вращается относительно оси расточки подшипников (центра O) с запаздыванием по фазе ψ_s по отношению к вращению вектора дисбаланса ротора $M_s \vec{a}_s$ относительно центра O_1 . При этом угол θ на рис. 2 будет определяться как

$$\theta = \omega t + \psi_s. \quad (8)$$

Радиус A_S прецессионного вращения роторной системы диск – неподвижные шары определяется известным выражением [13] для модуля вектора-радиуса $\vec{r}$

$$A_S = \text{mod } \vec{r} = \frac{\omega^2 a_S}{\sqrt{(\omega_{0S}^2 - \omega^2)^2 + (\bar{b}\omega)^2}}, \quad (9)$$

где a_S – эксцентриситет центра масс C_S роторной системы в СК $O_1x'y'$;

$$\omega_{0S} = \sqrt{c/M_S} \quad (10)$$

– собственная частота роторной системы (ее критическая частота вращения).

Сдвиг ψ_S прецессионного вращения по фазе определяется из выражения [13]

$$\text{tg}\psi_S = \frac{-\bar{b}\omega}{\omega_{0S}^2 - \omega^2} \quad (11)$$

по формулам [26]

$$\psi_S = \begin{cases} -\text{arctg} \frac{\bar{b}\omega}{\omega_{0S}^2 - \omega^2} & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{0S}, \\ -\pi - \text{arctg} \frac{\bar{b}\omega}{\omega_{0S}^2 - \omega^2} & \text{при } \omega_{0S} \leq \omega \leq \infty. \end{cases}$$

Выражение (9) с использованием уравнения (11) может быть представлено в виде

$$A_S = \frac{\omega^2 a_S}{(\omega_{0S}^2 - \omega^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{b}\omega}{\omega_{0S}^2 - \omega^2} \right)^2}} = \frac{\omega^2 a_S}{(\omega_{0S}^2 - \omega^2) \sqrt{1 + \text{tg}^2 \psi_S}} = \frac{\omega^2 a_S \cos \psi_S}{(\omega_{0S}^2 - \omega^2)}. \quad (12)$$

При неподвижных шарах в равномерно вращающемся диске имеет место

$$\varphi_i = \alpha_i^0 + \omega t, \quad \alpha_i^0 = \text{const} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_i = \frac{d(\alpha_i^0 + \omega t)}{dt} = \omega = \text{const}, \quad \ddot{\varphi}_i = 0.$$

Соответственно, уравнения (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \bar{b}\dot{x}_1 + \omega_{0S}^2 x_1 &= \bar{M}a\omega^2 \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i^0), \\ \ddot{y}_1 + \bar{b}\dot{y}_1 + \omega_{0S}^2 y_1 &= \bar{M}a\omega^2 \sin \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_i^0), \\ \ddot{x}_1 \sin(\omega t + \alpha_i^0) - \ddot{y}_1 \cos(\omega t + \alpha_i^0) &= 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выразим с учетом уравнения (8) координаты центра диска обоймы x_1 и y_1 через A_S и ψ_S , определяемые выражениями (11) и (12):

$$\begin{aligned} x_1 &= A_S \cos(\omega t + \psi_S), \quad \dot{x}_1 = -A_S \omega \sin(\omega t + \psi_S), \quad \ddot{x}_1 = -A_S \omega^2 \cos(\omega t + \psi_S); \\ y_1 &= A_S \sin(\omega t + \psi_S), \quad \dot{y}_1 = A_S \omega \cos(\omega t + \psi_S), \quad \ddot{y}_1 = -A_S \omega^2 \sin(\omega t + \psi_S). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) в третье уравнение системы (13), имеем для i -го шара

$$\sin(\psi_S - \alpha_i^0) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

и для n шаров

$$\sum_{i=1}^n \sin(\psi_s - \alpha_i^0) = 0. \quad (15)$$

Подставляя выражения (14) в первое уравнение системы (13), имеем

$$\begin{aligned} A_s (\omega_{0s}^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi_s) \left[1 - \frac{\bar{b}\omega}{(\omega_{0s}^2 - \omega^2)} \frac{\sin(\omega t + \psi_s)}{\cos(\omega t + \psi_s)} \right] = \\ = \bar{M}a\omega^2 \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i^0) \end{aligned}$$

или с учетом того, что согласно выражению (11) $\frac{\bar{b}\omega}{\omega_{0s}^2 - \omega^2} = -\operatorname{tg}\psi_s = \frac{-\sin \psi_s}{\cos \psi_s}$,

$$\begin{aligned} A_s (\omega_{0s}^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \psi_s) \left[1 + \frac{\sin \psi_s}{\cos \psi_s} \frac{\sin(\omega t + \psi_s)}{\cos(\omega t + \psi_s)} \right] = \\ = \bar{M}a\omega^2 \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i^0). \end{aligned}$$

Учитывая преобразование

$$1 + \frac{\sin \psi_s}{\cos \psi_s} \frac{\sin(\omega t + \psi_s)}{\cos(\omega t + \psi_s)} = \frac{\cos \omega t}{\cos \psi_s \cos(\omega t + \psi_s)},$$

получаем

$$A_s (\omega_{0s}^2 - \omega^2) \frac{\cos \omega t}{\cos \psi_s} = \bar{M}a\omega^2 \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i^0).$$

Подставляя в последнее равенство выражение (12), имеем

$$\bar{M}a \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos(\omega t + \alpha_i^0) = a_s \cos \omega t.$$

Используя выражение для $\cos(\omega t + \alpha_i^0)$, с учетом соотношений (7) и (1) имеем

$$\bar{M}a \cos \omega t + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i (\cos \omega t \cos \alpha_i^0 - \sin \omega t \sin \alpha_i^0) = a_s \cos \omega t$$

или

$$\left(\overbrace{\bar{M}a + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i^0}^{x'_s} \right) \cos \omega t - \overbrace{\sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i^0}^{y'_s} \sin \omega t = x'_{0s} = a_s \cos \omega t. \quad (16)$$

Выражение (16) является абсциссой центра масс C_s системы диск – неподвижные шары в подвижной невращающейся СК $O_1 x'_0 y'_0$.

При подстановке выражения (14) во второе уравнение системы (13) после аналогичных преобразований имеем выражение для ординаты центра масс C_s в СК $O_1 x'_0 y'_0$

$$\left(\overbrace{\bar{M}a + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i^0}^{x'_s} \right) \sin \omega t + \overbrace{\sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i^0}^{y'_s} \cos \omega t = y'_{0s} = a_s \sin \omega t.$$

Используя формулы для пересчета координат (1), получим абсциссу и ординату центра масс C_S системы диск – неподвижные шары во вращающейся СК $O_1x'y'$, ось O_1x' которой направлена по эксцентриситету a центра масс C диска с обоймой (см. рис. 2):

$$x'_S = \bar{M}a + \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i^0 = a_S, \quad (17)$$

$$y'_S = \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i^0 = 0. \quad (18)$$

Выражения (17), (18) и (15) с учетом того, что ψ_S зависит от частоты вращения ω , позволяют определить теоретически возможные неподвижные относительно обоймы расположения шаров при различных значениях установившейся частоты вращения ротора.

Из выражений (17) и (18), в частности, следует, что:

1) в установившемся режиме вращения вектор дисбаланса $M_S \bar{a}_S$ роторной системы диск – неподвижные шары располагается на линии действия вектора дисбаланса $M \bar{a}$ диска с обоймой без шаров;

2) режим балансировки будет иметь место при $a_S = 0$, когда шары расположатся во вращающейся обойме согласно уравнениям

$$\bar{M}a = -\sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \cos \alpha_i^0, \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_i R_i \sin \alpha_i^0 = 0.$$

Это означает, что центр масс диска с обоймой без шаров находится на положительной полуоси O_1x' , а общий центр масс шаров расположится на отрицательной полуоси O_1x' , и при емкости АБУ, соответствующей условию $\sum_{i=1}^n m_i R_i \cos \alpha_i^0 \geq Ma$, центр масс C_S системы диск – неподвижные шары совместится с центром диска O_1 , в результате чего исчезнет центробежная сила, вызывающая смещение r вала. Таким образом, центр масс C_S и центр диска O_1 окажутся на оси опор, т.е. в точке O на рис. 2.

Пример с двумя шарами

Теоретически возможное неподвижное расположение шаров в обойме при различных частотах вращения ротора наглядно иллюстрирует пример однорядного АБУ с двумя шарами. В этом случае

$$n = 2, \quad \bar{m}_i = \bar{m}, \quad R_i = R, \quad i = 1, 2$$

и уравнения (17), (18), (15) принимают вид

$$\sum_{i=1}^2 \sin(\psi_S - \alpha_i^0) = 0, \quad (19)$$

$$x'_S = \bar{M}a + \bar{m}R \sum_{i=1}^2 \cos \alpha_i^0 = a_S, \quad (20)$$

$$y'_S = \bar{m}R \sum_{i=1}^2 \sin \alpha_i^0 = 0. \quad (21)$$

Из уравнения (19) имеем

$$\sin(\psi_S - \alpha_1^0) = -\sin(\psi_S - \alpha_2^0) = \sin(2\pi - \psi_S + \alpha_2^0) = \sin(\alpha_2^0 - \psi_S)$$

и, соответственно,

$$\alpha_2^0 = 2\psi_s - \alpha_1^0. \quad (22)$$

При известной критической частоте (10) установившимся режимам вращения ротора с заданной постоянной частотой будут соответствовать постоянные значения сдвига фаз ψ_s , определяемые выражением (11).

При $\psi_s = 0$, что соответствует малой докритической частоте вращения ($\omega \ll \omega_{0s}$), согласно выражению (22) имеем

$$\alpha_2^0 = -\alpha_1^0 = \alpha^0. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнения (20) и (21), получаем координаты центра масс C_s системы диск – неподвижные шары в СК $O_1x'y'$:

абсциссу

$$x'_s = a_s = \bar{M}a + \bar{m}R(\cos \alpha^0 + \cos(-\alpha^0)) = \bar{M}a + 2\bar{m}R \cos \alpha^0, \quad (24)$$

ординату

$$y'_s = \bar{m}R(\sin \alpha^0 + \sin(-\alpha^0)) = 0. \quad (25)$$

Таким образом (рис. 3, а):

1) шары располагаются симметрично относительно оси O_1x' , вдоль положительной полуоси которой направлены векторы дисбалансов: диска $\bar{M}\vec{a}$ и системы диск – неподвижные шары $\bar{M}_s\vec{a}_s$. При этом вектор смещения ротора $\vec{r}$ при $\psi_s = 0$ также направлен вдоль положительной полуоси O_1x' ;

2) как было отмечено выше, шары стремятся расположиться вдоль линии вектора смещения на дальней от оси опор стороне диска, поэтому в данном случае абсолютные величины угловых координат шаров находятся в диапазоне $0 \leq |\alpha_i^0| \leq \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, дисбаланс $\bar{M}_s a_s$ системы диск – неподвижные шары увеличивается по сравнению с дисбалансом диска $\bar{M}a$ на величину дисбаланса шаров $2\bar{m}R \cos \alpha^0$.

При $\psi_s = -\pi$, что соответствует большой закритической частоте вращения ($\omega \gg \omega_{0s}$), согласно уравнению (22) имеет место (с учетом диапазона значений для угловых координат шаров $0 \leq |\alpha_i^0| \leq 2\pi$ в СК $O_1x'y'$)

$$\alpha_2^0 = -2\pi - \alpha_1^0 = -\alpha_1^0 = \alpha^0. \quad (26)$$

Подставляя выражения (26) в уравнения (20) и (21), получаем для абсциссы и ординаты центра масс C_s в СК $O_1x'y'$ соответственно выражения (24) и (25). Однако в отличие от предыдущего случая (рис. 3, б):

1) вектор смещения вала $\vec{r}$ при $\psi_s = -\pi$ направлен в отрицательном направлении оси O_1x' ;

2) абсолютные величины угловых координат шаров находятся в диапазоне $\frac{\pi}{2} < |\alpha_i^0| < \pi$, а значит, относительный дисбаланс системы диск – неподвижные шары определяется выражением

$$x'_s = a_s = \bar{M}a - 2\bar{m}R \cos \alpha^0,$$

и условием полной балансировки ($a_s = 0$) будет

$$2\bar{m}R \cos \alpha^0 = \bar{M}a$$

при емкости АБУ, удовлетворяющей неравенству $\bar{M}a < 2\bar{m}R$.

Рис. 3. Расположение двух шаров в роторной системе диск – неподвижные шары при различных частотах вращения

При $\psi_s = -\frac{\pi}{2}$, что соответствует критической частоте вращения ($\omega = \omega_{0s}$), согласно уравнению (22) имеем

$$\alpha_2^0 = -\pi - \alpha_1^0. \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в уравнения (20) и (21), получаем для абсциссы и ординаты центра масс C_s в СК $O_1x'y'$

$$\begin{aligned} x'_s &= a_s = \bar{M}a + \bar{m}R(\cos \alpha_1^0 + \cos(-\pi - \alpha_1^0)) = \bar{M}a + \bar{m}R(\cos \alpha_1^0 - \cos \alpha_1^0) = \bar{M}a, \\ y'_s &= \bar{m}R(\sin \alpha_1^0 + \sin(-\pi - \alpha_1^0)) = \bar{m}R(\sin \alpha_1^0 - \sin \alpha_1^0) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае (рис. 3, в):

1) шары располагаются в обойме диаметрально друг к другу. При этом, поскольку при $\psi_s = -\frac{\pi}{2}$, ось O_1x' будет располагаться перпендикулярно линии вектора смещения вала $\vec{r}$, можно выделить две ситуации, когда $\alpha_1^0 = 0$, $\alpha_2^0 = -\pi$ (шары располагаются на оси O_1x' перпендикулярно линии смещения вала, на рис. 3, в изображены прерывистой линией) и $\alpha_1^0 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2^0 = -\frac{\pi}{2}$ (шары располагаются на линии смещения вала перпендикулярно оси O_1x' , что теоретически более вероятно, так как в этом положении двигающая шары сила $F_t = 0$);

2) оба варианта расположения шаров в обойме не уменьшают дисбаланс диска и не увеличивают его;

3) если теоретически такое расположение шаров может устанавливаться при значительных силах вязкого сопротивления и трения, уравнивающих инерционную силу T (5), то на практике это маловероятно ввиду того, что критическая частота не должна быть установившейся рабочей частотой вращения ротора и переход через нее непродолжителен во времени.

Таким образом, пример с двумя шарами наглядно демонстрирует, что автобалансировка возможна только на сверхкритической частоте вращения, и в основе ее механизма лежит эффект самоцентрирования гибких роторов, т.е. в результате прогиба вала и/или его смещения в опорах из-за неуравновешенности ротора шары под действием инерционных сил переносного прецессионного движения стремятся расположиться вдоль линии вектора смещения ротора на дальней от оси опор стороне диска с обоймой. В то же время собственное вращение вектора

дисбаланса диска с обоймой при большой сверхкритической частоте опережает по фазе на угол π прецессионное вращение вектора смещения, т.е. вектор дисбаланса диска направлен по линии смещения, но по направлению к оси опор. Соответственно, центр масс диска с обоймой и шары в обойме располагаются диаметрально по разные стороны геометрического центра диска.

Взаимовлияние прецессионного движения и динамики шаров в обойме

Уравнения (3) свидетельствуют о том, что движение прецессии обуславливает динамику шаров, которая, в свою очередь, влияет на динамику прецессии.

Для анализа взаимовлияния прецессионного движения центра диска с обоймой и движений шаров в обойме можно воспользоваться методами теории автоматического управления [26]. Первые два уравнения в системе (3) при отсутствии шаров в обойме, т.е. при учете только первых слагаемых в правых частях, представляют собой при малых значениях коэффициента внешнего демпфирования b уравнения устойчивых колебательных динамических звеньев с гармоническими (при $\omega = \text{const}$) воздействиями на входе. Это означает, что при отсутствии шаров будут устанавливаться гармонические колебания координат прецессионного движения с частотой ω и соответствующим сдвигом по фазе, т.е. будет иметь место установившийся процесс прецессионного движения.

В случае идеальной уравниваемости ротора, т.е. когда эксцентриситет $a = 0$ и, следовательно, отсутствуют первые слагаемые в правых частях рассматриваемых уравнений, но в обойме имеются шары, будет иметь место неустановившийся процесс прецессионного движения, обусловленный перемещениями шаров. Степень влияния этих перемещений будет определяться величиной емкости АБУ.

Если обратиться к уравнению движения шара (третье уравнение системы (3)), то по определению теории автоматического управления его левая часть является нейтрально устойчивым динамическим звеном второго порядка, который в собственном движении устойчив относительно скорости и безразличен (нейтрален) к координате положения. Это означает, что у такого звена при импульсном воздействии устанавливается движение с постоянной скоростью. В данном же случае движение шаров обуславливается стоящей в правой части уравнения (4) инерционной силой от прецессионного движения центра обоймы, причиной которого может быть не только смещение из-за неуравниваемости диска, но и эксцентриситет центра обоймы относительно центра диска [22].

Таким образом, как отмечено ранее, шары будут останавливаться в неподвижных относительно вращающейся обоймы положениях, когда действующие на каждый шар силы: тангенциальные составляющие инерционных сил, сила вязкого сопротивления в обойме, силы трения качения, а в общем случае и сила тяжести – уравнивают друг друга. Учет этих сил при проектировании шарового АБУ является необходимым условием обеспечения его работоспособности.

Эксперимент

Для оценки влияния сил трения на установление шаров во вращающейся обойме проводился эксперимент на горизонтальной роторной установке с консольным расположением модельной обоймы АБУ, изготовленной из пластика FDM-технологией быстрого прототипирования (рис. 4). Видеофиксация движения шаров в обойме осуществлялась с помощью стробоскопической подсветки, стробоимпульсы которой синхронизированы с частотой вращения. Обойма имела две дорожки с радиусами внешней поверхности 86 и 70 мм и шириной 10 мм. Использовались стальные шарики с одинаковыми диаметром (7 мм) и массой (1,41 г). Для контролируемой имитации прецессионного движения обоймы устанавливалась с эксцентриситетом

0,5 мм в направлении оси x на рис. 4, б. Смазка отсутствовала. Вращение вала осуществлялось по часовой стрелке в направлении от оси y к оси x на рис. 4, б.

Рис. 4. Стенд роторной системы с консольным расположением АБУ: *а* – обойма АБУ и устройство для видеосъемки в стробоскопической подсветке; *б* – установившееся положение шаров во вращающейся обойме

До начала разгона ротора шарики находились внизу дорожек, как показано на рис. 4, а. В процессе разгона шарики перемещались по обойме в угловом диапазоне $\pm 90^\circ$, отсчитываемых от положительной полуоси x . На частоте вращения ротора 13,9 Гц шарики принимали установившееся положение во вращающейся обойме, показанное на рис. 4, б, и при дальнейшем увеличении частоты его не меняли. Такое расположение подтверждает полученные выше теоретические выводы о том, что в данном случае шарики стремятся расположиться вдоль линии смещения центра обоймы, а конечное их расположение во вращающейся обойме обуславливается соотношением действующих на шарики инерционных сил прецессионного вращения центра обоймы и сил сухого трения и тяжести.

Заключение

Анализ полученных уравнений динамики однодискового ротора Джеффкотта с многорядным шаровым АБУ при учете только вязкого сопротивления шаров в обойме позволяет констатировать, что при установившемся режиме собственного вращения ротора с постоянной частотой:

1. Силой,двигающей шары в обойме, является инерционная сила прецессионного движения, представляющего собой для вращающегося диска переносное движение. Под действием этой силы шары стремятся расположиться вдоль линии вектора смещения вала на дальней от оси опор стороне диска обоймы.
2. Шары занимают неподвижное относительно вращающейся обоймы положение в случае, когда тангенциальные к окружностям беговых дорожек проекции всех действующих на шары инерционных сил уравниваются силами вязкого сопротивления и трения шаров в обойме.
3. Однодисковая роторная система диск – неподвижные шары представляет собой традиционную модель ротора Джеффкотта. Статическая неуравновешенность этой системы порождает круговую прямую синхронную прецессию, при которой вектор дисбаланса и вектор смещения вала вращаются со сдвигом по фазе, зависящим от значения критической частоты, установившейся частоты вращения и коэффициента внешнего демпфирования системы.

4. При круговой прямой синхронной прецессии шары во вращающейся обойме стремятся занять такое неподвижное относительно обоймы состояние, при котором вектор дисбаланса системы диск – неподвижные шары будет располагаться на линии действия вектора дисбаланса диска с обоймой без шаров.

5. Автобалансировка в роторной системе диск – неподвижные шары возможна лишь при частоте собственного вращения ротора, значительно превышающей критическую частоту. В этом случае вращение вектора дисбаланса системы опережает вращение вектора смещения вала на угол π , и эти векторы находятся на одной линии с противоположными друг другу направлениями. При этом центр масс диска и общий центр масс шаров, сгруппировавшихся вдоль линии смещения ротора на дальней от оси опор стороне обоймы, будут располагаться диаметрально относительно центра диска. При соответствующей емкости АБУ это обеспечивает размещение центра масс системы диск – неподвижные шары в центре собственного вращения диска с обоймой, что приводит к исчезновению центробежной силы, вызывающей смещение вала ротора.

6. В противоположность рассмотренному выше режиму автобалансировки при малой докритической частоте вращения центры масс диска и установившихся шаров будут располагаться по одну сторону от центра диска на его дальней от оси опор стороне. В этом случае дисбаланс системы диск – неподвижные шары будет превышать дисбаланс диска на величину суммарного дисбаланса шаров.

7. При проектировании шарового АБУ, помимо выбора его требуемой емкости заданием числа беговых дорожек и соответствующего по массе количества шаров, необходимо учитывать влияние на работоспособность АБУ коэффициента внешнего демпфирования ротора, сил вязкого сопротивления шаров в дорожках, а в общем случае действующих на шары сил трения и тяжести. При этом следует иметь в виду, что на формирование области расположения шаров в установившемся вращении ротора будет оказывать влияние не только прогиб/смещение вала, но и возможный эксцентриситет центра обоймы относительно центра диска.

Библиографический список

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. – М.: Наука, 2002. – 119 с.
2. Филимоных Г.Б., Гончаров В.В. Стенд центробежной соковыжималки с автобалансиром для определения оптимальных значений параметров автобалансира // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 70(1043). – С. 22–27.
3. Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // Explore Bristol Research. – URL: http://research-information.bristol.ac.uk/files/3018174/abbexp_paper.pdf (дата обращения: 15.10.2016).
4. Горбенко А.Н. Некоторые нетривиальные свойства механической системы «ротор – шариковый автобалансир» // Вибрации в технике и технологиях. – 2002. – № 3(24). – С. 33–36.
5. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors / B.K. Green, A.R. Champneys, M.I. Friswell, A.M. Munoz // Philosophical Transactions of Royal Society A. – 2008. – Vol. 366. – P. 705–728.
6. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – Vol. 43. – P. 527–541.
7. Быков В.Г. Балансировка статически и динамически неуравновешенного ротора одноплоскостным автобалансирующим механизмом // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2009. – Вып. 4. – С. 67–76.
8. Wettergren H.L. Using guided balls to auto-balance rotors // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2002. – Vol. 124. – P. 971–975.
9. Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer / C.K. Sung, T.C. Chan, C.P. Chao, C.H. Lu // Mechanism and Machine Theory. – 2013. – № 69. – P. 115–126.
10. Van de Wouw N., Van den Heuvel M.N., Nijmeijer H. Performance of an automatic ball balancer with dry friction // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Vol. 15, № 1. – P. 65–82.

11. Мартыненко Г.Ю. История, актуальные проблемы, методы и средства анализа явлений роторной динамики с учетом традиционных и магнитных подшипников // Вестник нац. техн. ун-та «Харьков. политехн. ин-т». – 2014. – № 58(1100). – С. 77–131.
12. Подольский М.Е., Черенкова С.В. Физическая природа и условия возбуждения прямой и обратной прецессии ротора // Теория механизмов и машин. – 2014. – Т. 12, № 1. – С. 27–40.
13. Иноземцев А.А., Нихамкин М.Ш., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008. – 199 с.
14. Горбенко А.Н. Общая структура уравнений движения роторных машин с автобалансиром пассивного типа // Авиационно-космическая техника и технология: науч.-техн. журнал / Харьков. авиац. ин-т. – Харьков, 2011. – № 8(85). – С. 71–76.
15. Гончаров В.В., Филимоныхин Г.Б. Вид и структура дифференциальных уравнений движения и процесса уравнивания роторной машины с автобалансирами // Известия Том. политехн. ун-та. – 2015. – Т. 326, № 12. – С. 20–30.
16. Ehyaei J., Moghaddam M.M. Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 321. – P. 554–571.
17. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – Vol. 43. – P. 527–541.
18. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous motions near critical speeds in a single-plane auto-balancing device // Technische Mechanik. – 2004. – Vol. 24, № 1. – P. 25–36.
19. Быков В.Г. Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2010. – Вып. 3. – С. 89–96.
20. Горбенко А.Н. Анализ устойчивости автобалансировки ротора шарами при произвольных параметрах автобалансира // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4(20). – С. 86–90.
21. Olsson K.O. Limits for the use of auto-balancing // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – Vol. 10, № 3. – P. 221–226.
22. Быков В.Г., Ковачев А.С. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2014. – Вып. 4. – С. 579–588.
23. Ковачев А.С. Балансировка динамически неуравновешенного ротора с учетом неидеальности автобалансирующих устройств // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2015. – Вып. 4. – С. 606–616.
24. Cheol-Ho Hwang, Jintai Chang. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races // JSME International Journal. Series C. – 1999. – Vol. 42, № 2. – P. 265–272.
25. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with triple races / Eun-Hyoung Cho, Jin-Seung Sohn, Sung-Hoon Choa, Junmin Park, Jintai Chung. – URL: http://www.koreascience.or.kr/search/articlepdf_ocean.jsp?url=http://ocean.kisti.re.kr/download/volume/ksme/DHGGCI/2002/v26n4/DHGGCI_2002_v26n4_764.pdf&admNo=DHGGCI_2002_v26n4_764 (дата обращения: 15.10.2016).
26. Каргу Л.И. Основы автоматического регулирования и управления / под ред. В.М. Пономарева и А.П. Литвинова. – М.: Высш. шк., 1974. – 439 с.

References

1. Gusarov A.A. Avtobalansiruyushchie ustroystva pryamogo deystviya [Self-balancing device of direct action]. Moscow, Nauka, 2002, 119 p.
2. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Stend tsentrobezhnoy sokovyzhimalki s avtobalansirovom dlya opredeleniya optimalnykh znacheniy parametrov avtobalansira [Test bench of the centrifugal juicer with self-balancing device to determine the optimal parameter values of the self-balancing device]. *Vestnik natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta. Kharkovskiy politekhnicheskiiy institut*, 2013, no. 70 (1043), pp. 22–27.
3. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor. *Explore Bristol Research*, available at: http://research-information.bristol.ac.uk/files/3018174/abbexp_paper.pdf (accessed 15 October 2016).
4. Gorbenko A.N. Nekotorye netrivialnye svoystva mekhanicheskoy sistemy «rotor – sharikovyy avtobalansir» [Some non-trivial properties of the mechanical system “rotor – ball self-balancing device”]. *Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh*, 2002, no. 3 (24), pp. 33–36.

5. Green B.K., Champneys A.R., Friswell M.I., Munoz A.M. Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors. *Philosophical Transactions of Royal Society A*, 2008, vol. 366, pp. 705-728.
6. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 527-541.
7. Bykov V.G. Balansirovka staticheskoi i dinamicheskoi neuravnovesennogo rotora odnoploskostnym avtobalansirovochnym mekhanizmom [The balancing of statically and dynamically unbalanced rotor with one-plane self-balancing mechanism]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya I*, 2009, iss. 4, pp. 67-76.
8. Wettergren H.L. Using guided balls to auto-balance rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, vol. 124, pp. 971-975.
9. Sung C.K., Chan T.C., Chao C.P., Lu C.H. Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, no. 69, pp. 115-126.
10. Van de Wouw N., Van den Heuvel M.N., Nijmeijer H. Performance of an automatic ball balancer with dry friction. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no. 1, pp. 65-82.
11. Martynenko G.Yu. Istoriya, aktualnye problemy, metody i sredstva analiza yavleniy rotornoy dinamiki s uchetom traditsionnykh i magnitnykh podshipnikov [History, actual problems, methods and means of analysis of the phenomenon of the rotor dynamics, taking into account traditional and magnetic bearings]. *Vestnik natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta. Kharkovskiy politekhnicheskii institut*, 2014, no. 58 (1100), pp. 77-131.
12. Podolskiy M.E., Cherenkova S.V. Fizicheskaya priroda i usloviya vozbuzhdeniya pryamoy i obratnoy pretsessii rotora [Physical nature and conditions of excitation of direct and reverse precession of the rotor]. *Teoriya Mekhanizmov i Mashin*, 2014, vol. 12, no. 1, pp. 27-40.
13. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.Sh., Sandratskiy V.L. Dinamika i prochnost aviatsionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok [Dynamics and strength of aircraft engines and power plants]. Moscow, Mashinostroyeniye, 2008, 186 p.
14. Gorbenko A.N. Obshchaya struktura uravneniy dvizheniya rotornykh mashin s avtobalansirovkoj passivnogo tipa [The general structure of the equations of motion of rotating machines with passive type self-balancing]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya: Nauchno-tekhnicheskii zhurnal*, 2011, no. 8(85), pp. 71-76.
15. Goncharov V.V., Filimonikhin G.B. Vid i struktura differentsialnykh uravneniy dvizheniya i protsessy avtobalansirovaniya rotornoy mashiny s avtobalansirovkoj [Form and structure of differential equations of motion and process of self-balancing in the rotor machine with auto-balancers]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2015, vol. 326, no. 12, pp. 20-30.
16. Ehyaei J., Moghaddam M.M. Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, vol. 321, pp. 554-571.
17. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 527-541.
18. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous motions near critical speeds in a single-plane auto-balancing device. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 25-36.
19. Bykov V.G. Nestatsionarnyye rezhimy dvizheniya staticheskoi neuravnovesennogo rotora s avtobalansirovochnym mekhanizmom [Non-steady motion modes of statically unbalanced rotor with self-balancing mechanism]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya I*, 2010, iss. 3, pp. 89-96.
20. Gorbenko A.N. Analiz ustoychivosti avtobalansirovki rotora sharami pri proizvolnykh parametrah avtobalansirovaniya [Analysis of the stability of rotor balancing by balls with arbitrary self-balancing device parameters]. *Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh*, 2001, no. 4 (20), pp. 86-90.
21. Olsson K.O. Limits for the use of auto-balancing. *International Journal of Rotating Machinery*, 2004, vol. 10, no. 3, pp. 221-226.
22. Bykov V.G., Kovachev A.S. Dinamika rotora s eksstsentricheskimi sharovymi avtobalansirovochnymi ustroystvami [Rotor dynamics with eccentric ball self-balancing device]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya I*, 2014, iss. 4, pp. 579-588.
23. Kovachev A.S. Balansirovka dinamicheskoi neuravnovesennogo rotora s uchetom neidealnosti avtobalansirovochnykh ustroystv [Balancing dynamically unbalanced rotor taking into account imperfections of self-balancing devices]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya I*, 2015, iss. 4, pp. 606-616.
24. Cheol-Ho Hwang, Jintai Chang. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races. *JSME International Journal. Series C*, 1999, vol. 42, no. 2, pp. 265-272.

25. Eun-Hyoung Cho, Jin-Seung Sohn, Sung-Hoon Choa, Junmin Park, Jintai Chung. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with triple races, available at: http://www.koreascience.or.kr/search/articlepdf_ocean.jsp?url=http://ocean.kisti.re.kr/downfile/volume/ksme/DHGGCI/2002/v26n4/DHGGCI_2002_v26n4_764.pdf&admNo=DHGGCI_2002_v26n4_764 (accessed 15 October 2016).

26. Kargu L.I. and others. Osnovy avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya [Bases of automatic regulation and control]. Ed. V.M. Ponomarev and A.P. Litvinov. Moscow, Vysshaya shkola, 1974, 439 p.

Об авторах

Зайцев Николай Николаевич (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: znn@perm.ru).

Зайцев Денис Николаевич (Пермь, Россия) – ведущий инженер кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: rkt@pstu.ru).

Макаров Андрей Анатольевич (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ФГБОУ ВО ПНИПУ (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: makarovandrej@mail.ru).

About the authors

Nikolay N. Zaytsev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: znn@perm.ru).

Denis N. Zaytsev (Perm, Russian Federation) – Lead Engineer, Department of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: rkt@pstu.ru).

Andrey A. Makarov (Perm, Russian Federation) – Postgraduate Student, Department of Rocket and Space Engineering and Power Generating Systems, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: makarovandrej@mail.ru).

Получено 10.11.2016