Антипов В.В., Офрихтер В.Г., Пономарев А.Б., Шутова О.А. Численное моделирование динамики фундамента существующего здания от грузового автомобиля // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 8, № 4. – С. 5–14. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.01

Antipov V.V., Ofrikhter V.G., Ponomarev A.B., Shutova O.A. Numerical modelling of the dynamic impact of a cargo vehicle on a building foundation. *Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture*. 2017. Vol. 8, no. 4. Pp. 5-14. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.01

**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
Т. 8, № 4, 2017
PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>

DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.01
УДК 624.131

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФУНДАМЕНТА СУЩЕСТВУЮЩЕГО ЗДАНИЯ ОТ ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ

В.В. Антипов, В.Г. Офрихтер, А.Б. Пономарев, О.А. Шутова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 05 июля 2017
Принята: 21 августа 2017
Опубликована: 15 декабря 2017

Ключевые слова:

многоканальный анализ поверхностных волн (МАПВ), пятно контакта колеса, демпфирование грунта, динамическое воздействие на здание, численное моделирование

АННОТАЦИЯ

Движущийся транспорт является одним из основных источников техногенного вибрационного воздействия на близлежащие здания и сооружения. Исследования такого влияния на основания и фундаменты зданий и сооружений проводятся уже достаточно давно. Однако при попытках учесть воздействие автотранспорта при различных расчетах возникает проблема: в России на данный момент отсутствует нормирование вибрационного воздействия транспорта. В связи с этим изучение его влияния на основания и фундаменты зданий и сооружений является актуальным. При проведении исследований ставилась цель построить адекватную численную модель динамического воздействия одиночного транспортного средства (ТС) на существующее здание на основе данных, полученных оперативными методами многоканального анализа поверхностных волн.

Для проверки адекватности построенной модели результаты численного моделирования сравнивались с данными натурных исследований. В целом результаты оказались достаточно близки к натурным значениям: для грузового ТС расхождения составили не более 14 % для максимальной вертикальной компоненты виброускорения и не более 5 % для максимальной горизонтальной.

Для получения более точных результатов требуются дополнительные исследования для уточнения расчета размеров пятна контакта колеса. Разработанная модель адекватна для проезда одиночного ТС большой массы. Данные, полученные оперативными методами многоканального анализа поверхностных волн, можно эффективно использовать при численном моделировании динамического воздействия на здания от транспортных средств.

© ПНИПУ

© Антипов Вадим Валерьевич – магистрант, e-mail: seekerva@mail.ru.
Офрихтер Вадим Григорьевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: ofrikhter@mail.ru.
Пономарев Андрей Будимирович – доктор технических наук, профессор, e-mail: spstf@pstu.ru.
Шутова Ольга Александровна – старший преподаватель, e-mail: gshperm@mail.ru.

Vadim V. Antipov – Master Student, e-mail: seekerva@mail.ru.
Vadim G. Ofrikhter – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: ofrikhter@mail.ru.
Andrei B. Ponomarev – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: spstf@pstu.ru.
Ol'ga A. Shutova – Senior Lecturer, e-mail: gshperm@mail.ru.

NUMERICAL MODELLING OF THE DYNAMIC IMPACT OF A CARGO VEHICLE ON A BUILDING FOUNDATION

V.V. Antipov, V.G. Ofrikhter, A.B. Ponomarev, O.A. Shutova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 05 July 2017
Accepted: 21 August 2017
Published: 15 December 2017

Keywords:

multichannel analysis of surface waves (MASW), wheel contact patch, damping of soil, dynamic impact on building, numerical modelling

ABSTRACT

Moving transport is one of the main sources of technogenic vibration impact on nearby buildings and structures. But there is a problem when trying to take into account the impact of vehicles in various calculations. It is lack of rationing of the vibration impact of motor transport in Russia presently. Therefore, the study of the impact of vehicles on the foundations of buildings and structures is relevant. During the research, the goal was to build an adequate numerical model of the dynamic impact of a single vehicle on an existing building using data obtained by express methods of multichannel analysis of surface waves.

The results of numerical modelling are compared with the data of field studies to verify the adequacy of the numerical model. In general, the results are close to full-scale values: the arrangement is not more than 14 % for the maximum vertical component of the acceleration and not more than 5 % for the maximum horizontal component for a cargo vehicle and a bus.

Additional studies of calculation of the dimensions of wheel contact spot are required to obtain more accurate results of numerical modelling. The developed model is adequate for a single vehicle of large mass.

© PNRPU

Введение

Движущийся транспорт является одним из основных источников техногенного вибрационного воздействия на близлежащие здания и сооружения. Однако при попытках учесть его влияние при различных расчетах возникает проблема: в России на данный момент отсутствует нормирование вибрационного воздействия транспорта, тогда как для влияния динамического оборудования (СП 26.13330.2012) и забивки свай (ВСН 490-87) такие нормы существуют. Воздействие рельсового транспорта рассмотрено в СП 23-105-2004 и упоминается в ГОСТ Р 52892-2007. Таким образом, изучение воздействия автотранспорта на основания и фундаменты зданий и сооружений является актуальным.

Исследования вибрационного воздействия транспорта на основания и фундаменты зданий проводят как путем натурных экспериментов, так и с помощью численного моделирования. Численное моделирование, очевидно, можно провести с гораздо меньшими затратами денежных средств и трудоемкости, поэтому необходимо построить корректную модель для дальнейшего использования при оценке вибраций здания, создаваемых транспортными средствами.

1. Объект исследования

В качестве существующего здания для модели рассмотрен учебный корпус строительного факультета Пермского национального исследовательского политехнического университета по адресу: г. Пермь, ул. Куйбышева, д. 109 (пересечение ул. Куйбышева и ул. Чкалова). Это четырехэтажное общественное здание с подвалом, с размерами в плане 30×52,1 м и высотой до уровня кровли 21,5 м. Здание расположено перпендикулярно проезжей части на расстоянии 18,4 м от края проезжей части (25,9 м от центра дороги) (рис. 1).

Для оценки адекватности построенной модели были использованы данные натурного эксперимента по определению вертикальных и горизонтальных компонент виброускорения колебаний от проезда одиночного грузового ТС (25 т). Датчик устанавливался с наружной

стороны стены на фундамент в уровне земли на металлический уголок. Измерения проводились при вертикальном и горизонтальном расположении датчика. Производилась фиксация прохода одиночного транспортного средства по ближайшей к зданию полосе (20,9 м от края здания до центра полосы). По другим полосам транспорт отсутствовал. Замеры производились при приближении, проходе ТС мимо датчика и удалении ТС от точки замера.

Рис. 1. Схема исследуемой площадки (размеры в метрах)
Fig. 1. Scheme of studied area (dimensions in meters)

2. Расчетная схема проезжающего автомобиля

В качестве расчетной схемы ТС была принята схема приложения нагрузки от колес грузового автомобиля по типу нагрузки AK для двуосной тележки в соответствии с ГОСТ Р 52748–2007, которая используется для расчета дорожной одежды, земляного полотна, подпорных стен и мостовых сооружений. При расчетах дорожного и земляного полотна равномерно распределенная нагрузка не учитывается, а прикладываются только точечные нагрузки от колес (п. 5.1, 5.2 ГОСТ Р 52748–2007) без учета размеров пятна контакта колес с дорожным полотном. Принятая расчетная схема показана на рис. 2.

Рис. 2. Принятая расчетная схема нагрузки, размеры в метрах:
 b – ширина пятна контакта колеса; c – ширина колеи нагрузки
Fig. 2. Applied design scheme of loading system, dimensions in meters:
 b – width of wheel contact patch; c – width of load gauge

В принятой схеме рассматривается задняя ось грузового автомобиля (двуосный массой 25 т) из четырех колес с нагрузкой на ось 125 кН (62,5 кН на спаренный баллон). При такой схеме в отсутствие других источников будут возникать детерминированные колебания грунтовой среды. Нагрузка будет иметь треугольный импульсный характер. Для определения времени действия нагрузки необходимо определить длину пятна контакта колеса с дорожным полотном. Реальная площадь контакта колеса имеет форму эллипса и учитывает рисунок протектора в соответствии с определением по ГОСТ 17697–72. Форма эллипса площади контакта при качении колеса близка к прямоугольной, и в расчетных моделях обычно принимают допущение, что пятно прямоугольное [1]. Также для определения его размеров допускается принимать равновеликий по площади гибкий круговой штамп диаметром D , передающий равномерно распределенную нагрузку величиной p (п. 3.18, ОДН 218.046–01). Величину p принимают равной давлению воздуха в шинах, обычно 0,6 МПа. Диаметр расчетного отпечатка шины D определяют из зависимости

$$D = \sqrt{\frac{40Q_{\text{расч}}}{\pi p}},$$

где $Q_{\text{расч}}$ – расчетная величина нагрузки, передаваемой колесом на поверхность покрытия, кН; p – давление воздуха в шине, МПа.

Примем ширину пятна по расчетной схеме на рис. 3, $b = 30$ см. Тогда, не учитывая рисунок протектора шины, считаем, что площадь круглого отпечатка равна площади эллиптического пятна контакта. Расчет параметров для определения времени действия нагрузки представлен в табл. 1.

Таблица 1

Расчет параметров нагрузки от оси ТС

Table 1

Calculation of loading from single wheel axle

№ п/п	Параметр	Значение
1	Масса ТС, т	25
2	Нагрузка на полуось Q , кН	62,5
3	Расчетная нагрузка на колесо $Q_{\text{расч}}$, кН	31,25
4	Давление воздуха в шине p , МПа	0,6
5	Ширина пятна контакта b , см	30
6	Длина пятна контакта a , см	22,1
7	Скорость движения ТС $v_{\text{сп}}$, м/с	11
8	Время действия нагрузки в точке t , с	0,020

3. Расчетная схема фундамента

По результатам сбора нагрузок от конструкций здания нагрузка по подошве фундаментной подушки крайнего фундамента здания составила 160 кН/м² без учета веса фундамента. Фундамент – сборный ленточный из фундаментных блоков ФБС 6-5-6 и фундаментной подушки ФЛ 16-24-1. Ширина подушки – 1,6 м. Толщина блоков – 0,5 м, высота – 3 м. Глубина заложения фундамента принята 3 м. Плитные элементы в уровне пола подвала и первого этажа имитируют стены здания в продольном направлении толщиной 0,5 м и высотой 3 м для учета жесткости здания в данной плоскости. Расчетная схема фундамента представлена на рис. 3.

Рис. 3. Расчетная схема фундамента
корпуса строительного факультета (размеры в метрах)
Fig. 3. Applied foundation scheme of building of civil engineering faculty

4. Параметры грунтовой среды

Инженерно-геологические условия площадки представлены суглинком коричневым, легким, песчаным, от твердого до текучепластичного (с примесью песка серого, мелкого, пылеватого, средней плотности, средней степени водонасыщения и строительного мусора) до глубины около 5 м и глиной серовато-коричневой, легкой, пылеватой, от полутвердой в кровле до мягкопластичной. Физико-механические характеристики грунта основания были приняты по данным отчета об инженерно-геологических изысканиях на исследуемой площадке. Необходимые данные [2] для проведения динамического расчета были получены экспресс-методами многоканального анализа поверхностных волн (МАПВ) [3–8]. Результаты проведения МАПВ опубликованы в работе [9]. В результате сравнительного анализа результатов МАПВ [9] в численном моделировании была принята глубина расчета для двух слоев до 13 м.

Кроме того, для учета поглощающих свойств грунта использовался коэффициент демпфирования, определяемый по методике, описанной в работах [10, формула (6.54); 11]. По данной методике определены следующие коэффициенты демпфирования: суглинок – 0,282, глина – 0,248. В Plaxis 2D коэффициент демпфирования в явном виде не задается, а используются коэффициенты рэлеевского демпфирования α и β в уравнении вида [12]

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

где $[C]$, $[M]$, $[K]$ – матрицы демпфирования, массы и жесткости соответственно; α – коэффициент пропорциональности массы по Рэлею; β – коэффициент пропорциональности жесткости по Рэлею.

Для определения требуемых коэффициентов использовалась зависимость [13]

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\xi_i,$$

где ω_i – собственная частота грунтового слоя i -й моды зависимости коэффициента демпфирования от частоты, рад/с,

$$\omega_i = \frac{\pi\bar{V}_s}{2H}(1+2i), \quad i=0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где $\bar{V}_s$ – средняя скорость поперечных волн грунтовой толщи на глубине H , м/с; H – глубина нижней границы рассматриваемого слоя, м [10, формула (7.14)]; ξ_i – коэффициент демпфирования i -й моды.

Была составлена система из двух уравнений для фундаментальной и первой мод каждого слоя, и находились искомые коэффициенты. Результаты расчета представлены в табл. 2.

Таблица 2

Определение коэффициентов рэлеевского демпфирования

Table 2

Calculation of Rayleigh damping coefficients

Слой	V_s , м/с	H , м	ξ	ω_0 , рад/с	ω_1 , рад/с	α	β
1	144,5	5	0,282	45,373	136,119	19,193	0,0031
2	289,9	13	0,248	35,011	105,033	13,024	0,0035

5. Численное моделирование

Моделирование от проезжающего автомобиля осуществлялось в Plaxis 2D v.9. Параметры плитных элементов представлены в табл. 3. Параметры грунтовых условий для задания в Plaxis 2D сведены в табл. 4. Для обоих слоев принята линейно-упругая модель расчета для решения задачи Лэмба при малых деформациях в соответствии с работами [14, 15], тип поведения – дренированный.

Таблица 3

Параметры плитных элементов

Table 3

Parameters of plate elements

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Фундаментные блоки ФБС 6-5-6	Фундаментная подушка ФЛ 16-24-1	Стена
Тип элемента	—	—	Плитный	Плитный	Плитный
Осевая жесткость	EA	кН/м	$1,14 \times 10^7$	$1,5 \times 10^7$	$9,0 \times 10^7$
Изгибная жесткость	EI	кНм ² /м	$2,371 \times 10^5$	$3,125 \times 10^5$	$6,75 \times 10^7$
Коэффициент Пуассона	ν	—	0,15	0,15	0,15
Толщина	d	—	0,5	0,5	3,0
Вес	w	кН/м/м	4	15,4	0

Таблица 4

Параметры материалов грунтовой среды

Table 4

Material parameters of soil mass

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Слой 1	Слой 2
Тип грунта	—	—	Суглинок	Глина
Модель	—	—	Линейно-упругая	Линейно-упругая
Тип поведения	—	—	Дренированный	Дренированный
Удельный вес сухого грунта	γ_{unsat}	кН/м ³	18,000	20,000
Удельный вес водонасыщенного грунта	γ_{sat}	кН/м ³	19,660	21,170
Модуль Юнга	E	кН/м ²	104 300	480 200
Коэффициент Пуассона	ν	—	0,36	0,4
Скорость поперечной волны	V_s	м/с	144,5	289,9
Скорость продольной волны	V_p	м/с	309,0	710,1
Модуль сдвига	G	кН/м ²	38 350	171 500
Коэффициент пористости	e_{init}	—	0,7	0,5
Демпфирование по Рэлею	α	—	19,193	13,024
То же	β	—	0,0031	0,0035

Граничные условия задавались с помощью стандартных условий закрепления. Для исключения возникновения отраженных волн дополнительно вводились поглощающие границы. Скомпонованная геометрическая модель показана на рис. 4. Сетка конечных элементов принималась мелкая (fine) с уменьшением вокруг плитных элементов и на поверхности в два раза.

Рис. 4. Геометрическая модель в программном комплексе Plaxis 2D

Fig. 4. Geometrical model in Plaxis 2D software

Давление воды не учитывалось, так как отсутствовали данные по уровню грунтовых вод. Начальные напряжения назначались с использованием процедуры $K0$. Коэффициент бокового давления $K0$ определялся по формуле (9.2) СП 22.13330.2011 для каждого из слоев: $K0_1 = 0,563$, $K0_2 = 0,667$. Расчетная точка была принята на обресе ближайшей к проезжей части фундамента: $A(0; 0)$. Продолжительность динамической фазы расчета составляла 0,5 с.

Полученные результаты численного моделирования сопоставлялись с результатами натурного эксперимента путем сравнения максимальных значений горизонтальных и вертикальных компонент виброускорений. Сравнение результатов представлено в табл. 5. Результаты численного моделирования в виде графиков виброускорений приведены на рис. 5.

Таблица 5

Результаты моделирования воздействия от одной оси одиночного ТС

Table 5

The results of modeling of impact from a single wheel axle of a single vehicle

Тип автомобиля, масса, т	Натурный эксперимент		Численное моделирование	
	a_y , м/с^2	a_x , м/с^2	a_y , м/с^2	a_x , м/с^2
Грузовое ТС, 25 т	0,04403	0,02166	0,038	0,020

а

б

Рис. 5. Графики зависимости вертикального (а) и горизонтального (б) ускорения от времени на обресе ближайшего к проезжей части фундамента для грузового ТС

Fig. 5. Graphics of vertical (a) and horizontal (b) acceleration versus time of the nearest to road part of foundation for cargo vehicle

Выводы

1. Результаты численного моделирования в целом оказались достаточно близки к значениям натурного эксперимента: расхождения составили не более 13 % для вертикальной компоненты виброускорения и не более 5 % для горизонтальной. Разработанная модель адекватна для проезда одиночного ТС большой массы.

2. Результаты многоканального анализа поверхностных волн можно эффективно применять для получения корректных результатов при численном моделировании динамического воздействия от одиночного транспортного средства на основания и фундаменты существующих зданий и сооружений.

Библиографический список

1. Абузов В.И., Балабина Т.А., Чепурной С.И. Общие вопросы взаимодействия эластичного колеса с жесткой опорной поверхностью // Известия Моск. гос. техн. ун-та. – 2012. – № 2 (14). – С. 392–397.

2. Применение неразрушающих методов определения механических характеристик грунта при численном моделировании динамических воздействий на существующее здание / О.А. Шутова [и др.] // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. – 2017. – № 1 (32). – С. 74–79.

3. Антипов В.В., Офрихтер В.Г. Современные неразрушающие методы изучения инженерно-геологического разреза // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2016. – Т. 7, № 2. – С. 37–49. DOI: <http://dx.doi.org/10.15593/2224-9826/2016.2.04>

4. Антипов В.В., Офрихтер В.Г. Совершенствование методов волнового анализа грунтовой толщи // Современные технологии в строительстве. Теория и практика. – 2016. – Т. 1. – С. 109–119.

5. Park C.B., Miller R.D., Xia J. Multichannel analysis of surface waves // Geophysics. – 1999. – Vol. 64, № 3. – P. 800–808.

6. Park C.B., Carnevale M. Optimum MASW survey – revisit after a decade of use // GeoFlorida. – 2010. – P. 1303–1312.

7. Combined use of active and passive surface waves / C.B. Park, R.D. Miller, N. Ryden, J. Xia, J. Ivanov // Journal of Environmental and Engineering Geophysics. – 2005. – Vol. 10, iss. 3. – P. 323–334.

8. Ofrikhter V.G., Ofrikhter I.V. Investigation of municipal solid waste massif by method of multichannel analysis of surface waves // Japanese Geotechnical Society Special Publication. – 2015. – Vol. 2, № 57. – P. 1956–1959.

9. Антипов В.В., Офрихтер В.Г., Шутова О.А. Исследование верхней части разреза грунтовой толщи экспресс-методами волнового анализа // Вестник Моск. гос. строит. ун-та. – 2016. – № 12. – С. 44–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2016.12.44-60>

10. Kramer S.L. Geotechnical earthquake engineering. – Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996. – 653 p.

11. Шутова О.А., Пономарев А.Б. Анализ возможности применения программного комплекса GeoStudio QUAKE/W для моделирования техногенной вибрации // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2016. – № 3. – С. 59–64.

12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Vol. 1. Its basis and fundamentals. – 7th ed. – Mc Graw-Hill, U.K, 2013. – 714 p.
13. Алешин А.С., Малышев Р.В. Использование метода конечных элементов в задачах инженерной сейсмологии // Численные методы расчетов в практической геотехнике: сб. ст. междунар. науч.-техн. конф. / С.-Петерб. гос. арх.-строит. ун-т. – СПб., 2012. – С. 266–273.
14. Kausel E. Lamb's problem at its simplest // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2013. – Vol. 469 (2149). DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2012.0462>
15. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1904. – Series A, vol. 203. – P. 1–42.

References

1. Abuzov V. I., Balabina T. A., Chepurnoi S. I. General questions of interaction of an elastic wheel with rigid supporting surface. *Izvestiia MGTU*, 2012, no. 2 (14), pp. 392–397.
2. Shutova O.A., Ponomarev A.B., Antipov V.V., Ofrikhter V.G. Primenenie nerazrushaiushchikh metodov opredeleniia mekhanicheskikh kharakteristik grunta pri chislennom modelirovanii dinamicheskikh vozddeistvii na sushchestvuiushchee zdanie [Application of nondestructive methods of determination of mechanical characteristics of the soils for numerical modelling of dynamic impact on existing building]. *Akademicheskii vestnik UralNIiproekt RAASN*, 2017 no.1 (32), pp. 74–79.
3. Antipov V.V., Ofrikhter V.G. Modern nondestructive method of researching of geological-engineering section. *Vestnik Permskogo national'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2016, vol. 7, no. 2, pp. 37–49. DOI: <http://dx.doi.org/10.15593/2224-9826/2016.2.04>
4. Antipov V.V., Ofrikhter V.G. Advances of the methods of wave analysis of soil stratification. *Sovremennye tekhnologii v stroitel'stve. Teoriia i praktika*, 2016, vol. 1, pp. 109–119.
5. Park C.B., Miller R.D., Xia J. Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, 1999, vol. 64, No. 3 pp. 800–808.
6. Park C.B., Carnevale M. Optimum MASW survey – revisit after a decade of use. *GeoFlorida*, 2010, pp. 1303–1312.
7. Park C.B., Miller R.D., Ryden N., Xia J., Ivanov J. Combined use of active and passive surface waves. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, 2005, vol. 10, Iss. 3, pp. 323–334.
8. Ofrikhter V.G., Ofrikhter I.V. Investigation of municipal solid waste massif by method of multichannel analysis of surface waves. *Japanese Geotechnical Society Special Publication*, 2015, vol. 2, No. 57, pp. 1956–1959.
9. Antipov V.V., Ofrikhter V.G., Shutova O.A. Investigation of upper section of soil stratification by rapid methods of wave analysis. *Vestnik MGSU*, 2016, no. 12, pp. 44–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2016.12.44-60>
10. Kramer S.L. Geotechnical Earthquake Engineering: Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996, 653 p.
11. Shutova O.A., Ponomarev A.B. The Analysis of Application Possibility of Program Geostudio Quake/W Complex for Modelling of Technogenic Vibration. *Seismostoitoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii*, 2016, no. 3, pp. 59–64.

12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method (7th Edition), vol. 1, Its Basis and Fundamentals. Mc Graw-Hill, U.K., 2013, 714 p.
13. Aleshin A.S., Malyshev R.V. Ispol'zovanie metoda konechnykh elementov v zadachakh inzhknernoi seismologii [Using of the finite element method in engineering seismology]. *Chislennyye metody raschetov v prakticheskoi geotekhnike: sbornik stati mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii, SPbGASU*, Saint Petersburg, 2012, pp. 266-273.
14. Kausel E. Lamb's problem at its simplest. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, vol. 469 (2149). DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2012.0462>.
15. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 203, 1904, pp. 1-42.