Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. О напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости при нелинейном перемещении участка ее границы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 8, № 2. – С. 75–86. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.2.07

Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. On the stress-strain state of an elastic half-plane with the nonlinear movement of the plot boundaries. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Construction and Architecture*. 2017. Vol. 8, no. 2. Pp. 75-86. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.2.07

**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
Т. 8, № 2, 2017
PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>

DOI: 10.15593/2224-9826/2017.2.07

УДК 624.131.522

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ УЧАСТКА ЕЕ ГРАНИЦЫ

А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.Н. Ушаков

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 10 ноября 2016
Принята: 15 декабря 2016
Опубликована: 30 июня 2017

Ключевые слова:

методы теории функций комплексного переменного, напряжения, деформации, коэффициент бокового давления грунта, изотропная упругая полуплоскость, грунт

АННОТАЦИЯ

Приведено замкнутое аналитическое решение задачи линейной теории упругости о распределении напряжений и деформаций в однородном изотропном грунтовом массиве при таком перемещении участка ее границы, когда линия прогиба может быть аппроксимирована полиномом второй степени. Решение получено на основе применения методов теории функций комплексного переменного, разработанных Г.В. Колосовым и Н.И. Мусхелишвили. В формулы, определяющие численные значения компонентов напряжения и деформации, в явном виде входит величина коэффициента бокового давления грунта, что является существенно важным при рассмотрении напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов, сложенных различными типами грунтов. Картины изолиний напряжения и деформации могут быть построены в любой стандартной математической компьютерной среде. В работе приведены соответствующие иллюстрации. Показано, что частными случаями полученного решения являются решения задач о равномерном и изменяющемся по линейному закону перемещениях участка границы полуплоскости. При вертикальном перемещении участка границы полуплоскости нормальные напряжения и деформации принимают одинаковые значения в точках полуплоскости, симметричных относительно оси симметрии нелинейного перемещения; при горизонтальном перемещении значения нормальных напряжений и деформаций противоположны друг другу по знаку. Касательные напряжения и деформации при вертикальном и горизонтальном перемещениях принимают значения, противоположные по знаку нормальным напряжениям и деформациям.

© ПНИПУ

Богомолов Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.
Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, профессор, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.
Ушаков Андрей Николаевич – докторант, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Aleksandr N. Bogomolov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.
Oksana A. Bogomolova – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.
Andrei N. Ushakov – Postdoctoral Student, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

ON THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC HALF-PLANE WITH THE NONLINEAR MOVEMENT OF THE PLOT BOUNDARIES

A.N. Bogomolov, O.A. Bogomolova, A.N. Ushakov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 10 November 2016
Accepted: 15 December 2016
Published: 30 June 2017

Keywords:

methods of the theory of complex variable functions, stresses, deformations, coefficient of the lateral soil pressure, isotropic elastic half-plane, soil

ABSTRACT

A closed analytical solution of the linear elasticity problem on the distribution of stresses and strains in a homogeneous isotropic ground massif is presented with such a displacement of its boundary section when the deflection line can be approximated by a polynomial of the second order. The solution was obtained on the basis of the theory of a complex variable functions, developed by G.V. Kolosov and N.I. Muskhelishvili. The value of the lateral soil pressure coefficient is explicitly included in the formulas that determine the numerical values of stress and strain components; and it is essential when considering the stress-strain state of the base of foundations composed of different types of soils. The pictures of isolines of stress and strain can be obtained in any standard mathematical software. The corresponding figures are given in the paper. It is shown that the particular cases of the solution obtained are the solutions of problems on uniform and linearly changing displacements of a part of the half-plane boundary. At the vertical displacement of the half-plane boundary part, the normal stresses and deformations assume the same values at the half-plane points which are symmetric with respect to the symmetry axis of the general nonlinear displacement; when moving horizontally, the values of normal stresses and strains have opposite signs. Tangential stresses and strains at vertical and horizontal displacements take the values which are opposite to the sign of the normal stresses.

© PNRPU

Под действием различных нагрузок все возводимые сооружения претерпевают большие или меньшие вертикальные смещения (осадки), а также горизонтальные сдвиги, учет которых необходим при расчете оснований фундаментов. Если величины осадок не превосходят некоторого наперед заданного значения, то считается, что долговременная безопасная эксплуатация сооружения обеспечена. В связи с этим расчет оснований сооружений по деформациям (по второй группе предельных состояний) является одной из наиболее важных задач механики грунтов.

Многочисленными экспериментами установлено [1], что деформации грунтов под фундаментами развиваются преимущественно в верхней зоне основания, поэтому для анализа напряженно-деформированного состояния оснований сооружений можно применять расчетные модели, основанные на решениях теории упругости [2–5]. Наибольшее распространение получила модель линейно деформируемой среды, позволяющая использовать для анализа напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов методы линейной теории упругости [6–10].

В том случае, когда известна форма перемещения участка границы полуплоскости, для отыскания напряженно-деформированного состояния грунтового массива можно воспользоваться одним из наиболее эффективных методов решения задач плоской теории упругости – методом комплексных потенциалов, разработанным Г.В. Колосовым [11] и существенно дополненным его учеником Н.И. Мусхелишвили [12].

Методом комплексных потенциалов был решен ряд актуальных задач механики деформируемого твердого тела [13–16], а также горной механики и механики грунтов [17–20].

В работе [21] приведено решение задачи о распределении напряжений в грунтовом массиве при равномерном перемещении участка границы упругой полуплоскости, которое было использовано для вычисления полной осадки ленточного фундамента с учетом дополнительных напряжений, возникающих в грунтовом массиве за счет смещения нагруженного участка границы.

Однако на практике часто наблюдаются неравномерные перемещения, приводящие, например, к возникновению кренов сооружений. В работах [22, 23] были рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии грунтового массива при линейном перемещении участка его границы, моделирующего этот вид перемещения сооружений.

Возможен и другой характер неравномерного перемещения, связанный с формой прогиба и выгиба сооружений, а также с формой мульды оседания земной поверхности под влиянием подземной выработки (рис. 1). Граничную линию такого перемещения, на наш взгляд, в некоторых случаях можно аппроксимировать квадратичной функцией.

Рис. 1. Ширина зоны влияния строительства коммуникационного тоннеля [24]

Fig. 1. The width of the zone of influence of construction communication tunnel [24]

В данной статье в рамках модели линейно деформируемой среды рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии грунтового массива при нелинейном перемещении (законе нелинейного перемещения) участка его границы. Решение задачи проведено методом комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили.

Граничное условие для второй основной задачи плоской теории упругости в случае полуплоскости имеет вид [12, с. 353]

$$\Re \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu (g_1(t) + i g_2(t))$$

или

$$\Re \overline{\varphi(t)} - t \varphi'(t) - \psi(t) = 2\mu (g_1(t) - i g_2(t)),$$

где $\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ – граничные значения функций $\varphi(z), \psi(z), \varphi'(z), \psi'(z)$, голоморфных в нижней полуплоскости; μ и $\Re$ – упругие постоянные, причем $\Re = 3 - 4\nu$, где ν – коэффициент Пуассона, который связан с коэффициентом бокового давления ξ_0 соотношением $\xi_0 = \nu(1 - \nu)^{-1}$.

Решение поставленной задачи дают формулы для функций напряжения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, полученные Н.И. Мусхелишвили [12, с. 354, 355], при этом

$$\varphi'(z) = -\frac{\mu}{\pi \Re i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(t) + i g_2(t)}{(t - z)^2} dt, \quad (1)$$

$$\psi'(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(t) - i g_2(t)}{(t - z)^2} dt - \varphi'(z) - z \varphi''(z). \quad (2)$$

Пусть отрезок $-a \leq t \leq a$ оси Ox подвержен нелинейному перемещению (закону нелинейного перемещения):

$$g(t) = g_1(t) + ig_2(t) = (\beta - i\gamma)(pt^2 + rt + q), \quad (3)$$

где β, γ, p, r, q – заданные действительные числа, причем $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ и $g(t) = 0$ при остальных значениях t .

Полагая, что в формуле (3) $p = 1, r = q = 0$, рассмотрим случай нелинейного перемещения вида

$$g(t) = g_1(t) + ig_2(t) = (\beta - i\gamma)t^2. \quad (4)$$

Определим напряженное состояние в нижней полуплоскости.

Подставляя выражение (4) в формулы (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -\frac{\mu(\beta - i\gamma)}{\pi\aleph i} \int_{-a}^a \frac{t^2}{(t-z)^2} dt = -\frac{\mu(\beta - i\gamma)}{\pi\aleph i} \left(2a + 2z \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az^2}{z^2 - a^2} \right), \\ \varphi''(z) &= -\frac{\mu(\beta - i\gamma)}{\pi\aleph i} \left(2 \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{8az}{z^2 - a^2} - \frac{4az^3}{(z^2 - a^2)^2} \right), \\ \psi'(z) &= \frac{\mu(\beta + i\gamma)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{t^2}{(t-z)^2} dt - \varphi'(z) - z\varphi''(z) = \frac{\mu\gamma}{\pi\aleph} (\gamma(\aleph - 1) - i\beta(\aleph + 1)) \times \\ &\times \left(2a + 2z \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az^2}{z^2 - a^2} \right) + \frac{\mu(\beta - i\gamma)z}{\pi\aleph i} \left(2 \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{8az}{z^2 - a^2} - \frac{4az^3}{(z^2 - a^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Под выражением $\ln \frac{z-a}{z+a}$ вслед за работой [12, с. 352] будем понимать приращение функции $\ln(z-t)$ при непрерывном изменении t от $-a$ до a , т.е.

$$\ln \frac{z-a}{z+a} = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} - i(\theta_1 - \theta_2),$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \rho_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2},$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \arctg \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \arctg \left(\frac{a+x}{|y|} \right).$$

Вычислим компоненты напряжения. Согласно [12, с. 111] имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) = \frac{8\mu\gamma}{\pi\aleph} H_1 - \frac{8\mu\beta}{\pi\aleph} H_2, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) = \frac{4\mu}{\pi\aleph} (\gamma(\aleph - 1) - i\beta(\aleph + 1))(H_1 + iH_2) + \\ &+ \frac{4\mu(\beta - i\gamma)y}{\pi\aleph} \left(2 \ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{8az}{z^2 - a^2} - \frac{4az^3}{(z^2 - a^2)^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$H_1 = 2a + x \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} - y \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a+x}{|y|} \right) \right) +$$

$$+ \frac{a^3(x^2 - y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2},$$

$$H_2 = y \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} - x \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a+x}{|y|} \right) \right) -$$

$$- \frac{2a^3 xy}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}.$$

Тогда получаем

$$\sigma_x = \frac{2\mu\gamma}{\pi\aleph} ((3-\aleph)H_1 - yH_4) - \frac{2\mu\beta}{\pi\aleph} ((3+\aleph)H_2 + yH_3),$$

$$\sigma_y = \frac{2\mu\gamma}{\pi\aleph} ((1+\aleph)H_1 + yH_4) - \frac{2\mu\beta}{\pi\aleph} ((1-\aleph)H_2 - yH_3), \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2\mu\gamma}{\pi\aleph} ((1-\aleph)H_2 + yH_3) - \frac{2\mu\beta}{\pi\aleph} ((1+\aleph)H_1 - yH_4),$$

где

$$H_3 = 2 \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{8ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2} -$$

$$- 4a \left(\frac{(x^3 - 3xy^2)((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2 y^2) + 4xy^2(3x^2 - y^2)(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)^2} \right),$$

$$H_4 = -2 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a+x}{|y|} \right) \right) - \frac{8ay(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2} -$$

$$- 4a \left(\frac{(3x^2 y - y^3)((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2 y^2) - 4x^2 y(x^2 - 3y^2)(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2)^2} \right).$$

Заметим, что при неограниченном увеличении x и y значения горизонтального, вертикального и касательного напряжений стремятся к нулю.

Формулы (5) дают решение поставленной задачи для случая нелинейного перемещения вида (4).

Для определения компонентов деформации воспользуемся известными формулами [12, с. 95]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} (\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2\mu} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}.$$

Тогда с учетом соотношений (7) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{2\beta}{\pi} H_2 - \frac{y}{\pi\aleph} (\gamma H_4 + \beta H_3), \\ \varepsilon_y &= \frac{4\gamma}{\pi\aleph} (1-2\nu) H_1 + \frac{2\beta}{\pi\aleph} H_2 + \frac{y}{\pi\aleph} (\gamma H_4 + \beta H_3), \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\gamma}{\pi\aleph} (1-\aleph) H_2 - \frac{\beta}{\pi\aleph} (1+\aleph) H_1 - \frac{y}{\pi\aleph} (\gamma H_3 - \beta H_4).\end{aligned}$$

Далее, полагая, что в формуле (3) $p = r = 0, q = 1$, получим компоненты напряжения для равномерного перемещения рассматриваемого участка границы. Следуя работе [18], имеем

$$\sigma_x^p = \sigma_x^\gamma + \sigma_x^\beta, \quad \sigma_y^p = \sigma_y^\gamma + \sigma_y^\beta, \quad \tau_{xy}^p = \tau_{xy}^\gamma + \tau_{xy}^\beta,$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x^\gamma &= \frac{2\mu\gamma a(3-\aleph)(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)} - \\ &- \frac{4\mu\gamma a \left(\frac{8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2) - 2y^2((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph}, \\ \sigma_y^\gamma &= \frac{2\mu\gamma a(\aleph+1)(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)} + \\ &+ \frac{4\mu\gamma a \left(\frac{8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2) - 2y^2((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph}, \\ \tau_{xy}^\gamma &= \frac{4\mu\gamma a \left(\frac{2xy((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2) + 8xy^3(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph} - \\ &- \frac{4\mu\gamma a(\aleph-1)xy}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)}; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x^\beta &= \frac{4\mu a\beta xy(3+\aleph)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)} + \\ &+ \frac{8\mu a\beta xy \left(\frac{4y^2(x^2 - y^2 - a^2) + ((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph}, \\ \sigma_y^\beta &= \frac{4\mu a\beta xy(1-\aleph)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)} - \\ &- \frac{8\mu a\beta xy \left(\frac{4y^2(x^2 - y^2 - a^2) + ((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph}, \\ \tau_{xy}^\beta &= \frac{4\mu a\beta \left(\frac{8x^2y^2((x^2 - y^2 - a^2) - 2y^2((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2))}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right)}{\pi\aleph} - \\ &- \frac{2\mu a\beta(\aleph+1)(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Положим: теперь в формуле (3) $p = q = 0, r = 1$. Тогда, следуя работам [22, 23], приведем соотношения для компонентов напряжения в случае линейного перемещения участка $-a \leq t \leq a$ границы полуплоскости. Имеем

$$\sigma_x^{\Pi} = \sigma_x^{\gamma} + \sigma_x^{\beta}, \quad \sigma_y^{\Pi} = \sigma_y^{\gamma} + \sigma_y^{\beta}, \quad \tau_{xy}^{\Pi} = \tau_{xy}^{\gamma} + \tau_{xy}^{\beta},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\gamma} &= \frac{\mu\gamma}{\pi} \frac{3-\aleph}{\aleph} \left(\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) - \\ &- \frac{32\mu\gamma a^3xy^2(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2}, \\ \sigma_y^{\gamma} &= \frac{\mu\gamma}{\pi} \frac{1+\aleph}{\aleph} \left(\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) + \\ &+ \frac{32\mu\gamma a^3xy^2(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{\gamma} &= -\frac{\mu\gamma}{\pi} \frac{\aleph-1}{\aleph} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+a}{|y|} \right) \right) + \frac{2ay(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} - \\ &- \frac{4\mu\gamma ya}{\pi\aleph} \left(\frac{x^2 - y^2 - a^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(y^2 - x^2 - a^2)((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2) - 8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\beta} &= \frac{\mu\beta}{\pi} \frac{\aleph+3}{\aleph} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+a}{|y|} \right) + \frac{2ay(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) - \\ &- \frac{4\mu\beta ya}{\pi\aleph} \left(\frac{x^2 - y^2 - a^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(y^2 - x^2 - a^2)((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2) - 8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{\beta} &= \frac{\mu\beta}{\pi} \frac{1-\aleph}{\aleph} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+a}{|y|} \right) + \frac{2ay(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) + \\ &+ \frac{4\mu\beta ya}{\pi\aleph} \left(\frac{x^2 - y^2 - a^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(y^2 - x^2 - a^2)((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2) - 8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{\beta} &= -\frac{\mu\beta}{\pi} \frac{\aleph+1}{\aleph} \left(\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) + \\ &+ \frac{32\mu\beta a^3xy^2(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi\aleph((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2}. \end{aligned}$$

Умножая правые части формул (5) на p , (7) и (8) на q , а (9) и (10) на r , сложением соответствующих выражений для компонентов напряжения получаем решение поставленной задачи для нелинейного перемещения (3).

Выражения для компонентов деформации получаем по формулам (6).

Полагая, что в формуле (3) $p = q = 1$, $r = 0$, графически проиллюстрируем решение поставленной задачи для случая симметричного относительно оси ординат нелинейного перемещения вида

$$g(t) = g_1(t) + ig_2(t) = (\beta - i\gamma)(t^2 + 1) \quad (11)$$

при $a = 10$ и $\nu = 0,42$ (глинистый грунт).

На рис. 2–4 приведены картины изолиний напряжения, построенные на основании формул (5), (7) и (8).

Рис. 2. Изолинии горизонтального напряжения: a – при $\gamma = 1$, $\beta = 0$;

b – при $\gamma = 0$, $\beta = 1$; v – при $\gamma = 1$, $\beta = 1$

Fig. 2. Isolines of the horizontal stress under: a – $\gamma = 1$, $\beta = 0$;

b – $\gamma = 0$, $\beta = 1$; c – $\gamma = 1$, $\beta = 1$

Рис. 3. Изолинии вертикального напряжения: a – при $\gamma = 1$, $\beta = 0$;

b – при $\gamma = 0$, $\beta = 1$; v – при $\gamma = 1$, $\beta = 1$

Fig. 3. Isolines of vertical stress under: a – $\gamma = 1$, $\beta = 0$;

b – $\gamma = 0$, $\beta = 1$; c – $\gamma = 1$, $\beta = 1$

Рис. 4. Изолинии касательного напряжения: *a* – при $\gamma=1$, $\beta=0$;
б – при $\gamma=0$, $\beta=1$; *в* – при $\gamma=1$, $\beta=1$

Fig. 4. Isolines of shear stress under: *a* – $\gamma=1$, $\beta=0$;
b – $\gamma=0$, $\beta=1$; *c* – $\gamma=1$, $\beta=1$

На рис. 5–7 приведены картины изолиний деформации для перемещения вида (11).

Рис. 5. Изолинии горизонтальной деформации: *a* – при $\gamma=1$, $\beta=0$;
б – при $\gamma=0$, $\beta=1$; *в* – при $\gamma=1$, $\beta=1$

Fig. 5. Isolines of horizontal deformation under: *a* – $\gamma=1$, $\beta=0$;
b – $\gamma=0$, $\beta=1$; *c* – $\gamma=1$, $\beta=1$

Рис. 6. Изолинии вертикальной деформации: *a* – при $\gamma=1$, $\beta=0$;
б – при $\gamma=0$, $\beta=1$; *в* – при $\gamma=1$, $\beta=1$

Fig. 6. Isolines of vertical deformation under: *a* – $\gamma=1$, $\beta=0$;
b – $\gamma=0$, $\beta=1$; *c* – $\gamma=1$, $\beta=1$

Рис. 7. Изолинии касательной деформации: *a* – при $\gamma=1$, $\beta=0$;
б – при $\gamma=0$, $\beta=1$; *в* – при $\gamma=1$, $\beta=1$

Fig. 7. Isolines of shear strain under: *a* – $\gamma=1$, $\beta=0$;
b – $\gamma=0$, $\beta=1$; *c* – $\gamma=1$, $\beta=1$

Таким образом, получены в замкнутом виде выражения для компонентов напряжения и компонентов деформации второй основной граничной задачи плоской теории упругости для полуплоскости при таком перемещении участка ее границы, когда линия прогиба может быть аппроксимирована полиномом второй степени.

Частными случаями нелинейного перемещения являются равномерное и линейное перемещения участка границы полуплоскости.

При вертикальном перемещении участка границы полуплоскости нормальные напряжения и деформации принимают одинаковые значения в точках полуплоскости, симметричных относительно оси симметрии нелинейного перемещения; при горизонтальном перемещении значения нормальных напряжений и деформаций противоположны друг другу по знаку. Касательные напряжения и деформации при вертикальном и горизонтальном перемещениях принимают значения, противоположные по знаку нормальным напряжениям и деформациям.

Библиографический список

1. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты. – Л.: Стройиздат, 1988. – 415 с.
2. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
3. Кушнер С.Г. Расчет деформаций оснований зданий и сооружений. – Запорожье: ИПО Запорожье, 2008. – 496 с.
4. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высшая школа, 1985. – 447 с.
5. Флорин В.А. Основы механики грунтов. – Л.: Госстройиздат, 1959. – Т. I. – 360 с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
7. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
8. Murnaghan F.D. Finite deformation of elastic solid. – New York: Wiley, 1951. – 140 p.

9. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1968. – 457 p.
10. Poulos H.G., Davis E.H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. – New York: Wiley, 1974. – 411 p.
11. Колосов Г.В. Применение комплексных переменных диаграмм и теории функций комплексного переменного к теории упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 224 с.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
13. Stevenson A.C. Complex potential in two-dimensional elasticity // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1945. – Vol. 184, № 997. – P. 129–179, 218–229.
14. Jian-ke Lu. Complex variable methods in plane elasticity. – World Scientific, 1995. – 237 p.
15. Akinola A. On complex variable method in finite elasticity // Applied Math. – 2009. – № 1. – P. 1–16. – URL: http://file.scirp.org/pdf/AM20090100001_10535691.pdf (дата обращения: 21.09.2016).
16. Chau K.T. Analytical methods in Geomechanics. – CRC Press, 2012. – 424 p.
17. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 551 с.
18. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики. – Волгоград: Перемена, 2014. – 227 с.
19. Verruijt A. Stress due to gravity in a notched elastic half-plane // Eng. Arch. – 1969. – Vol. 38, № 2. – P. 107–118.
20. Verruijt A. A complex variable solutions for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane // Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 1997. – Vol. 21, № 2. – P. 77–89.
21. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. Задача о вычислении осадок ленточного фундамента // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2011. – № 6. – С. 2–7.
22. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. О напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости при линейном сдвиге участка ее границы // Вестник Волгогр. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. – 2016. – Вып. 46 (65). – С. 17–26.
23. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. Напряженно-деформированное состояние упругой полуплоскости при линейном смещении участка ее границы // Вестник Моск. гос. строит. ун-та. – 2017. – Т. 12, вып. 2 (101). – С. 184–192.
24. Петрухин В.П., Исаев О.Н., Шарафутдинов Р.Ф. Определение зоны влияния строительства коммуникационных тоннелей // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2013. – № 4. – С. 24–27.

References

1. Dalmatov B.I. Mekhanika gruntov, osnovaniia i fundamenty [Soil mechanics, bases and foundations]. Leningrad, Stroiizdat. 1988, 415 p.
2. Tsytoich N.A. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moscow, Gosstroizdat, 1963, 636 p.
3. Kushner S.G. Raschet deformatsii osnovanii zdaniy i sooruzhenii [The calculation of the deformation of the buildings and structures]. Zaporozh'e, OOO «IPO Zaporozh'e», 2008, 496 p.
4. Ivanov P.L. Grunty i osnovaniia gidrotekhnicheskikh sooruzhenii [Soils and foundations of hydraulic structures]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1985, 447 p.
5. Florin V.A. Osnovy mekhaniki gruntov [Fundamentals of soil mechanics]. Vol. I. Leningrad, Gosstroizdat, 1959, 360 p.

6. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1981, 688 p.
7. Khan Kh. Teoriia uprugosti. Osnovy lineinoi teorii i ee primeneniia [The theory of elasticity. The foundations of linear theory and its applications]. Moscow, Mir, 1988, 344 p.
8. Murnaghan F.D. Finite deformation of elastic solid. New York, Wiley, 1951, 140 p.
9. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1968, 457 p.
10. Poulos H.G., Davis E. H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. New York, Wiley, 1974, 411 p.
11. Kolosov G.V. Primenenie kompleksnykh peremennykh diagramm i teorii funktsii kompleksnogo peremennogo k teorii uprugosti [The use of complex variables, graphs and the theory of functions of a complex variable to the theory of elasticity]. Moscow, ONTI, 1935, 224 p.
12. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 708 p.
13. Stevenson A.C. Complex potential in two-dimensional elasticity. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1945, vol.184, no. 997, pp. 129–179, 218–229.
14. Jian-ke Lu Complex variable methods in plane elasticity. World Scientific, 1995, 237 p.
15. Akinola A. On complex variable method in finite elasticity. *Applied Math*, 2009, no 1, pp. 1–16, available at: http://file.scirp.org/pdf/AM20090100001_10535691.pdf. (accessed 12 September 2016).
16. Chau K.T. Analytical Methods in Geomechanics. CRC Press, 2012, 424 p.
17. Ter - Martirosian, Z.G. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moscow, ASV, 2009, 551 p.
18. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki [Methods of the theory of functions of a complex variable in problems of geomechanics]. Volgograd, Peremena, 2014, 227 p.
19. Verruijt, A. Stress due to gravity in a notched elastic half-plane / A. Verruijt // *Eng. Arch.* 1969. Vol. 38, No 2 Pp.107-118.
20. Verruijt A. A complex variable solutions for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1997, vol. 21, no. 2, pp. 77-89.
21. Bogomolov A.N, Ushakov A.N. Zadacha o vychislenii osadok lentochного fundamenta [Problem of calculating the settlement of strip foundation]. *Osnovaniia, fundamenty i mekhanika gruntov*, 2011, no. 6, pp. 2–7.
22. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. O napriazhenno-deformirovannom sostoianii uprugoi poluploskosti pri lineinom sdvige uchastka ee granitsy [Stress strain state of the elastic semi-plane at linear shift of its border]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2016, iss. 46(65), pp. 17–26.
23. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie uprugoi poluploskosti pri lineinom smeshchenii uchastka ee granitsy [Stress-strain state of an elastic half-plane at a linear shift of a part of its boundary]. *Vestnik Moskovskii gosudarstvennyi stroitelnyi universitet*, 2017, vol. 12, iss. 2(101), pp. 184 – 192.
24. Petrukhin V.P., Isaev O.N., Sharafutdinov R.F. Opredelenie zony vliianiia stroitel'stva kommunikatsionnykh tonnelei [Definition of the zone of influence of construction of communication tunnels]. *Osnovaniia, fundamenty i mekhanika gruntov*, no. 4, 2013, pp. 24-27.