Resources and Technology 17 (1): 63-88, 2020
ISSN 2307-0048
http://rt.petrsu.ru

DOI: 10.15393/j2.art.2020.5182
УДК 674.81
Обзор

Анализ исследований по тематике измельчения древесных отходов

Власов Юрий Николаевич
кандидат технических наук, доцент, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова (Российская Федерация), pobeda-872@yandex.ru

Григорьев Игорь Владиславович
доктор технических наук, профессор, Якутская государственная сельскохозяйственная академия (Российская Федерация), silver73@inboxl.ru

Куницкая Ольга Анатольевна
доктор технических наук, доцент, Якутская государственная сельскохозяйственная академия (Российская Федерация), ola.ola@mail.ru

Хитров Егор Германович
кандидат технических наук, докторант, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова (Российская Федерация), yegorkhitrov@gmail.com

Получена: 15 февраля 2020 / Принята: 23 марта 2020 / Опубликована: 12 апреля 2020

Аннотация: Согласно сведениям Федерального агентства лесного хозяйства, за 2018 г. в России объём вывозки древесины составил 238,58 млн скл. м^3 древесины, что составляет более 167 млн пл. м^3, таким образом, объём лесосечных отходов составил ориентировочно 62,6 млн пл. м^3. Объём отходов лесопереработки составляет дополнительно более 47,1 млн пл. м^3. Суммарный объём лесосечных отходов и отходов лесопереработки составляет свыше 110 млн пл. м^3. Организация эффективной утилизации и переработки отходов лесозаготовительного производства представляет собой комплексную научную проблему. Одним из основных направлений её решения является развитие производства экологически чистого биотоплива из древесных отходов. Переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике относится к приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации. В распространённых математических моделях измельчения древесных отходов, основанных на теории контактного взаимодействия Герца, важнейший параметр рабочего органа машины-измельчителя — угол заточки учитывается косвенно.

Кроме того, распространённые математические модели используют линеаризованную зависимость для контактной силы. Известны математические модели, основанные на энергетических законах измельчения, позволяющие проводить расчёт энергозатрат на измельчение. Для дальнейшего их развития необходимы обширные лабораторные и производственные испытания по определению коэффициентов функций энергоёмкости измельчения, значения которых зависят как от свойств сырья, так и от параметров рабочего органа измельчителя. Для управления временем измельчения, от которого зависит как производительность, так и энергоёмкость подготовки сырья на стадии измельчения, пользуются кинетическими моделями измельчения. В науке о лесозаготовительном производстве модели кинетики измельчения рассматривались, в основном, как экспериментальные зависимости. В технике известны общие модели кинетики измельчения, основанные на интегро-дифференциальных уравнениях баланса фракций. Сложность их использования заключается в задании вероятностей разрушения и параметров эволюции распределительной функции по времени. При большом числе узких классов материала задача разбивается на серию подзадач, параллельное решение которых, в общем случае при произвольных функциях вероятности разрушения и времени ожидания, представляет собой отдельную трудоёмкую задачу вычислительной математики.

Ключевые слова: математическое моделирование, измельчение древесных отходов, энергетическая эффективность

DOI: 10.15393/j2.art.2020.5182
Review

Analysis of research results on wood waste shredding

Yuri Vlasov
PhD in engineering, associate professor, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov (Russian Federation), pobeda-872@yandex.ru

Igor Grigorev
Doctor of engineering, professor, Yakut state agricultural Academy (Russian Federation), silver73@inboxl.ru

Olga Kunitskaya
Doctor of engineering, associate professor, Yakut state agricultural Academy (Russian Federation), ola.ola@mail.ru

Yegor Khitrov
PhD in engineering, doctoral student, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov (Russian Federation), yegorkhitrov@gmail.com

Received: 15 February 2020 / Accepted: 23 March 2020 / Published: 12 April 2020

Abstract: According to the Federal forestry Agency, the volume of wood export in Russia amounted to 238.58 million storage cubic meters of wood in 2018, which is more than 167 million dense cubic meters, so the volume of cutting waste was approximately 62.6 million dense cubic meters. The volume of wood processing waste is additionally more than 47.1 million dense cubic meters. The total volume of cutting and processing waste is more than 110 million dense cubic meters. The organization of efficient utilization and recycling of logging waste is a complex scientific problem. One of the main directions of its solution is the development of production of environmentally friendly biofuels from wood waste. The transition to environmentally friendly and resource-saving energy is one of the priority areas of the strategy for scientific and technological development of the Russian Federation. In common mathematical models of wood waste grinding based on the Hertz contact interaction theory, the most important parameter of the working body of the shredder machine - the sharpening angle – is taken into account indirectly. In addition, common mathematical models use a linearized relationship for the contact force. Mathematical models based on the energy laws of grinding allow calculating the energy consumption during the grinding process. For their further development, extensive laboratory and production tests are required to determine

the coefficients of the grinding energy intensity functions, the values of which depend on both the properties of the raw material and the parameters of the working body of the shredder. Kinetic grinding models are used to control the grinding time, which affects both the productivity and energy consumption of raw material preparation at the grinding stage. In the science of logging, models of grinding kinetics were considered mainly as experimental dependencies. General models of grinding kinetics based on integro-differential equations of fraction balance are known. The complexity of their use lies in setting the probability of destruction and the parameters of the evolution of the distribution function over time. For a large number of narrow classes of material, the problem is divided into a series of subtasks, the parallel solution of which, in general, for arbitrary functions of the probability of failure and the waiting time, is a separate labor-intensive problem of computational mathematics.

Keywords: mathematical modeling, wood waste shredding, energy efficiency

1. Введение

Ведущие отечественные учёные отмечают, что проблема эффективной утилизации и переработки отходов лесозаготовительного производства представляет собой комплексную научную проблему. Одним из основных направлений переработки отходов лесопромышленного комплекса является организация производства из них экологически чистого биотоплива. Заметим, что переход к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике относится к приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации.

Прямое использование отходов лесопереработки в энергетических целях не всегда возможно и целесообразно, поскольку:

- отходы лесопереработки ввиду малой насыпной плотности занимают большие складские площади, по этой причине их перевозка зачастую нерентабельна;
- затруднена автоматическая подача разнородного топлива в котельные, при горении сыпучих мелкодисперсных отходов снижается коэффициент полезного действия котлоагрегата.

По этим причинам для производства качественного биотоплива с высокой транспортной плотностью из древесного сырья производят пеллеты (гранулы) и брикеты.

И пеллеты, и брикеты имеют по отношению друг к другу как достоинства, так и недостатки. С одной стороны, технология пеллетирования (гранулирования) является дальнейшим развитием технологии брикетирования, цена реализации пеллет выше, чем брикетов. Но организация современных промышленных линий гранулирования рентабельна лишь при значительных объёмах перерабатываемого сырья, недостижимых для малых лесоперерабатывающих предприятий. Требования к фракционному составу и качеству сырья более строги по сравнению с брикетным производством. Наилучшим сырьём для гранулирования считаются сухие опилки и стружка.

Современные стандарты в области твёрдого биотоплива допускают использование коры и даже древесной зелени в качестве сырья для производства брикетов.

Основными технологическими операциями производства брикетов являются:

- сбор сырья и транспортировка его к месту измельчения;
- предварительное измельчение сырья до состояния щепы;
- сушка сырья до требуемой влажности;
- доизмельчение высушенного сырья до фракции, необходимой для подачи в пресс;
- прессование сырья;
- упаковка брикетов.

Операции сбора и транспортировки сырья, а также упаковки к настоящему времени едва ли требуют дальнейшего изучения и совершенствования. Сушке цельной и измельчённой древесины посвящено множество актуальных работ. В цикле брикетирования дважды встречается операция измельчения: первый раз на этапе подготовки сырья к сушке, причём сырьё следует измельчить до крупности 20—30 мм, далее оно доизмельчается до средней

крупности 5—7 мм. На обеих ступенях измельчения используются разные типы измельчителей.

Как правило, на первой ступени измельчения используются машины с ножевым рабочим органом, на второй — с молотковым, реже — также с ножевым. Обзор научных сведений по тематике измельчения отходов лесопереработки выполнен в настоящей статье.

2. Контактные модели измельчения древесного сырья

В работе [1] предложена теоретическая модель измельчения отрезков коры. Контакт рабочего органа и отрезка коры рассмотрен для двух случаев: 1) при ударе вдоль волокон коры моделью отрезка коры является стержень массой m_1, сечение стержня постоянно (рисунок 1); 2) при ударе поперёк волокон коры моделью материала является балка с незакреплёнными концами, также массой m_1 (рисунок 2).

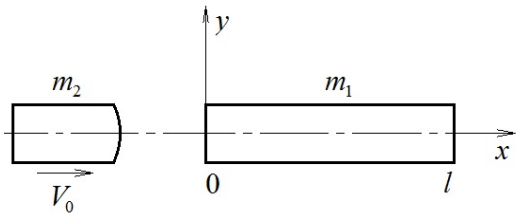

Рисунок 1. Схема к расчёту параметров взаимодействия рабочего органа измельчителя с отрезком коры при ударе вдоль волокон

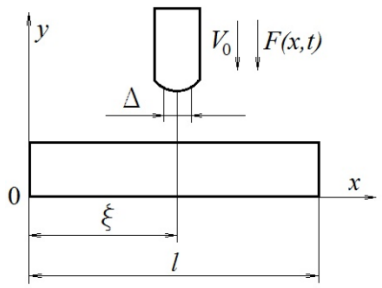

Рисунок 2. Схема к расчёту параметров взаимодействия рабочего органа измельчителя с отрезком коры при ударе поперёк волокон

В обоих случаях масса груза составляет m_2, а скорость перед началом контакта — V_0.

Модель продольного воздействия построена на положениях теории контактного взаимодействия Герца. Одной из основополагающих зависимостей является уравнение контактной силы P в зоне соударения куска измельчаемого материала и рабочего органа машины-измельчителя:

$$P = k\alpha^{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

где α — местная деформация, вызванная контактом, k — коэффициент пропорциональности, для расчёта которого использовано уравнение

$$k = \frac{4}{3 \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \sqrt{R_2}\,, \tag{2}$$

где E_1, E_2 — модуль упругости измельчаемой коры и бойка рабочего органа соответственно, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона измельчаемой коры и бойка рабочего органа соответственно, R_2 — радиус кривизны поверхности рабочего органа в зоне контакта.

На базе теории удара Герца и уравнения (1) проводились исследования роторной и барабанной окорки лесоматериалов [2], но с иными формулировками уравнения коэффициента пропорциональности k. В технике предложены различные уравнения, описывающие распределение усилий и напряжений по длине стержня как модели материала при динамическом воздействии груза. Анализ литературных источников показывает, что положения теории Герца позволили решить большое число важных практических задач, в связи с чем рассмотрим метод подробнее.

Как правило, для последующих построений используется линеаризованное уравнение контактной силы, одна из распространённых формулировок которого имеет вид:

$$P = \frac{1}{\delta_M} \alpha\,, \tag{3}$$

где δ_M — коэффициент местной податливости, значение которого должно обеспечить равенство между собой потенциальной энергии упругой деформации материала по исходной (нелинейной) зависимости вида (1) и линеаризованной (3) при максимальной контактной силе $P_{\max}$. Математическая формулировка условия:

$$\frac{1}{2} P_{\max}^2 \delta_M = \int_0^{\alpha(P_{\max})} P d\alpha\,, \tag{4}$$

таким образом, с учётом формулы (1)

$$\frac{1}{2} P_{\max}^2 \delta_M = \frac{2}{5} k^{-\frac{2}{3}} P_{\max}^{\frac{5}{3}}. \tag{5}$$

В результате решения уравнения (5) коэффициент δ_M определяется по выражению

$$\delta_M = \frac{4}{5\sqrt{k^2 P_{\max}}}\,. \tag{6}$$

При продольном контакте решение строится на основе волнового уравнения движения сечений стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi_1}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{dt^2} = 0 \\ m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{dt^2} + P = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

где ξ_1, ξ_2 — соответственно контактные перемещения произвольных сечений стержня и груза, a — скорость распространения продольных волн деформации в коре древесины:

$$a = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}, \tag{8}$$

где ρ — плотность коры.

Система уравнений (7) с учётом линеаризованного уравнения контактной силы (4) преобразована к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 2f\frac{dP}{dt} + \left(f^2 + h^2\right)P = -\frac{1}{\delta_M} \cdot \frac{d\Phi\left(t - \frac{2l}{a}\right)}{dt}, \tag{9}$$

в котором обозначено:

$$f = \frac{a}{2\delta_M E_1 F_1} h^2,$$

$$h = \frac{1}{\delta_M m_2} - f^2,$$

$$\Phi\left(t - \frac{2l}{a}\right) = V_1\left(t - \frac{2l}{a}\right) + \frac{a}{E_1 F_1} P\left(t - \frac{2l}{a}\right),$$

где F_1 — площадь поперечного сечения стержня, моделирующего отрезок коры, l — длина стержня.

Уравнение (9) имеет следующие начальные условия:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ \frac{dP}{dt}(0) = \frac{1}{\delta_M} V_0 \end{cases}. \tag{10}$$

Решение дифференциального уравнения (9) примет вид при $h^2 > 0$:

для $0 \le t \le \frac{2l}{a}$

$$P = \frac{V_0}{h\delta_M} \exp(-ft)\sin(ht), \tag{11}$$

для $\frac{2l}{a} \le t \le \frac{4l}{a}$

$$P = \frac{V_0}{h\delta_M}\left\{\exp(-ft)\sin(ht) - \frac{2f}{h}\exp(-f\theta)\left(\left(h\theta - \frac{f}{h}\right)\sin(h\theta) + f\theta\cos(h\theta)\right)\right\}, \tag{12}$$

где $\theta = t - \frac{2l}{a}$, при $h^2 < 0$:

для $0 \le t \le \frac{2l}{a}$

$$P = \frac{V_0}{h\delta_M}\exp(-ft)\sin(ht), \tag{13}$$

для $\frac{2l}{a} \le t \le \frac{4l}{a}$

$$P = \frac{V_0}{h\delta_M}\left\{\exp(-ft)\sin(ht) - \frac{2f}{h}\exp(-f\theta)\left(\left(h\theta - \frac{f}{h}\right)\sin(h\theta) + f\theta\cos(h\theta)\right)\right\}. \tag{14}$$

В уравнениях (11)—(14) неизвестной величиной остаётся коэффициент местной податливости по уравнению (6). Для его определения используется энергетический метод, рассматривается кинетическая энергия системы T в момент, когда контактное сближение принимает наибольшее значение:

$$V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}V_0, \tag{15}$$

$$T_1 = \frac{m_1 + m_2}{2}V_1^2 = T_2 = \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)}V_0^2, \tag{16}$$

где V_1 — скорость стержня после воздействия груза, а также изменение кинетической энергии ΔT, вызванное её частичным переходом в потенциальную энергию деформации.

Уравнение изменения кинетической энергии ΔT:

$$\Delta T = \frac{m_2}{2}V_0^2 - \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)}V_0^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}V_0^2, \tag{17}$$

Уравнения потенциальной энергии общей и местной деформации соответственно:

$$U_{общ}^{\max} = \frac{P_{\max}^2 l}{2E_1F_1}, \tag{18}$$

$$U_{местн}^{\max} = \frac{2P_{\max}^{\frac{5}{3}} l}{5k^{\frac{2}{3}}}. \tag{19}$$

Поскольку

$$\Delta T = U_{общ}^{\max} + U_{местн}^{\max}, \tag{20}$$

имеет место соотношение

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}V_0^2 = \frac{P_{\max}^2 l}{2E_1F_1} + \frac{2P_{\max}^{\frac{5}{3}} l}{5k^{\frac{2}{3}}}, \tag{21}$$

из которого с учётом выражения (3) находится максимальная контактная сила:

$$P_{\max} = V_0\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)\left(\frac{l}{3E_1F_1}+\delta_M\right)}}. \tag{22}$$

Коэффициент местной податливости определяют методом итераций. На начальном этапе определяют $P_{\max}$ из уравнения (22) при коэффициенте местной податливости $\delta_M = 0$, затем по уравнению (6) находят первое приближение δ_M, с помощью которого уточняют значение $P_{\max}$ по формуле (22) и т. д. При необходимости далее рассчитывают силу P по времени с помощью уравнений (11)—(14).

При известных параметрах распределения силы P рассчитывается сжимающее напряжение, которое сопоставляют с пределом прочности материала.

При расчёте параметров поперечного воздействия рабочего органа на отрезок коры рассматривается воздействие силы $F(x,t)$ на незакреплённую балку. Сила $F(x,t)$ приложена в точке $x = \xi = \frac{l}{2}$ и действует на участке заданной длины Δ:

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(t), \xi - \frac{\Delta}{2} \le x \le \xi + \frac{\Delta}{2} \\ 0, \xi - \frac{\Delta}{2} < x > \xi + \frac{\Delta}{2} \end{cases} \tag{23}$$

Уравнение, описывающее вынужденные колебания балки под действием силы $F(x,t)$, записывается так:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1}{m}F(x,t), \tag{24}$$

где параметр

$$a^2 = \frac{EJ}{m}l, \tag{25}$$

где EJ — жёсткость балки, m — масса балки, l — длина балки.

К уравнению (23) формулируются начальные условия:

$$\begin{cases} y(x,0) = 0 \\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} V_0, x - \xi \le \frac{\Delta}{2} \\ 0, x - \xi > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \end{cases}. \tag{26}$$

Решение уравнения (24) представляет собой сумму общего решения:

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\left(A_k\sin\omega_k t+B_k\sin\omega_k t\right), \tag{27}$$

где $W_k=\dfrac{\cos\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}l-\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}l}{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}l-\sin\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}l}\cdot\left(\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}x+\sin\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}x\right)+\left(\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}x+\cos\sqrt{\dfrac{\omega_k}{a}}x\right)$, ω_k — корни трансцендентного уравнения $\cos\sqrt{\dfrac{\omega}{a}}l\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{\omega}{a}}l=1$

и одного частного решения

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\frac{a_k}{\omega_k}\int_0^t F_1\sin\omega_k(t-v)dv, \tag{28}$$

где $a_k=-\dfrac{4}{mlW_k^2}\displaystyle\int_{\xi-\frac{\Delta}{2}}^{\xi+\frac{\Delta}{2}}W_k dx$.

При условиях

$$\begin{cases} B_k=0, k=1,2,3...n \\ A_k=-mV_0\dfrac{a_k}{\omega_k}, k=1,2,3...n \end{cases}, \tag{29}$$

и с учётом свойства $\lim_{\theta\to 0}\displaystyle\int_0^{\theta}F_1 dt=1$ сумма (27), (28) имеет следующий вид:

$$y(x,t)=(1-mV_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\omega_k}W_k\sin\omega_k t. \tag{30}$$

Подход к определению контактной силы, в целом, аналогичен случаю продольного удара, отличия состоят в параметрах измельчаемого отрезка.

Скорость балки после воздействия

$$V_1=\frac{m_2}{m_{np}+m_2}V_0, \tag{31}$$

где m_{np} — приведённая масса балки:

$$m_{np}=\int_0^l q\left(\frac{W}{W_0}\right)dx, \tag{32}$$

где q — погонная масса измельчаемого материала.

Кинетическая энергия системы после соударения:

$$T_1 = \frac{m_{пр} + m_2}{2} V_1^2 = \frac{m_2^2}{2(m_1 + m_2)} V_0^2 = T_0 \frac{m_{пр} + m_2}{2}, \quad (33)$$

где T_0 — кинетическая энергия рабочего органа до удара.

Потеря кинетической энергии ΔT так же, как и в предыдущем случае, определяется максимальной потенциальной энергией деформации:

$$U_{общ}^{\max} = \frac{P_{\max}^2 \delta}{2}, \quad (34)$$

$$U_{местн}^{\max} = \frac{P_{\max}^2 \delta_m}{2}, \quad (35)$$

где δ — прогиб в точке удара от единичной силы, δ_m — коэффициент местной податливости, тогда для максимальной контактной силы получим:

$$P_{\max} = V_0 \sqrt{\frac{m_{пр} m_2}{(m_{пр} + m_2)(\delta + \delta_m)}}. \quad (36)$$

Значения $P_{\max}$, δ_m находятся методом итераций, аналогично рассмотренному выше случаю продольного воздействия.

Как было отмечено, по максимальным значениям контактной силы рассчитываются максимальные напряжения, вызванные воздействием рабочего органа машины в измельчаемом куске материала.

Обратим внимание, что в рассмотренных уравнениях важнейший параметр рабочего органа машины-измельчителя — угол заточки не учитывается в явном виде. Учёт его значения возможен косвенно, например, при задании параметров зоны распространения воздействия на балку при поперечном ударе. Тем не менее, более точным представляется подход, учитывающий влияние формы индентора на контактную силу непосредственно. В качестве второго недостатка рассмотренного подхода можно указать линеаризацию зависимости для контактной силы, которая, тем не менее, не избавляет от необходимости прибегать к итерациям при получении решения.

Кроме того, рассмотрение измельчения древесных материалов с позиции удара по стержню и балке предполагает сопоставимые размеры рабочего органа и измельчаемых кусков материала. Например, в [1] приводятся результаты расчётов по измельчению отрезков древесной коры (рисунки 3, 4).

Согласно полученным сведениям, для измельчения коры достаточна скорость воздействия в пределах 20 м/с, которая будет соответствовать частоте вращения на уровне 500 об./мин. Практика свидетельствует о том, что для помола коры во фракцию, достаточную для брикетирования, частота вращения рабочего органа должна быть в несколько раз выше.

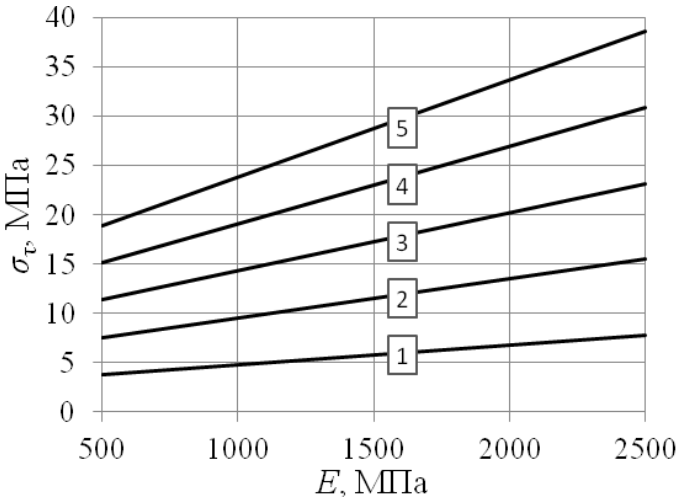

Рисунок 3. Максимальное контактное напряжение при ударе вдоль волокон коры: 1 — V_0 = 10 м/с; 2 — V_0 = 20 м/с; 3 — V_0 = 30 м/с; 4 – V_0 = 40 м/с; 5 — V_0 = 50 м/с

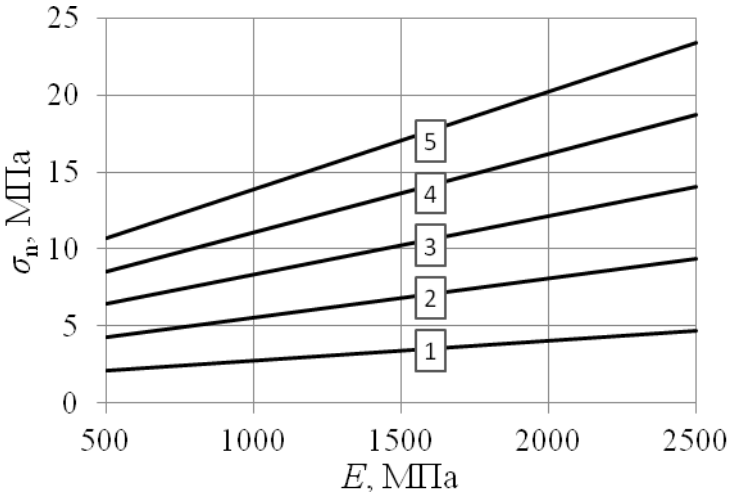

Рисунок 4. Максимальное контактное напряжение при ударе поперёк волокон коры: 1 — V_0 = 10 м/с; 2 — V_0 = 20 м/с; 3 — V_0 = 30 м/с; 4 — V_0 = 40 м/с; 5 — V_0 = 50 м/с

Несмотря на отмеченные сложности, принципиальная возможность влияния оценки параметров рабочего органа на процесс измельчения древесных материалов является достоинством методов, основанных на теории контактного взаимодействия.

3. Энергетические модели измельчения древесного сырья

Продолжим рассмотрение проблематики научного описания измельчения. Несколько иной класс задач решается на базе энергетических моделей измельчения материалов. Наиболее известны три математических выражения, устанавливающих зависимость работы *A*,

затраченной на измельчение, крупности и фракционного состава сырья и продукта измельчения, массы измельчённого материала. Первый из законов — закон Риттингера:

$$A_Q = K_R Q \cdot \frac{i-1}{D_{cp}}, \tag{37}$$

где K_R — коэффициент пропорциональности, Q — масса измельчаемого материала, i — степень измельчения, определяемая выражением

$$i = \frac{D_{cp}}{d_{cp}}, \tag{38}$$

где d_{cp} — средняя крупность кусков материала после измельчения, D_{cp} — средняя крупность кусков материала до измельчения.

Средние крупности находятся по содержанию фракций («узких классов») в материале:

$$d_{cp} = \frac{\sum w_j}{\sum \frac{w_j}{d_j}}, \tag{39}$$

$$D_{cp} = \frac{\sum w_j}{\sum \frac{w_j}{D_j}}, \tag{40}$$

где w_j — процент кусков определённой фракции («узкий класс»), d_j, D_j — средние размеры кусков определённой фракции («узкого класса»), j — порядковый номер.

Известен закон измельчения Кирпичева — Кика:

$$A_Q = K_K Q \cdot \ln i, \tag{41}$$

где K_K — коэффициент пропорциональности.

При использовании закона Кирпичева — Кика степень измельчения рассчитывают по формуле (38), но крупности измельчаемого материала находятся по отличным зависимостям:

$$d_{cp} = \frac{\sum w_j \ln d_j}{\sum w_j}, \tag{42}$$

$$D_{cp} = \frac{\sum w_j \ln D_j}{\sum w_j}. \tag{43}$$

Закон Бонда является ещё одним, третьим, выражением, связывающим крупность и энергозатраты:

$$A_Q = K_B Q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{d_{cp}}} - \frac{1}{\sqrt{D_{cp}}} \right), \tag{44}$$

где K_B — коэффициент пропорциональности.

В законе Бонда средние крупности материала до и после измельчения определяют соответственно по формулам

$$d_{cp} = \left(\frac{\sum w_j}{\sum \frac{w_j}{\sqrt{d_j}}} \right)^2, \tag{45}$$

$$D_{cp} = \left(\frac{\sum w_j}{\sum \frac{w_j}{\sqrt{D_j}}} \right)^2. \tag{46}$$

Энергоёмкость процесса измельчения описывается одним из выражений (37), (41), (44) в зависимости от свойств измельчаемого сырья, типа и параметров рабочего органа. Подбираются законы измельчения опытным путём. Коэффициенты пропорциональности являются эмпирическими и также зависят от свойств сырья и параметров установки.

Выполнены эксперименты по измельчению древесной коры и древесины, приведём краткий обзор основных полученных результатов.

В работе [1] приведены результаты опытов по измельчению коры в молотковой мельнице. Управляемыми факторами являлись абсолютная влажность коры W_a и удельная работа измельчения $A_{уд}$, уровни варьирования факторов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Уровни варьирования факторов

№	Фактор	Размерность	Уровни			Интервал
			нижний	основной	верхний	
1	W_a	—	40	60	80	20
2	$A_{уд}$	кВт·ч/т	5	12,5	20	7,5

Пример результатов обработки опытных данных приведён на рисунках 5, 6.

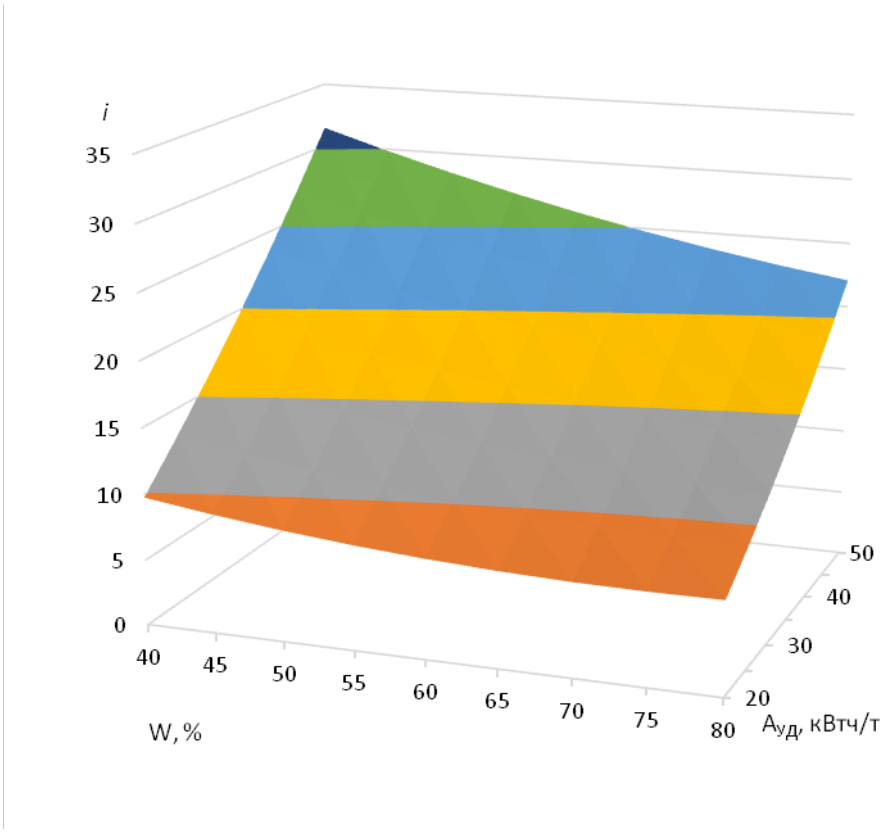

Рисунок 5. Зависимость степени измельчения коры от влажности и удельной работы измельчения

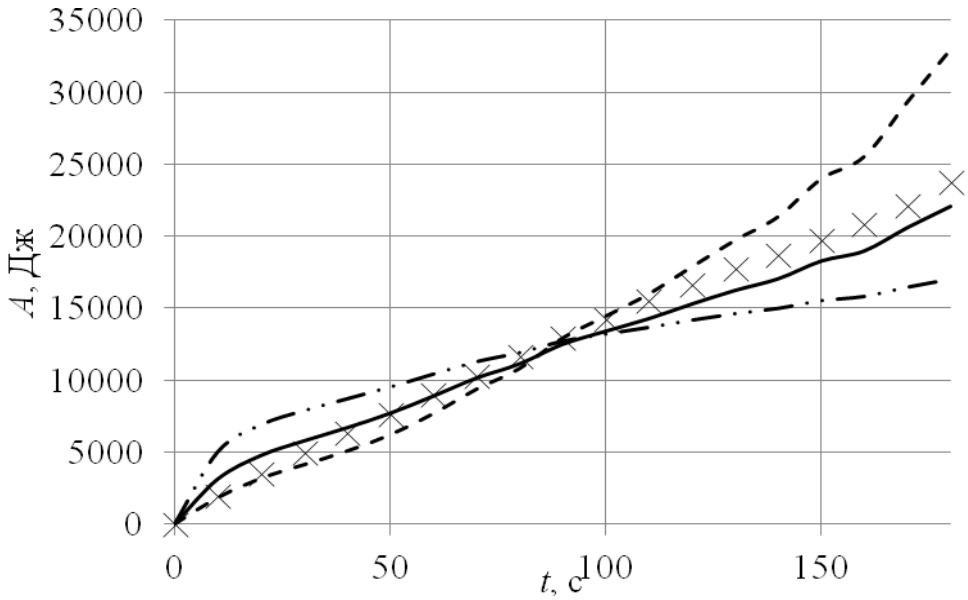

Рисунок 6. Работа измельчения (сплошная линия — закон Бонда, пунктирная — закон Кирпичева — Кика, штрих-пунктирная — закон Риттингера, × — экспериментальные данные), W_a = 80 %

В результате установлено, что измельчение коры хвойных пород древесины с использованием молотковых дробилок-мельниц наилучшим образом описывается законом измельчения Бонда с коэффициентами пропорциональности, зависящими от влажности коры (таблица 2).

Таблица 2. Коэффициенты пропорциональности в законе Бонда (дробление коры хвойных пород древесины на молотковых мельницах)

W_a, %	K_B, кДж/т
40	28,76
60	33,19
80	37,08

Дальнейшие, более обширные, эксперименты выполнены в работе [3], целью их являлось установление закономерности для оценки затрат энергии, требующейся для измельчения отходов окорки в зависимости от степени измельчения i и их относительной влажности W. Уровни и интервалы варьирования управляемых факторов представлены в таблице 3.

Эксперименты выполнены с использованием ножевого промышленного измельчителя фирмы Erdwich, потребляемая сила тока фиксировалась автоматически при помощи датчиков измельчителя.

По результатам обработки экспериментальных данных установлено, что математическая модель, определяющая удельную энергоёмкость измельчения ножевым рабочим органом $Q_{ИЗМ}$ [МДж/кг] в зависимости от относительной влажности W [%] и степени измельчения i отходов окорки ели и сосны по структуре аналогична закону измельчения Кирпичева — Кика:

$$Q_{ИЗМ} = 1{,}43W^{-0{,}33} \ln i, \tag{47}$$

$$Q_{ИЗМ} = 2{,}24W^{-0{,}36} \ln i. \tag{48}$$

Формулы (47), (48) проиллюстрированы на рисунках 7, 8.

Таблица 3. Управляемые факторы и интервалы их варьирования в опытах по изучению энергоёмкости измельчения отходов окорки сосны и ели

Фактор	Значение			Интервал
	нижний уровень	основной уровень	верхний уровень	
W, %	10	40	70	30
i	6	10	14	4

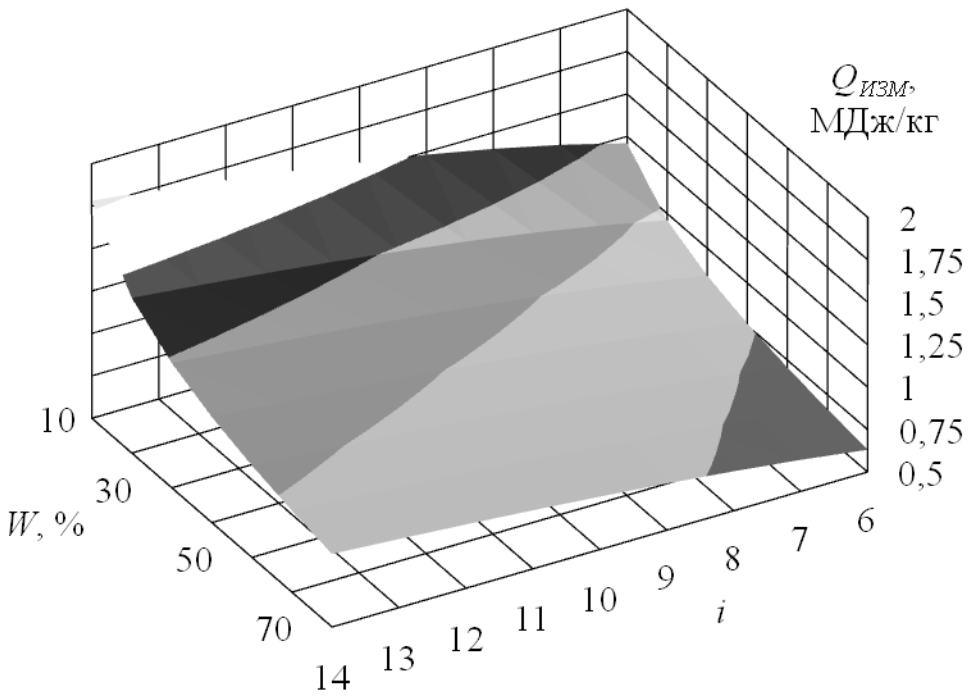

Рисунок 7. Удельная энергоёмкость измельчения отходов окорки ели

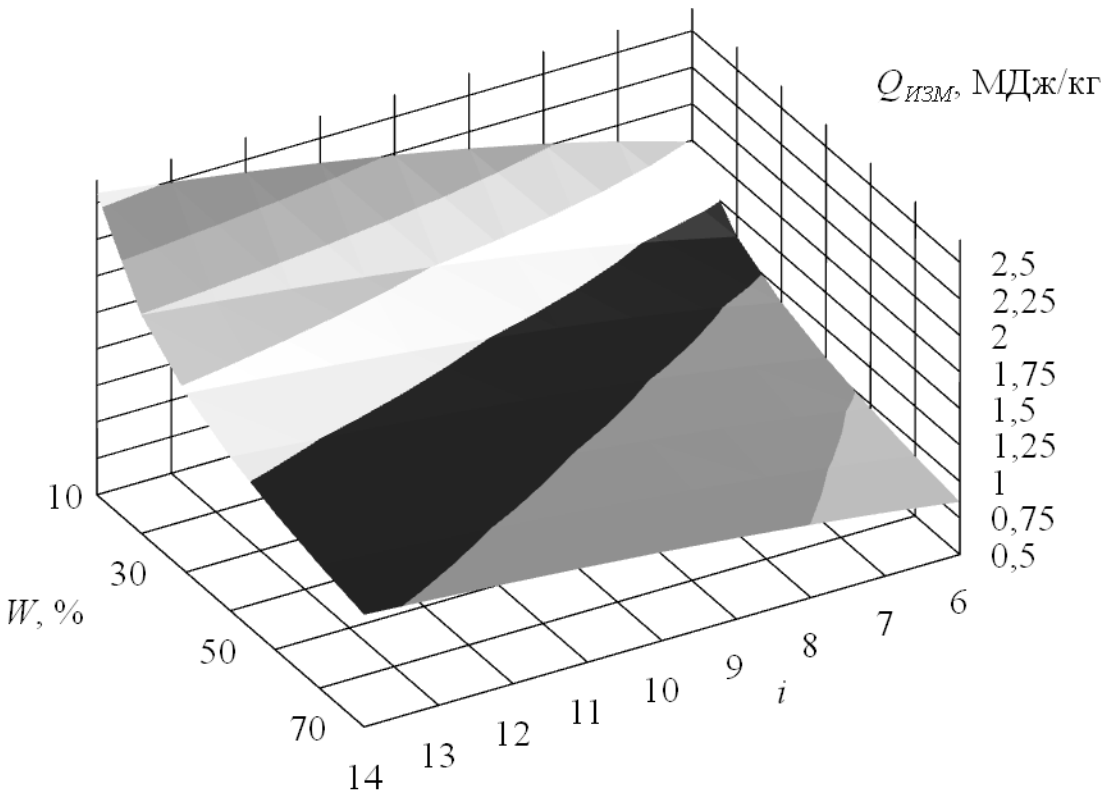

Рисунок 8. Удельная энергоёмкость измельчения отходов окорки сосны

Впоследствии опыт [1], [3] был распространён на изучение энергоёмкости измельчения древесины. В работах [4], [5] проанализированы эксперименты по измельчению древесных отходов. Обработка результатов экспериментов показала, что при измельчении ножевым рабочим органом энергоёмкость процесса выражается уравнением Кирпичева — Кика:

$$Q = K_K \ln i = a_1 W^{a_2} \ln i \,. \tag{49}$$

Коэффициенты уравнения (49) приведены в таблице 4.

Таблица 4. Коэффициенты уравнения измельчения кусковых отходов

Порода древесины	a_1		a_2	
	оценка	Δ	оценка	Δ
Берёза	8,38	1,11	–0,79	0,08
Ольха	1,98	0,34	–0,47	0,073
Осина	2,94	0,51	–0,57	0,045

Значения коэффициента пропорциональности в уравнении (49) сопоставлены со сведениями о пределе прочности древесины при перерезании (рисунок 9).

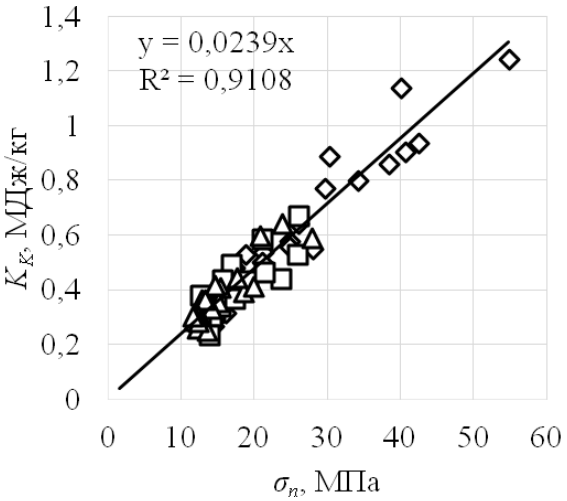

Рисунок 9. Сопоставление пределов прочности древесины при перерезании поперёк волокон и коэффициента пропорциональности в законе измельчения

В результате установлена линейная зависимость

$$K_K = 0{,}0239\sigma_n \,, \tag{50}$$

где σ_n — предел прочности древесины при перерезании поперёк волокон.

При помощи уравнений (47)—(49) определена оптимальная влажность отходов, направляемых на измельчение. В качестве критерия оптимальности принято условие

минимизации отношения энергии, затраченной на измельчение Q, и теплоты сгорания абсолютно сухого вещества, содержащегося в продукте измельчения $Q_{сух}$:

$$\frac{Q}{Q_{сух}} \to \min, \tag{51}$$

представляющего собой «энергетическую себестоимость» измельчения кусковых отходов.

Отношение (51) на примере отходов окорки ели проиллюстрировано на рисунке 10.

Теплота сгорания сухого вещества определяется по формуле

$$Q_{сух} = \frac{100 - W}{100} \cdot Q_{сд}, \tag{52}$$

где $Q_{сд}$ — массовая теплотворность абсолютно сухого продукта измельчения.

Формулировка критерия (51) с учётом формул (47)—(49), (52) следующая:

$$\frac{100 a_1 W^{a_2} \ln i}{(100 - W) Q_{сд}} \to \min. \tag{53}$$

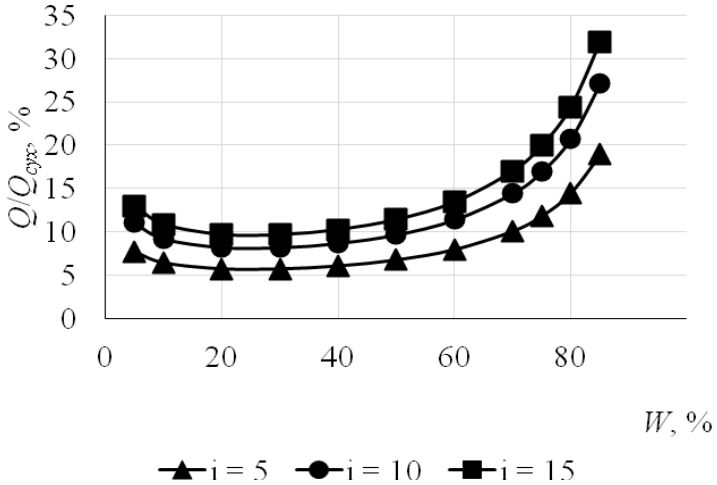

Рисунок 10. Отношение теплоты сгорания сухого вещества к затратам энергии на измельчение (отходы окорки древесины ели)

Минимум функции (53) находится из условия

$$\frac{d \dfrac{100 a_1 W^{a_2} \ln i}{(100 - W) Q_{сд}}}{dW} = 0, \tag{54}$$

т. е.

$$\frac{100 a_1 W^{a_2} a_2 \ln i}{(100 - W) W Q_{сух}} + \frac{100 a_1 W^{a_2} \ln i}{(100 - W)^2 Q_{сух}} = 0, \tag{55}$$

таким образом, функция (53) достигает минимума в точке

$$W = \frac{100a_2}{1 - a_2} \ . \tag{56}$$

Результаты определения оптимальной влажности по критерию энергетической себестоимости по формуле (56) представлены в таблице 5.

Таблица 5. Оптимальная влажность сырья, подаваемого на измельчение

Измельчаемое сырьё	$W_{опт}$, %
Отходы окорки древесины ели	25
Отходы окорки древесины сосны	27
Кусковые отходы древесины берёзы	44
Кусковые отходы древесины ольхи	32
Кусковые отходы древесины осины	36

Математические модели, основанные на законах измельчения, позволяют проводить расчёт энергозатрат на измельчение и определить оптимальное значение влажности сырья. Выявлены взаимосвязи коэффициента пропорциональности в уравнении энергоёмкости измельчения и механической прочности обрабатываемого сырья. Для дальнейшего развития математических моделей необходимы обширные лабораторные и производственные испытания по определению коэффициентов функций энергоёмкости измельчения, значения которых зависят как от свойств сырья, так и от параметров рабочего органа.

4. Модели кинетики измельчения

Контактные модели взаимодействия рабочего органа измельчителя с сырьём предназначены для определения достаточной для разрушения скорости рабочего органа или в более общем случае — для определения параметров рабочего органа, при которых возможно разрушение кусков измельчаемого материала. Энергетические модели, основанные на законах измельчения, при наличии достаточной эмпирической базы позволяют рассчитать энергоёмкость процесса измельчения и оптимизировать физические свойства сырья, например влажности, с целью достичь минимальной «энергетической себестоимости» процесса. Однако ни те ни другие модели не предназначены для управления временем выполнения операции измельчения, от которого зависит как производительность, так и энергоёмкость подготовки сырья на стадии измельчения. Для этих целей пользуются кинетическими моделями измельчения. В науке о лесозаготовительном производстве модели кинетики измельчения рассматривались, в основном, как экспериментальные зависимости.

Например, в работе [3] приводятся результаты обработки опытов по измельчению коры в роторной коррубке:

$$\begin{gathered}\omega = -328\theta^4 + 140\theta^3\tau + 138\theta^2\tau^2 - 180\theta\tau^3 + 92\tau^4 + 386\theta^3 - 412\theta^2\tau + 161\theta\tau^2 - 152\tau^3 - \\ - 0{,}438\theta^2 + 108\theta\tau + 84{,}6\tau^2 - 11{,}2\theta - 25{,}2\tau + 5{,}18\ ,\end{gathered} \tag{57}$$

где ω — содержание фракции с заданным линейным размером [%], θ — относительная фракция, τ — относительное время измельчения.

Уравнение (57) проиллюстрировано на рисунке 11.

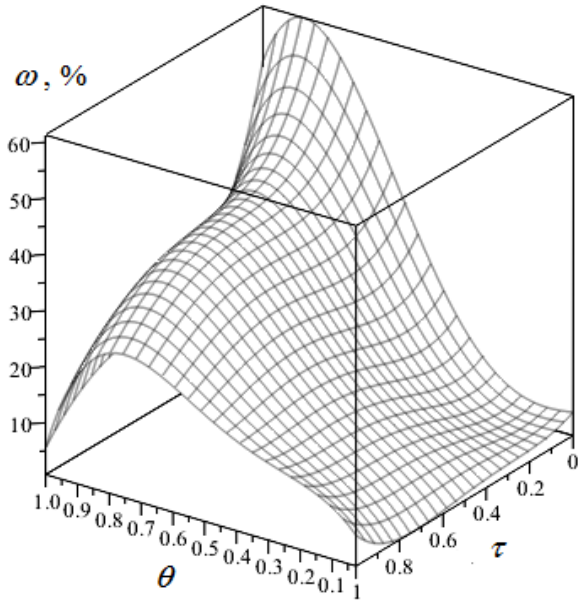

Рисунок 11. Зависимость содержания относительной фракции коры от относительного времени измельчения по результатам обработки опытов по измельчению коры в роторной ножевой коророубке

Результаты расчётов по полученным уравнениям согласуются с опытными данными, но уравнение (57) представляет собой полином 4-й степени. Очевидно, что результаты расчётов с его использованием крайне чувствительны к изменению исходных данных.

В технике предложены различные уравнения, описывающие изменение фракционного состава измельчаемого материала, обширные исследования выполнены в области горнорудной промышленности и химической технологии. Известно общее уравнение кинетики измельчения материалов:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -S(x)n(x,t) + \int_{x}^{x_{\max}} B(x,y)S(y)n(y,t)dy\,, \tag{58}$$

где $n(x, t)$ — дифференциальная функция, характеризующая распределение измельчаемого материала по размерам частиц в момент времени t, $x_{\max}$ — размер частицы измельчаемого материала, относящейся к наиболее крупной фракции, $S(x)$ — функция скорости разрушения частиц определённой крупности (селективная функция, функция отбора), $B(x, y)$ — функция распределения по крупности продуктов разрушения частиц размера y (распределительная функция).

В случаях, когда вероятность разрушения частицы не зависит от её размера в период времени $t + \Delta t$, время ожидания разрушения задаётся экспоненциальным законом Пуассона:

$$f(t,x)=\frac{1}{\bar{t}(x)}\exp\left(-\frac{t}{\bar{t}(x)}\right), \tag{59}$$

где $\bar{t}(x)$ — среднее время ожидания разрушения, определяемое параметрами технологического процесса измельчения.

Интегральное уравнение кинетики измельчения (58) исследовано при времени ожидания, распределённом по степенному закону, т. е. при предположении, что время ожидания $\bar{t}(x)$ связано с размером частицы:

$$f(t,x)=\frac{\gamma(x)}{t_0}\cdot\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{-1-\gamma(x)}, \tag{60}$$

где t_0 — параметр нормировки по времени, $\gamma(x)$ — показатель степени в функции вероятности разрушения частицы размеров x, $0 < \gamma(x) < 1$.

Решение уравнения (58) приводится в следующем виде:

$$\begin{cases}\tilde{n}(x,t)=n_0(x)\delta(t)+\mathrm{Kf}\,\tilde{n}(x,t)\\ n(x,t)=\mathrm{F}\tilde{n}(x,t)\end{cases}, \tag{61}$$

где $\tilde{n}(x,t)$ — дополнительная неизвестная функция, K, f, F — интегральные операторы:

$$\mathrm{f}=\int_0^t f(t-\tau,x)q(q,\tau)d\tau, \tag{62}$$

$$\mathrm{F}=\int_0^t F(t-\tau,x)q(q,\tau)d\tau, \tag{63}$$

$$\mathrm{K}=\int_x^{x_{\max}} K(x,y)q(y,t)d\tau, \tag{64}$$

где $F(t,x)$ — вероятность того, что частица за время t не подверглась разрушению:

$$F(t,x)=1-\int_0^t f(\tau,x)d\tau, \tag{65}$$

$K(x, y)$ — ядро:

$$K(x,y)=(1-P(x))\delta(x-y)+P(y)B(x,y), \tag{66}$$

где $P(x)$ — вероятность разрушения частицы при очередном воздействии рабочего органа, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Пример результатов расчёта представлен на рисунке 12. Решение получено в среде Mathematica (составлен программный код, литературный поиск не привёл к обнаружению в современных математических пакетах встроенных команд для автоматического решения

интегрального уравнения с учётом произвольных селективной, распределительной и функции ожидания времени разрушения).

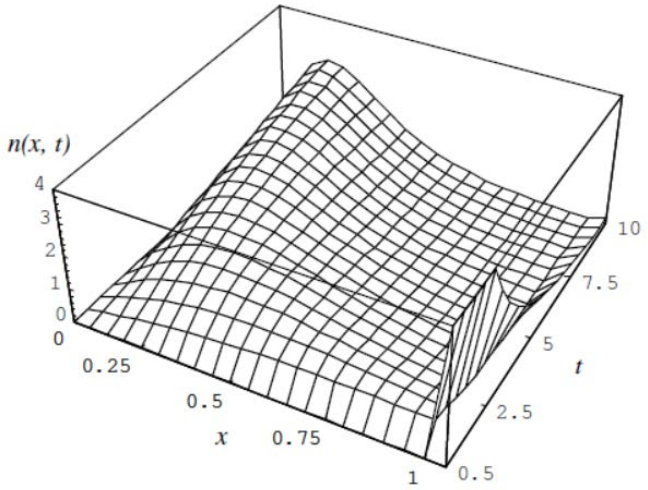

Рисунок 12. Пример результатов расчёта распределения материала по крупности

Характер изменения фракционного состава согласуется с физической картиной измельчения древесных материалов по [6]. Сложность заключается в задании вероятностей разрушения и параметров эволюции распределительной функции по времени. При большом числе узких классов материала задача разбивается на серию подзадач, параллельное решение которых, в общем случае при произвольных функциях вероятности разрушения и времени ожидания, представляет собой отдельную трудоёмкую задачу вычислительной математики. С учётом того, что для технологической практики необходим анализ влияния входных параметров на показатели процесса измельчения, целесообразно разработать более простой способ построения картины изменения фракционного состава сырья под воздействием рабочего органа измельчителя.

5. Выводы

В распространённых математических моделях измельчения древесных отходов, основанных на теории контактного взаимодействия Герца, важнейший параметр рабочего органа машины-измельчителя — угол заточки учитывается косвенно, например, при задании параметров зоны распространения воздействия рабочего органа на измельчаемый материал. Кроме того, распространённые математические модели используют линеаризованную зависимость для контактной силы, которая, тем не менее, не избавляет от необходимости прибегать к итерациям при получении решения.

Допущения, в ряде случаев, приводят к противоречивым результатам. Например, согласно полученным ранее сведениям, для измельчения коры достаточна скорость воздействия рабочего органа молотковой дробилки, соответствующая частоте вращения на уровне

500 об./мин. Практика свидетельствует о том, что для помола коры во фракцию, достаточную для брикетирования, частота вращения рабочего органа должна быть в несколько раз выше.

В дальнейших исследованиях представляется целесообразным развить подход, учитывающий влияние формы индентора на контактную силу непосредственно, методы механики контактного взаимодействия позволяют провести уточнение существующих математических моделей. Кроме того, в дальнейших исследованиях требуется уточнить параметры взаимодействия рабочего органа с измельчаемым материалом, учесть нелинейный характер распространения контактного напряжения в материале.

Математические модели, основанные на энергетических законах измельчения, позволяют проводить расчёт энергозатрат на измельчение и определить оптимальное значение влажности сырья. Выявлены взаимосвязи коэффициента пропорциональности в уравнении энергоёмкости измельчения и механической прочности обрабатываемого сырья, но результаты получены без учёта параметров рабочего органа. Для дальнейшего развития математических моделей необходимы обширные лабораторные и производственные испытания по определению коэффициентов функций энергоёмкости измельчения, значения которых зависят как от свойств сырья, так и от параметров рабочего органа измельчителя.

Для управления временем измельчения, от которого зависит как производительность, так и энергоёмкость подготовки сырья на стадии измельчения, пользуются кинетическими моделями измельчения. В науке о лесозаготовительном производстве модели кинетики измельчения рассматривались, в основном, как экспериментальные зависимости. Получено уравнение кинетики в виде полинома 4-й степени, результаты расчётов с его использованием крайне чувствительны к изменению исходных данных.

В технике известны общие модели кинетики измельчения, основанные на интегро-дифференциальных уравнениях баланса фракций. Сложность их использования заключается в задании вероятностей разрушения и параметров эволюции распределительной функции по времени. При большом числе узких классов материала задача разбивается на серию подзадач, параллельное решение которых, в общем случае при произвольных функциях вероятности разрушения и времени ожидания, представляет собой отдельную трудоёмкую задачу вычислительной математики. С учётом того, что для технологической практики необходим анализ влияния входных параметров на показатели процесса измельчения, целесообразно разработать более простой способ построения картины изменения фракционного состава сырья под воздействием рабочего органа измельчителя.

Список литературы

1. *Ефимова Е. В.* Измельчение древесной коры на оборудовании с молотковыми рабочими органами: автореф. дис. … канд. техн. наук. СПб.: СПбГЛТУ, 2013. 19 с.
2. *Григорьев И. В., Шапиро В. Я., Гулько А. Е.* Математическая модель групповой окорки лесоматериалов в окорочных барабанах // Научное обозрение. 2012. № 4. С. 154—171.

3. *Бастриков Д. В., Власов Ю. Н., Кучер С. В.* Исследование энергоёмкости измельчения отходов окорки установкой с ножевым рабочим органом // Лесотехнический журнал. 2018. Т. 8, № 1. С. 120—128.
4. *Бастриков Д. В., Куницкая О. А.* Анализ исследований по повышению энергоэффективности измельчения отходов окорки // Resources and Technology. 2018. Т. 15, № 4. С. 1—30.
5. *Бастриков Д. В., Куницкая О. А., Григорьев М. Ф.* Исследование процесса измельчения отходов окорки установкой с ножевым рабочим органом // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2019. № 3. С. 21—25.
6. *Мардер М. В.* Опыт сжигания коры на целлюлозно-бумажных комбинатах. М., 1967. 159 с.

References

1. *Efimova E. V.* Grinding of wood bark on equipment with hammer working bodies // Autoreferat Dis. … Cand. Techn. sciences'. St. Petersburg: Spbgltu, 2013. 19 p. (In Russ.)
2. *Grigorev I. V., Shapiro V. Ya., Gulko A. E.* Mathematical model of group debarking of wood products in debarking drums // Scientific review. 2012. No. 4. Pp. 154—171. (In Russ.)
3. *Bastrikov D. V., Vlasov Yu. N., Kucher S. V.* Study of energy intensity of shredding of debarking waste by installation with a knife working body // Lesotehnichesky Zhurnal. 2018. Vol. 8, No. 1. Pp. 120—128. (In Russ.)
4. *Bastrikov D. V., Kunitskaya O. A.* Analysis of research on improving the energy efficiency of shredding debarking waste // Resources and Technology. 2018. Vol. 15, No. 4. Pp. 1—30. (In Russ.)
5. *Bastrikov D. V., Kunitskaya O. A., Grigorev M. F.* Study of the process of shredding debarking waste with a knife working body // Repair. Recovery. Modernization. 2019. No. 3. Pp. 21—25. (In Russ.)
6. *Marder M. V.* Experience of burning bark at pulp and paper mills. Moscow, 1967. 159 p. (In Russ.)

© Власов Ю. Н., Григорьев И. В., Куницкая О. А., Хитров Е. Г., 2020