УДК 624.131.7

В.В. Лушников¹, А.С. Ярдяков²¹Институт «УралНИИпроект РААСН», Екатеринбург, Россия²Институт ОАО «УралНИИАС», Екатеринбург, Россия

АНАЛИЗ РАСЧЕТОВ ОСАДОК В НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ РАБОТЫ ГРУНТА

Выход за пределы линейных зависимостей «напряжение, давление – деформация, осадка» для грунтов и других материалов (стали, бетона) – актуальная задача науки и практики. Это обусловлено необходимостью повысить экономичность проектных решений, разумеется, не снижая их надежности. Главный вопрос, насколько далеко можно выйти за пределы линейных зависимостей, не опасно ли это? Именно на этой границе перестают действовать линейные законы и начинают действовать новые законы – законы нелинейной механики, прочности и пр.

Ключевые слова: критическое и предельное давление, расчетное сопротивление, линейный и нелинейный участки зависимости «давление – деформация».

V.V. Lushnikov¹, A.S. Jardakov²¹Ural Scientific Research and Design Institute of Russian Academy of Architecture and building Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation²Ural Scientific Research Institute of Architecture and Building, Ekaterinburg, Russian Federation

THE ANALYSIS OF CALCULATIONS SEDIMENT IN THE NONLINEAR STAGE OF THE SOIL

Going beyond the linear dependency «voltage, pressure – deformation, settling» for soils and other materials (steel, concrete) are the burning tasks of science and practice, characterized by the desire to raise the efficiency of design solutions, of course, without reducing the reliability of the solutions. The key question is how far can you go beyond the linear dependencies, if it is not dangerous? It is on this border cease linear laws and operate new laws of nonlinear mechanics, strength etc.

Keywords: critical and maximum pressure, rated resistance, linear and nonlinear plots dependence of the «pressure–deformation».

Введение

Различные методы определения осадок в линейной стадии работы грунта¹ на сегодня можно считать достаточно надежными, хотя они и содержат некоторые противоречия, которые продолжают обсуждаться

¹ СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений (актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*). М., 2011.

и постепенно устраняться [1]. Собственно, это главная задача механики грунтов, имеющая непосредственное практическое приложение при расчетах осадок фундаментов, их неравномерности, кренов.

Выход за пределы линейных зависимостей $S = f(p)$, т.е. в область $p_{кр}(R) < p < p_{пр}$ для грунтов, а также за пределы подобных же зависимостей для других материалов (стали, бетона) – актуальная задача науки и практики, обусловленная необходимостью повысить экономичность проектных решений, разумеется, не снижая их надежности. Главный вопрос, насколько далеко можно выйти за пределы границы $p_{кр} = \sim R$, не опасно ли это? Именно на этой границе перестают действовать законы линейной механики грунтов и начинают действовать новые законы – нелинейной механики, прочности и проч.

Многие специалисты в области нелинейной механики решают эту задачу на основе законов деформационной теории, ассоциированного или неассоциированного законов течения, различных видов условия прочности, используя различные компьютерные программы. Каждый из специалистов получает решение задачи в сколь угодно большом диапазоне давлений, но при этом использует новые (часто известные только этому специалисту) значения исходных параметров той или иной модели грунта, почти никогда не совпадающие со стандартными характеристиками. Пока не решены вопросы учета начального напряженного состояния (введением коэффициентов переуплотнения OCR – КПУ или другим способом), ползучести грунтов, геометрической нелинейности. Известно, например, что учет геометрической нелинейности в уравнениях Коши существенно уменьшает величину предельного давления.

Если же специалист имеет результат конкретного испытания грунта штампом, плитой, свай и др., он, как будет показано далее, всегда может любой результат расчета «подвести под ответ», подбирая нужные параметры, произвольно меняя граничные условия и др. Поэтому теоретическое решение задачи на сегодня можно считать далекой от разрешения и, тем более, – от практического использования.

Но существует и другой путь решения задачи, общий для подобного рода сложных инженерных задач, когда теория не дает устойчивого и надежного результата. Он предполагает интегральное описание искомой зависимости, в частности, $S = f(p)$ – осадки штампа S от давления p , опираясь на самые общие представления о развитии процесса.

Очевидно, что в рассматриваемом случае интегральная зависимость $S = f(p)$ для нелинейной стадии должна плавно или скачкообразно

выйти из линейной стадии, но по мере приближения к предельному давлению $p_{\text{пр}}$ осадки должны возрастать, вплоть до бесконечности (хотя и это утверждение не бесспорно).

Способы определения нелинейных деформаций

Первый способ, авторство которого обычно отдают М.В. Малышеву [2] (есть и более ранние источники), предполагает гиперболическую зависимость $S = f(p)$ в виде

$$S_p = S_R \{1 + [(p_{\text{пр}} - R)(p - R)] / [(R - \sigma_{zg,0})(p_{\text{пр}} - p)]\}, \quad (1)$$

где p – давление ($R < p < p_{\text{пр}}$); $\sigma_{zg,0}$ и R – соответственно давление от веса грунта и расчетное сопротивление; S_R – осадка при давлении $p = R$.

Заметим, что в ряде работ вместо R принимают критическое давление $p_{\text{кр}}$, а вместо S_R – осадку $S_{p_{\text{кр}}}$ при $p = p_{\text{кр}}$.

Второй способ, который не предъявляет каких-либо требований к нахождению предельного давления $p_{\text{пр}}$, содержится в нормативе СП². При давлении, до трех раз превышающем критическое $p_{\text{кр}}$ (или R), осадка S_p согласно СП определяется по формуле

$$S_p = K_p S_{p_{\text{кр}}} \text{ или } S_p = K_p S_R, \quad (2)$$

где K_p – коэффициент, определяемый по рис. 1 в зависимости от соотношения p/R (или $p/p_{\text{кр}}$) и угла внутреннего трения грунта φ (удельное сцепление не учитывается).

Рис. 1. Коэффициент K_p

² СП 23.13330.2011. Основания гидротехнических сооружений (актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85). М., 2011.

Характеристика третьего способа [3] приводится ниже.

Способ основан на решении дифференциального уравнения, отражающего зависимость обратных величин производных осадки $S'(p) = dS/dp$, т.е. котангенсов углов наклона $k(p)$ функции $S = f(p)$ в нелинейной стадии, в виде

$$k(p) = 1 / S'(p) = (ap + b)^\beta. \quad (3)$$

Зависимость в такой форме при $\beta = 1$ была предложена Н.В. Орнатским [4] для определения предельного давления $p_{пр}$ по результатам испытаний грунтов статическими нагрузками. Она отражает зависимость $k(p)$ от давления p в нелинейной стадии $S'(p) = dS/dp$.

Решение дифференциального уравнения (3) в общем случае (при $\beta \neq 1$) имеет вид

$$S_p = 1/[a(1-\beta)](ap+b)^{1-\beta} + S_0, \quad (4)$$

а особому случаю $\beta = 1$ соответствует уравнение

$$S_p = (1/a) \ln(ap+b) + S_0. \quad (5)$$

Произвольная постоянная S_0 находится из условия непрерывности графика $S = f(p)$ в точке $p = R$; подстановка $S_0 = S_R$ в точке $p = R$ приводит к выражению

при $\beta \neq 1$:

$$S_p = S_R + \{1/[a(1-\beta)] [(ap+b)^{1-\beta} - (aR+b)^{1-\beta}]\}, \quad (6)$$

при $\beta = 1$:

$$S_p = S_R + (1/a) \ln[(ap+b)/(aR+b)]. \quad (7)$$

Значениям $\beta \geq 1$ соответствует бесконечная, а при $\beta < 1$ – конечная осадка при $p = p_{пр}$.

$$Sp_{пр} = S_R - (aR+b)^{1-\beta} / [a(1-\beta)]. \quad (8)$$

В общем случае зависимость (4) или (5) должна отражать следующие особенности:

- плавный (при $t = 1$) или скачкообразный (при $t > 1$) переход из линейной в нелинейную области в точке $p = R$; если обозначить производную со стороны линейного участка $S = f(p)$ как $S'_R = S_R/(R - \sigma_{zg,0})$, тогда производная в начале нелинейного участка будет $t S'_R$;
- образование бесконечных осадок при $p = p_{пр}$.

Учитывая эти особенности, параметры a и b находятся из решения системы

$$\left. \begin{aligned} ap_{\text{пр}} + b &= 0, \\ aR + b &= k^{1/\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $k = 1/(tS'_R)$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} a &= -k^{1/\beta} / (p_{\text{пр}} - R), \\ b &= -ap_{\text{пр}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Значения производных (точнее – обратных им величин) также позволяет задавать система (9), но параметры a и b в этом случае должны определяться из уравнений (11):

$$\left. \begin{aligned} ap_{n-1,n} + b &= 1/S'p_{n-1,n}, \\ ap_{\text{кр}} + b &= 1/S'p_{\text{кр}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $S'p_{\text{кр}}$ и $S'p_{n-1,n}$ – соответственно производные зависимости $S = f(p)$ в начале и в конце нелинейного участка.

Анализ нелинейных осадок условного фундамента

Иллюстрация описанных выше решений приводится на рис. 2 на примере осадок фундамента глубиной $d = 2$ м размером в плане $l \times b = 3 \times 1,5$ м для двух типов средних по прочности грунтов – песка и суглинка. Сведения о грунтах приведены в таблице.

Соотношение значений $p_{\text{кр}}$, R и $p_{\text{пр}}$ для различных грунтов

Грунт	Значения $p_{\text{кр}}$, R и $p_{\text{пр}}$, кПа (кгс/см ²) и их отношения, а также S_R , см						
	$p_{\text{кр}}$	R	S_R	$R/p_{\text{кр}}$	$p_{\text{пр}}, 1625$	$p_{\text{пр}}/p_{\text{кр}}$	$p_{\text{пр}}/R$
Песок: $E = 30$ МПа, $\nu = 0,20$, $\gamma = 18$ кН/м ³ , $c = 5$ кПа, $\varphi = 30^\circ$	241 (2,41)	272 (2,72)	1,38	1,13	1625 (16,25)	6,74	5,97
Суглинок: $E = 20$ МПа, $\nu = 0,30$, $\gamma = 20$ кН/м ³ , $c = 50$ кПа, $\varphi = 15^\circ$	334 (3,34)	344 (3,44)	2,53	1,03	943 (9,43)	2,82	2,74

Из таблицы можно видеть, что расчетное сопротивление R и критическое давление $p_{\text{кр}}$ в суглинке почти неразличимы по величине (на 3 %); в песке же значение R выше $p_{\text{кр}}$ на 26 %, а предельные давления $p_{\text{пр}}$ в суглинке почти в 3 раза, а в песке – почти в 5 раз выше, чем R .

Графики на рис. 2 следует рассматривать как абстрактные, не привязанные к реальному нагружению. Можно констатировать, что более или менее совпадающие зависимости в диапазоне давлений от R до $(0,3...0,5) p_{пр}$ получены по формуле (1) М.В. Малышева (линии 1) и по зависимости (7), но при учете перехода в нелинейную область со скачком, характеризуемым параметром $t = 2$ (линия 4). Другие зависимости (3), (4) дают несколько меньшие значения осадок. При превышении диапазона давлений $(0,3...0,5)p_{пр}$ осадки существенно возрастают по-разному (но особенно интенсивно – по зависимости (1), приближаясь к бесконечным.

Рис. 2. Графики развития осадок фундаментов для песка (а) и суглинка (б):

1 – по формуле (1); 2 – по формуле (7) при $t = 1$;

3 – то же, при $t = 1,5$; 4 – то же, при $t = 2,0$

Анализ реального испытания грунта штампом

Рассмотрим далее, как эти зависимости соотносятся с графиками испытаний реального грунта квадратным штампом площадью 5000 см^2 (размер стороны $b = 0,707 \text{ м}$). Характеристики грунта (делювиального суглинка) следующие: удельный вес $\gamma = 18,5 \text{ кН/м}^3$, влажность $W = 0,19$, пределы пластичности $W_p = 0,18$ и $W_L = 0,29$, показатель текучести $I_L = 0,09$, коэффициент пористости $e = 0,77$, степень влажности $S_r = 0,68$, компрессионный модуль деформации $E_k = 3,3 \text{ МПа}$, угол внутреннего трения $\phi = 20^\circ$, удельное сцепление $c = 20 \text{ кПа}$.

Испытания проводилось путем нагружения штампа ступенями по 0,05 МПа с выдержкой каждой до условной стабилизации (0,1 мм за 2 ч наблюдения).

На рис. 3, а приведены 17 точек графика $S_i = f(p_i)$ с указанием осадок на каждой ступени.

Рис. 3. Соотношение фактических осадок штампа и осадок, рассчитанных (а):
1 – по формуле М.В. Малышева (1); 2 – по формуле (7) при $t = 1$; 3 – то же, при $t = 2$;
4 – то же, при $t = 1,25$; 5 – с учетом параметров a и b из системы (11), 1-я версия;
6 – то же, 2-я версия; пояснение способа Н.В. Орнатского [6] для определения
предельного давления $p_{пр}$ (б)

Далее анализ ведется двумя способами: первый – если при испытании или расчетом удастся установить значения критического $p_{кр}$ и предельного $p_{пр}$ давлений, второй – когда $p_{кр}$ и $p_{пр}$ неизвестны.

Первый способ

При испытании получено: начальное давление $\sigma_{zg,0} = 0,05$ МПа (по началу линейного участка); $p_{кр} = \sim R = 0,3$ МПа; $p_{пр} = \sim 0,9$ МПа. Значениям $\Delta p = 0,25$ МПа; $\Delta S = 1,48 - 0,62 = 0,86$ см = 0,0086 м и коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$ соответствует модуль деформации по формуле Шлейхера $E = \omega(1 - \nu^2) \Delta p / \Delta S = 0,88 \cdot 0,707(1 - 0,3^2)0,25 / 0,0086 \sim 16,46$ МПа = 164,6 кгс/см².

На рис. 3, *а* показано, как реальный график соотносится с графиком по решению М.В. Малышева (кривая 1) и по зависимости (7) без учета скачка (т.е. при $t = 1$) при переходе в нелинейную область (кривая 2), со скачком с параметром $t = 2$ (кривая 3) и специально подобранным параметром $t = 1,25$ (кривая 4), при котором достигается практически полное совпадение этой зависимости с экспериментальной кривой.

Каких-либо полезных выводов из рассмотрения графиков сделать трудно, но отмечается, что формула М.В. Малышева (1) здесь также дает хорошее совпадение с реальным графиком до давления $\sim 0,5(p_{кр} - p_{пр})$: осадки в этом интервале расходятся с реальными до 30 %.

Как отмечалось, Н.В. Орнатский свою формулу (3) рассматривал как способ определения предельного давления $p_{пр}$. Способ иллюстрирует рис. 3, *б*. Для каждой пары значений p_i и S_i в нелинейной стадии работы грунта вычисляются котангенсы наклонов $k_i = 1/(\Delta S_i / \Delta p_i)$, которые отнесены к серединам участков давления $p_{i,ср} = (p_i + p_{i+1})/2$. На этом же рисунке показано, как значения k_i меняются в пределах линейных участков.

На рис. 3, *б* можно видеть, что значения k_i в нелинейной стадии уменьшаются, достигая в пределе оси абсцисс. Именно точка пересечения осредненной (методом наименьших квадратов) прямой линии $k_i = f(p_{i,ср})$ с осью p и характеризует по Н.В. Орнатскому величину $p_{пр}$.

Обратимся к опыту со штампом, где имеется 12 точек нелинейной части, включая $p_{кр} = 0,30$ МПа, что позволяет дать статистическую оценку результата при доверительной вероятности $\alpha = 0,85$ и $\alpha = 0,95$. Аппроксимация 11 точек (кроме точки $p = p_{кр}$) линейной функцией $k = a + b(p_{i,ср})$ дает следующие значения $p_{кр}$: $p_{кр,ср} = 0,915$ МПа; при доверительной вероятности $\alpha = 0,85$ – $p_{0,85} = 0,907 - 0,922$ МПа, при $\alpha = 0,95$ – $p_{0,95} = 0,900 - 0,930$ МПа. Для дальнейшего анализа принято $p_{пр,ср} = 0,90$ МПа.

Второй способ

Как отмечалось, существует возможность построения кривой, задавая лишь значения производных от давления графика $S = f(p)$ в начале и конце нелинейного участка.

Для этого в первом уравнении системы (11) производную $S'p_{n-1,n}$ следует принимать в интервале давлений от предпоследний

($p_{n-1} = 0,80$ МПа) и последней ($p_n = 0,85$ МПа) точек графика, т.е. среднее давление на грунт на этом участке $p_{n-1,n} = 0,825$ МПа. Соответствующие осадки $S_{0,80} = 9,35$ см и $S_{0,85} = 12,0$ см, а производная $S'p_{n-1,n} = (S_{0,85} - S_{0,80})/p_{n-1,n} = (12,0 - 9,35) / 0,05 = 53$ см/МПа; обратная ей величина $1/S'p_{n-1,n} = 1/53 = 0,0188$ МПа/см.

Во втором уравнении системы (11) производная $S'p_{кр}$ может быть принята:

- по 1-й версии – равной производной на линейном участке графика, т.е. $S'p_{кр} = \operatorname{tg} \alpha_{0,05-0,3} = 3,43$ см/МПа (см. рис. 3, а), а обратная ей величина $1/S'p_{кр} = 1/3,43 = 0,2915$ МПа/см;

- по 2-й версии – равной производной на двух первых ступенях, но нелинейного участка графика, т.е. $S'p_{кр} = \operatorname{tg} \alpha_{0,3-0,35} = 8,0$ см/МПа; обратная величина $1/S'p_{кр} = 1/8,0 = 0,125$ МПа/см.

Таким образом, при увеличении давления при $p > p_{кр}$, 1-я версия полагает гладкий переход в нелинейную область (соответственно наклону линейной части графика), а 2-я – скачкообразный переход (соответственно наклону первых двух точек нелинейной части графика).

При этих условиях из системы (11) находятся параметры a и b , затем по формуле (7) рассчитываются точки графика $S = f(p)$, показанные на рис. 3, а позициями соответственно 5 и 6.

Так же как и ранее, формула М.В. Малышева (1) дает хорошее совпадение с экспериментальными графиками примерно до половины диапазона давлений $p_{кр} - p_{пр}$, но далее круто уходит к бесконечности. Кривые 2 (при $t = 1$) и 3 (при $t = 2$) дают значения осадок при двух крайних допущениях о входе графика в нелинейную область.

Кривые 4 (при $t = 1,25$) и 6 (по 2-й версии) практически совпадают с экспериментальным графиком, поскольку жестко согласованы с ним условиями в начале и в конце. Можно отметить некоторое различие в первых 2–3 точках после $p > p_{кр}$, где в эксперименте наблюдается небольшое отклонение от гладкости. Но такой подход фактически означает «подгонку под ответ», поскольку все условия на входе и выходе в нелинейную область задаются из опыта.

Кривая 5 практически совпадает с кривой 2, поскольку в них заложено одинаковое положение о гладкости при переходе в нелинейную часть графика.

Хорошее приближение к эксперименту кривыми 4 и 6 можно объяснить предсказанным Н.В. Орнатским естественным процессом –

прогрессирующим разрушением, характерным не только для грунтов, но и для других материалов с пластической формой деформирования.

В заключение рассмотрим, как описывает процесс развития осадок круглого штампа площадью 5000 см^2 на том же грунте компьютерная программа «PLAXIS 3D Foundation».

Необходимо отметить, что сам по себе любой программный расчет предполагает предварительное исследование для установления размеров анализируемой области, шага сетки, принятия того или иного условия прочности, закона пластического течения и др.

На рис. 4, а показаны графики $S = f(p)$: фактический 1 и рассчитанные для штампа при условии прочности Кулона-Мора, а также при расположении его на поверхности 2 и на фактической глубине 2 м 3. Можно видеть, что программный расчет правильно отражает процесс прогрессирующего увеличения осадок нагружения, но различие между графиками достаточно очевидно. На рис. 4, б показано, что графики можно практически сблизить, если в графиках 2 и 3 изменять некоторые параметры модели: в рассматриваемом случае сближение обеспечено уменьшением модуля деформации E с 16,5 МПа до 10,3 МПа для незаглубленного штампа 2 и до 7,5 МПа – для заглубленного штампа 3.

Рис. 4. Примеры графика испытания грунта штампом 1 и графиков, рассчитанных по программе «PLAXIS 3D Foundation»: а – при значениях $E = 16 \text{ МПа}$; б – при $E = 10,3 \text{ МПа}$ (незаглубленный штамп – 2) и $E = 7,5 \text{ МПа}$ (штамп на глубине 2 м – 3)

Выводы

1. Способ М.В. Малышева и модифицированный способ Н.В. Орнатского позволяют получать достаточно надежный прогноз осадок при давлениях, примерно соответствующих половине интервала

$p_{кр} - p_{пр}$; погрешность в определении осадок оценивается в 30–40 %. Первый способ дает несколько повышенную и, следовательно, более осторожную оценку деформаций, второй же требует предварительной оценки параметра t , характеризующего начальный наклон нелинейной части зависимости $S = f(p)$.

2. Способ СП, используемый в гидротехническом строительстве, имеет достаточно узкий диапазон, ограниченный по величине передаваемого на грунт давления, поэтому соответствующие кривые на рисунках не показаны.

3. Результат компьютерного расчета требует привязки к какому-либо надежному объекту, о котором имеется объективная информация о работе под нагрузками; еще раз отмечается, что компьютерные решения пока далеки от разрешения и практического использования.

Библиографический список

1. Лушников В.В. Оценка действительных характеристик деформируемости элювиальных грунтов по результатам измерений деформаций зданий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2011. – С. 23–29.
2. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. – М.: Стройиздат, 1994. – 228 с.
3. Лушников В.В. Метод определения осадок малозаглубленных фундаментах при давлениях, превышающих критическое // Основания, фундаменты в геологических условиях Урала: материалы конф.; Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1983. – С. 40–47.
4. Орнатский Н.В. Механика грунтов. – М.: Изд-во МГУ, 1950. – 420 с.

References

1. Lushnikov V.V. Otsenka deistvitel'nykh kharakteristik deformiruemosti elyuvial'nykh gruntov po rezul'tatam izmerenij deformatsij zdaniy [Evaluation of actual performance to deformability of eluvial soils according to the results of measurements of deformations of buildings]. *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*, 2011, pp. 23-29.
2. Malyshev M.V. Prochnost' gruntov i ustoichivost' osnovanij sooruzhenij [Soil Strength and stability of the construction bases]. Moscow: Strojizdat, 1994. 228 s.
3. Lushnikov V.V. Metod opredeleniya osadok malozaglublennykh fundamen-takh pri davleniyakh, prevyshayushchikh kriticheskoe [Method for determination of sediment little underground bases at pressures exceed-

ing critical]. *Sbornik trudov konferentsii "Osnovaniya, fundamenty v geologicheskikh usloviyakh Urala"*. Perm, 1983, pp. 40-47.

4. Ornatskii N.V. *Mekhanika gruntov* [Soil Mechanics]. Moscovskiy gosudarstvennyy universitet, 1950. 420 s.

Об авторах

Лушников Владимир Вениаминович (Екатеринбург, Россия) – доктор технических наук, профессор института «УралНИИпроект РААСН»; e-mail: gsexpert@list.ru

Ярдыков Артем Сергеевич (Екатеринбург, Россия) – начальник отдела оснований и фундаментов института «УралНИИАС»; e-mail: art9yard@mail.ru)

About the authors

Lushnikov Vladimir Veniaminovich (Ekaterinburg, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute «UralNIIProekt RAASN»; e-mail: gsexpert@list.ru

Yardyakov Artyom Sergeevich (Ekaterinburg, Russian Federation) – Head of the Department of bases and foundations of the Institute «UralNI-
IAS»; e-mail: art9yard@mail.ru

Получено 24.02.2014