ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
Т. 8, № 4, 2017
PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>

DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.06

УДК 624.131.38

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ГРУНТА ИЗ ПОЛЕВЫХ ИСПЫТАНИЙ

А.Н. Алехин¹, А.А. Алехин²

¹Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

²Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 05 июля 2017

Принята: 23 августа 2017

Опубликована: 15 декабря 2017

Ключевые слова:

грунт, нелинейность, параметры, обратная задача, неустойчивость решения, регуляризация, существование и единственность решения, алгоритм, примеры

АННОТАЦИЯ

Очевидная и существенная нелинейность деформирования нескальных грунтов, а также сложное природное происхождение грунтовой среды, следствием чего является невозможность воспроизведения в лабораторных условиях природного напряженного состояния грунтового массива, требуют разработки методов определения параметров нелинейного деформирования грунтовой среды из данных полевых испытаний. В этом случае ввиду сложности определяющих механических зависимостей нескальных грунтов и статистического разброса измеряемых в испытании величин проблема сводится к решению так называемой обратной некорректной задачи, характеризующейся неустойчивостью решения. Такие задачи нуждаются в применении регуляризации, чаще всего с использованием специфических особенностей проблемы, учет которых позволяет создать устойчивую процедуру получения решения. Кроме того, из-за нелинейности операторов задачи требуется обоснование существования и единственности решения проблемы, что напрямую связано с устойчивостью процедуры получения правильного решения.

В данной статье обсуждаются особенности деформирования нескальных грунтов, а также обосновываются существование и единственность решения проблемы определения параметров феноменологической нелинейной модели Боткина по результатам полевых испытаний. Приводятся некоторые результаты выполненных исследований, характеризующих предлагаемый метод, рекомендуются удобные приборы и программные средства для реализации метода. Одним из наиболее эффективных способов полевого испытания с использованием для обработки двумерной нелинейной задачи является прессиометрический способ, характеризующийся широким диапазоном применения в различных инженерно-геологических условиях. При этом из методики обработки, в отличие от линейных моделей, исключаются также такие субъективные моменты, как назначение линейного участка кривой деформирования и использование в расчете результата табличного значения коэффициента Пуассона. Описанный в статье общий способ, фактически состоящий в раздельном определении параметров нелинейной модели, может быть применен для разработки подобных методов в случае других, более сложных моделей.

© ПНИПУ

© Алехин Алексей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: alekhin.51@gmail.com.

Алехин Андрей Алексеевич – старший преподаватель, e-mail: alekhin@hotmail.com.

Aleksei N. Alekhin – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: alekhin.51@gmail.com.

Andrei A. Alekhin – Senior Lecturer, e-mail: alekhin@hotmail.com.

EFFECTIVE METHOD OF DETERMINING THE PARAMETERS OF THE NON-LINEAR SOIL MODEL FROM IN-SITU TEST DATA

A.N. Alekhin¹, A.A. Alekhin²

¹Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, Russian Federation

²Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 July 2017
Accepted: 23 August 2017
Published: 15 December 2017

Keywords:

soil, nonlinearity, parameters, inverse problem, instability of solution, regularization, existence and uniqueness of solution, algorithm, examples

ABSTRACT

Evident and essential non-linearity of soil deformation, as well as complex natural genesis of soil massifs, which results in non-reproducibility of the natural stress state of soils in the laboratory conditions, require the development of methods for determining the parameters of the non-linear deformation of soils from in-situ test data. In this case, in a view of the complexity of the determining mechanical relationships of soils and statistical spread of values measured in the test, the problem is reduced to the solution of the so-called inverse ill-posed problem characterized by the instability of the solution. Such problems require the use of regularization method, taking into account specific features of the problem, adopting of which makes it possible to create a stable procedure for obtaining correct solution.

The article discusses the features of deformation of soils, as well as the existence and the uniqueness of the solution of the problem of determining the parameters of the phenomenological non-linear soil model of Botkin from in-situ test data. Some results characterizing the proposed method are presented, convenient devices and software for implementing the method are recommended. One of the most effective methods of in-situ tests using two-dimensional non-linear problem for data analysis is the pressuremeter method, characterized by wide range of applications in various geological conditions. In this case also, to the contrast of linear models, such subjective moments in analyses of results, as the assignment of linear part of the deformation curve and the use of the tabulated Poisson coefficient are excluded. Described in the article general way, actually consisting in separate determination of nonlinear model parameters, can be applied for the development of similar methods in the case of other, more complicated models.

© PNRPU

Две особенности нескальных грунтов, которые необходимо учитывать при проектировании согласно требованиям Федерального закона Российской Федерации № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений», а также рекомендациям Свода правил по проектированию и устройству оснований и фундаментов зданий и сооружений, заметно выделяют их в ряду строительных сред и материалов. Первая особенность – это их очевидная нелинейность, подмеченная еще при первых исследованиях грунтов на сжимаемость (например, зависимость сжимаемости грунтов от размеров и формы нагрузочных устройств) [1]. Как теперь уже хорошо известно, нелинейность деформирования в той или иной мере наблюдается у всех сред и материалов, о чем, в частности, сообщает известный исследователь и историк науки Джеймс Белл [2], констатируя, что «...скорее математическая простота, чем невнимание к “незначительным”, но хорошо установленным деталям эксперимента, дала толчок к принятию линейности...». Как раз наиболее полно нелинейный характер деформирования проявляется именно у нескальных грунтов, что выражается прежде всего в сложной зависимости их деформирования от формирующегося при нагружении напряженно-деформированного состояния (НДС), включающего в том числе и исторически сформировавшуюся (природную) составляющую напряжений. Сложный характер деформирования нескального грунта в пространстве инвариантов тензоров напряжений и деформаций изучался в середине и конце XX в. многими учеными [3–5]. Во многом первая особенность является следствием второй, по сути, уникальной особенности грунтов, а именно их природного происхождения вследствие сложного генезиса, сопровождавшегося формированием уникального природного напряженного состояния в грунтовых массивах. Это природное состояние со всеми повлиявшими на него инженерно-геологическими процессами (зем-

летрясениями, давлением ледников и т.п.) невозможно напрямую измерить, а значит, нельзя искусственно воспроизвести в лабораторных условиях. Аналогичная ситуация возникает и при возведении из грунтов искусственных сооружений типа насыпей автомобильных и железных дорог, земляных плотин, искусственных островов, а также в результате, например, химического закрепления грунтов, поскольку во всех этих случаях в грунте также возникает уникальное напряженное состояние, недоступное для фиксации. Таким образом, механические исследования грунтов следует выполнять в условиях их залегания (in-situ). При этом определять надо не параметры линейной модели Гука, диаграмма которой изображена на рис. 1 в координатах инвариантов, а параметры нелинейных моделей, например модели Боткина, графически изображенной ниже в тех же координатах на рис. 2 и отражающей реальное деформирование грунта. Графики нелинейного деформирования грунтов были удачно аппроксимированы А.И. Боткиным [5] зависимостями вида

$$K = \sigma/\varepsilon = A_0\sigma^{1-\alpha}; \quad G = \sigma_i/\varepsilon_i = \sigma_U/(B + \varepsilon_i); \quad \sigma_U = A\sigma + C, \quad (1)$$

в которых отражено фундаментальное свойство грунтов, да и всех других сред и материалов, – непосредственная связь деформации среды с накоплением в ней дефектов, т.е. нарушением ее прочности.

Рис. 1. Графическая интерпретация (диаграмма) системы линейных деформационно-прочностных моделей грунта Гука и Мизеса (Кулона); на графике в скобках даны обозначения для версии Кулона
Fig. 1. Graphical interpretation of the system of linear deformation-strength models of soil on Hooke and Mises (or Coulomb) theories; in brackets characters for Coulomb version are given

Рис. 2. Упрощенная диаграмма нелинейной модели грунта
Fig. 2. Simplified diagram of nonlinear soil model

В формулах (1) A_0 , α , A , B , C – константы нелинейной модели грунта; σ , ε – первые инварианты тензоров напряжений и деформаций соответственно; σ_i , ε_i – вторые инварианты девиаторных (формоизменение) частей тензоров напряжений и деформаций соответственно. В жесткостном параметре формоизменения G (модуль сдвига) совмещены условие прочности грунта в виде соотношения Мизеса ($A\sigma + C$) и гиперболическая форма деформации формоизменения, отражаемая с помощью знаменателя в виде суммы константы B и интенсивности сдвиговой деформации ε_i , а объемная жесткость грунта, характеризующаяся модулем объемной деформации K , является функцией объемной части напряжений σ ; при этом в целом небольшое для большинства грунтов влияние на эту жесткость деформации формоизменения в виде так называемой контракции-дилатансии обычно учитывается в общей величине модуля K .

Это развитие в исследовании механических свойств грунтов оправдано также преемственностью указанных моделей, поскольку феноменологическая нелинейная модель Боткина с жесткостными параметрами грунта K и G , зависящими от напряжений и деформаций, является логическим обобщением феноменологической и линейной моделей Гука с постоянными, не зависящими от напряжений и деформаций жесткостными параметрами K и G (или E и ν).

Несмотря на очевидность необходимости анализа геотехнических проблем в рамках нелинейных моделей, довольно сложный нелинейный вид жесткостных зависимостей, диктующий применение в расчетах итерационных процедур, и необходимость рассмотрения в этом анализе очень больших грунтовых массивов требовали применения либо мощных вычислительных инструментов, либо простых определяющих уравнений среды. По словам К. Терцаги [6], «нет ни одного материала, за исключением стали, механические свойства которого при напряжении в пределах упругости были бы настолько просты, что их можно было бы использовать в качестве основы для теоретических исследований. Поэтому каждая теория прикладной механики практически построена на ряде допущений, упрощающих механические свойства рассматриваемого механического материала. Эти допущения всегда находятся в известной степени в противоречии с природой; однако строгие математические решения обычно слишком сложны для общего применения при расчете сооружений, и мы вынуждены в таких случаях искать дальнейшее упрощение в целях сокращения чисто счетной работы». В основном по этой причине в отсутствие мощных компьютеров основными инструментами математического анализа даже при статическом нагружении грунта были линейные деформационные модели (сначала модель Фусса–Винклера, затем модель Гука–Юнга–Кулона). Однако мощное развитие компьютеров в последние десятилетия, беспрецедентный рост их возможностей и доступности оказали огромное влияние на развитие методов исследования и проектирования в различных областях техники. В гражданском строительстве это, пожалуй, наиболее очевидно в геотехнике, где сложность математических соотношений, описывающих деформацию грунта, а также необходимость учета больших объемов грунтовой среды в анализе совместной работы сооружений и грунта требовали использования мощных компьютеров. В настоящее время проблема доступности мощных компьютеров в исследованиях и дизайне практически решена.

Следующим вопросом, требующим решения в связи с особенностями формирования нескального грунта, была проблема определения параметров адекватной ему нелинейной модели из данных полевых испытаний, поскольку, как показывают результаты различных исследований, значения параметров нелинейной модели, в частности модели Боткина, полученные лабораторными методами при очень хорошем приближении к результатам модельных экспериментов в лабораторных лотках, дают слишком большие (до 100 % и бо-

лее) отклонения при сопоставлении с результатами натурных измерений [7]. В качестве оборудования для полевых испытаний целесообразно использовать приборы с осесимметричной схемой нагружения, т.е. радиальные прессиометры (рис. 3) и круглые штампы, поскольку простая схема нагружения и простая расчетная схема повышают надежность результатов. К тому же решение двумерной прессиометрической задачи (рис. 4) снимает требование обеспечения плоской деформации, позволяет уменьшить длину прессиометра и более точно устанавливать его в слоях грунтов различной мощности.

Рис. 3. Автоматический прессиометр для полевых испытаний грунтов в скважинах
Fig. 3. Automatic pressuremeter device for in-situ tests in bore holes

Рис. 4. Схема двумерной осесимметричной задачи [7]
Fig. 4. Scheme of a two-dimensional axisymmetric problem [7]

Проблема заключается в том, определение параметров по результатам полевых испытаний всегда сводится к решению так называемой обратной некорректной задачи [8], которая имеет вид

$$z = A^{-1}(u), \quad (2)$$

где z – совокупность определяемых параметров грунта; u – совокупность измеренных в опыте величин (обычно перемещений грунта); A^{-1} – оператор, обратный оператору A , действующему из пространства искомых параметров в пространство измеряемых величин.

Из-за сложности и нелинейной формы зависимостей (1), а следовательно, и оператора A , а также из-за естественного разброса измеряемых величин (в данном случае перемещений грунта) обратная задача имеет неустойчивое решение, выражающееся в сильной зависимости определяемых величин от измеренных значений, в чем, собственно, и заключается ее некорректность. Такие задачи представляют наибольшую сложность для решения в классе некорректных задач [9] и для получения результата нуждаются в определенной регуляризации, например в использовании специфических особенностей объекта задачи, позволяющих создать устойчивую процедуру получения решения. Для обсуждаемой проблемы существует несколько таких особенностей. Первая из них – это высокая разрешающая способность модели Боткина при описании НДС в условиях статического нагружения грунта, что, как отмечалось выше, подтверждается многочисленными исследованиями [7, 10–12]. Следует отметить также, что именно с позиций модели Боткина нашло свое объяснение известное различие значений модуля деформации, устойчиво фиксируемое в различных видах испытания грунтов на сжимаемость [7, 12]. Адекватность численного моделирования НДС грунта в рамках модели Боткина позволила с применением в том числе метода наименьших квадратов получить формулу для вычисления природного значения одного из основных параметров нелинейной гиперболической модели [13]:

$$B = B_L \frac{\sum \Delta U_i}{\sum \Delta U_i^c}, \quad (3)$$

где B_L – лабораторное значение параметра B , а ΔU_i и ΔU_i^c – фактические и численно смоделированные значения перемещений грунта при прессиометрическом или штамповых испытаниях соответственно.

Таким образом, значение параметра B существует и единственно для конкретного полевого испытания. При этом важно, что в формуле (3) могут использоваться все измеренные в опыте значения перемещений, поскольку модель Боткина, в отличие от модели Гука, где для получения результата необходимо субъективно выбирать более или менее линейный участок деформирования, справедлива для всех этапов монотонного нагружения грунта. Далее, учитывая практически значимую точность определения прочностных параметров Кулона (для угла внутреннего трения $\delta\varphi = 1^\circ$, а для удельного сцепления $\delta c = 1,0$ кПа), т.е. дискретный характер этих величин в практических расчетах, а значит, и дискретный характер параметров прочности Мизеса A и C , пропорциональных выше указанным параметрам Кулона [13], решение проблемы переводится в область ограниченного множества, что, в свою очередь, позволяет применить эффективный в случае некорректных задач метод перебора [8] результатов решения прямой осесимметричной задачи $u = A(z)$, решение которой с использованием интегро-интерполяционного метода (обобщение метода Зейделя) и процедуры Рунге–Ромберга для повышения устойчивости и скорости численного решения приведено в работе [7]. Решения прямой задачи существуют и единственны, поскольку определяются при фиксированных параметрах грунтовой среды: параметр B определяется из полевого испытания; параметры объемной жесткости A_0 и α принимаются по результатам близких к объемному обжатию стандартных компрессионных или стабилметрических испытаний образцов ненарушенной структуры; причем в этом случае лабораторный параметр α кривизны графика деформирования очень мало отличается от его полевого значения [7]; параметры прочности A и C являются входными независимыми величинами, вводимыми в решения с шагами, зависящими

от указанного выше шага для параметра Кулона φ и от достаточно устойчивого соотношения $c/\operatorname{tg}\varphi$, легко фиксируемого в различного вида испытаниях грунта на срез. В качестве искомых параметров нелинейной модели грунтовой среды принимается набор параметров z с минимальной невязкой $\rho_u(Az, u)$. Очевидно, что в силу существования решения прямой задачи такой набор параметров существует и единственен для конкретного полевого испытания. По большому счету исследуемый диапазон задаваемых параметров A и C может быть достаточно большим, поскольку при современных мощностях компьютеров и эффективном алгоритме решения прямой задачи, приведенном, например, в работе [7], количество просчитываемых вариантов прямой задачи не имеет существенного значения. Поскольку параметры объемного деформирования в прямую задачу вводятся из лабораторных данных, рекомендуется наиболее значимый из них и наиболее зависящий от природной структуры грунта параметр A_0 на последнем этапе процедуры метода уточнять с помощью метода наименьших квадратов невязки $\rho_u(Az_k, u)$ по одному параметру $z_k = A_0$. При этом может быть использована та же совокупность измеренных в полевым испытании перемещений грунта или данные параллельного испытания; могут быть использованы и некоторые другие вспомогательные несложные процедуры, повышающие надежность конечного результата. Одновременное же использование данных прессиометрических и штамповых испытаний позволяет определить еще один важный для грунтов [3] и особенно для проектирования плитных фундаментов сложной конфигурации параметр влияния вида напряженного состояния, поскольку сам параметр вида напряженного состояния μ_σ при прессиометрическом нагружении грунта и при нагружении его штампом имеет крайние значения: $+1$ – при первом нагружении и -1 – при втором. Эффективность предложенного метода проиллюстрирована в работе [14] результатами независимого определения параметра B по графикам штамповых и прессиометрических испытаний одного и того же грунта на разных глубинах. При отличии полевых результатов от лабораторных на 30 % различие между данными полевых испытаний было в пределах 5 %, что, с одной стороны, свидетельствует о высокой степени адекватности модели Боткина при моделировании статического нагружения, учитывающей в том числе увеличение жесткости грунта с глубиной [7, 15], а, с другой стороны, об эффективности предлагаемого метода определения ее параметров. К тому же одним из основных достоинств применения нелинейных моделей грунта при обработке результатов полевых испытаний по сравнению с линейными является исключение из процедуры анализа результатов испытаний, локально применимых как по виду грунтов и их физическому состоянию, так и по типу их происхождения, корректирующих коэффициентов, поскольку нелинейные модели, в отличие от линейных, учитывают влияние НДС, в том числе и его вида, на жесткость и прочность грунта [7, 12].

Заключение

1. Приведенный в статье метод определения параметров одной из эффективных в плане простоты и в то же время разрешающей способности нелинейной модели грунта по данным его полевых испытаний радиальными прессиометрами и круглыми, в том числе небольших размеров, штампами открывает возможность скорейшего внедрения нелинейных моделей в практику проектирования согласно требованиям Федерального закона Российской Федерации № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений», а также рекомендациям нормативных документов.

2. Изложенный в статье общий подход, по сути, заключающийся в разделении определяемых параметров некорректной задачи, и его обоснование могут быть применены и для более сложных и общих нелинейных моделей

3. Нелинейные модели, являющиеся логическим обобщением моделей линейного деформирования, позволят учесть в геотехнических расчетах две главные особенности грунтов: сложность их деформирования и природное происхождение.

4. Одним из основных достоинств применения нелинейных моделей грунта при обработке результатов полевых испытаний по сравнению с линейными является исключение из процедуры анализа результатов испытаний корректирующих коэффициентов, поскольку нелинейные модели, в отличие от линейных, учитывают влияние НДС, в том числе и его вида, на жесткость и прочность грунта.

5. Для обеспечения эффективности перехода в геотехническом проектировании от линейных моделей к нелинейным на базе методов полевых испытаний грунтов следует повысить технологичность и надежность полевых испытаний, оптимизировав в том числе параметры их нагрузочных устройств. В этом отношении прессиометрический способ является наиболее перспективным, а применение для обработки его результатов нелинейного двумерного решения существенно повышает разрешающую способность способа с одновременным расширением диапазона его применения и упрощением технологии обработки данных.

Библиографический список

1. Бернацкий Л.Н. Прикладная геотехника. – М.: Трансжелдориздат, 1935. – 258 с.
2. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. Малые деформации: пер. с англ. / под ред. А.П. Филина – М.: Наука, 1984. – 600 с.
3. Ломизе Г.М., Крыжановский А.Л., Воронцов Э.И. Исследование закономерностей деформируемости и прочности грунтов при пространственном напряженном состоянии // Тр. VII Междунар. конгресса по механике грунтов и фундаментостроению. – М.: Стройиздат, 1969. – С. 32–41.
4. Kriegl H.J., Wiesner H.H. Problems of stress-strain conditions in subsoil // Proceedings of VIII ICSMFE. – 1973. – Vol. 1.3. – P. 133–141.
5. Боткин А.И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах // Изв. НИИ гидротехники. – 1939. – Т. XXIV. – С. 153–172.
6. Терцаги К. Теория механики грунтов: пер. с нем. / под общ. ред. Н.А. Цытовича. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
7. Алехин А.Н. Нелинейный анализ напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов при статическом нагружении: дис. ... канд. техн. наук / Урал. политехн. ин-т. – Свердловск, 1982. – 186 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
9. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2010. – 912 с.
10. Христофоров В.С., Задворнев Г.А. Напряженно-деформированное состояние грунта с нелинейными характеристиками при осесимметричной плоской деформации // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1978. – № 6. – С. 19–21.

11. Исследование особенностей деформирования грунтов при различных траекториях их нагружения для разработки методики трехосных испытаний грунтов: отчет о НИР. № ГР 0186011927 / А.Н. Алехин, Ю.Р. Оржеховский, Л.Г. Мариупольский [и др.]. – Свердловск, 1986. – 67 с.
12. Лушников В.В., Алехин А.Н. Оценка достоверности определения модуля деформации по данным испытаний грунтов // Устройство оснований и фундаментов в слабых и мерзлых грунтах: межвуз. темат. сб. тр. – Л.: Изд-во ЛИСИ, 1982. – С. 53–60.
13. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. – М.: Стройиздат, 1994. – 227 с.
14. Алехин А.Н., Алехин А.А. Определение параметров нелинейной модели грунта по данным полевых испытаний // Геотехнические проблемы мегаполисов: тр. междунар. конф. по геотехнике. – М., 2010. – С. 1201–1208.
15. Клейн Г.К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании // Сб. тр. МИСИ им. В.В. Куйбышева. – М.: Госстройиздат, 1956. – № 14. – С. 168–180.

References

1. Bernatskij L.N. Prikladnaya geotekhnika [Applied geotechnics]. Moscow, Transzheldorizdat, 1935, 258 p.
2. Bell, J.F. Eksperimentalnye osnovy mehaniki deformiruemykh tverdykh tel [Mechanics of solids]. Moscow, Nauka, 1984, 600 p.
3. Lomize G.M., Kryzhanovskij A.L., Vorontsov E.I. Issledovanie zakonomernostej deformiruемости i prochnosti gruntov pri prostranstvennom napryazhonnom sostoyanii [Investigation of deformability and strength of soils under three-dimensional stress state]. *Trudy k VII Mezhdunarodnomu Kongressu po mehanike gruntov i fundamentostroeniju*. Moscow, Strojizdat, 1969, pp. 32 -41.
4. Kriegel H.J., Wiesner H.H. Problems of stress-strain conditions in subsoil. *Proceedings of VIII-th ICSMFE*, Moscow, 1973, vol. 3, pp.133-141.
5. Botkin A.I. Issledovanie napryazhonnoгo sostojaniya v sypuchikh i svyaznykh gruntakh [Investigation of stress state at cohesionless and cohesive soils]. *Izvestiya NII gidroteyniki*. Moscow, Leningrad, 1939, vol. XXIV, pp. 205-236.
6. Tertsagi K. Teoriya mehaniki gruntov [Theory of soil mechanics]. Moscow, Gosstrojizdat, 1961, 507 p.
7. Alekhin A.N. Nelinyj analiz napryazhonno-deformirovannogo sostoyaniya gruntovykh massivov pri staticheskom nagruzenii [Non-linear analysis of stress-strain state of soil massifs under static loading]. Sverdlovsk, UPI, 1982, 186 p.
8. Tihonov A.N., Arsenin, V.J. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-conditioned problems]. Moscow, Nauka, 1979, 285 p.
9. Lavrentjev M.M., Saveljev L.Ya. Teoriya operatorov i nekorrektnye zadachi [Theory of operators and ill-conditioned problems]. Novosibirsk, Institut matematiki, 2010, 912 p.
10. Hristoforov V.S., Zadvornev G.A. Napryazhonno-deformirovannoe sostoyanie grunta s nelihejnymi harakteristikami pri osesimmetrichnoj ploskoj deformatsii [Stress-strain state of soil with non-linear characteristics at axisymmetric plane strain]. *Osnovaniya, fundamenty i mehanika gruntov*, 1978, no. 4, pp. 19 -21.

11. Alekhin A.N., Orzhehovskij U.R., Mariupoljskij L.G. Issledovanie osobennostej deformirovaniya gruntov pri razlichnykh traektoriyakh ih nagruzheniya dlya razrabotki metodiki trekhsosnyh ispytaniy gruntov [Investigation of features of soil deformation under different trajectories of its loading for the development of a triaxial soil testing technique]. Otchet o NIR no. GR0186011927. Sverdlovsk, UEMIT, 1986, 67 p.

12. Lushnikov V.V., Alekhin A.N. Otsenka dostovernosti opredeleniya modulya deformatsii po dannym ispytaniy gruntov [Analysis of the reliability of definition of modulus of deformation from soil test data]. *Mezhvuzovskij tematicheskij sbornik trudov "Ustrojstvo osnovaniy i fundamentov v slabykh i merzlykh gruntakh*. Leningrad, LISI, 1982, pp. 53-60.

13. Malyshev M.V. Prochnost gruntov i ustojchivost osnovaniy sooruzhenij [Strength of soils and stability of soil bases of the structures]. Moscow, Strojizdat, 1994, 227 p.

14. Alekhin A.N., Alekhin A.A. Opredelenie parametrov nelinejnoj modeli grunta po dannym polevykh ispytaniy [Determination of nonlinear soil model parameters from in-situ test data]. *Trudy Mezhdunarodnoj konferentsii po geotekhnike "Geotekhnicheskie problemy megapolisov"*, Moscow, 2010, pp. 1201 -1208.

15. Klejn G.K. Uchet neodnorodnosti, razryvnosti deformatsij i drugih mehanicheskikh svoystv grunta pri raschete sooruzhenij na sploshnom osnovanii [Consideration of inhomogeneity, discontinuity of deformation and other mechanical properties of soils when calculating structures on continuous base]. *Sbornik trudov MISI*. Moscow, Gosstrojizdat, 1956, no 4, pp. 168-180.