УДК 532.517.4: 004.032.24

Моделирование турбулентных течений вязкого сжимаемого газа с использованием параллельных вычислений

А. А. Шумихин

Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, д. 34

Аннотация. В работе представлена методика, использующая параллельные вычисления для моделирования течения газа в тракте твёрдотопливного ракетного двигателя. Алгоритм позволяет производить параллельные вычисления на компьютерах имеющих многоядерный центральный процессор (CPU). Приведена система уравнений гидромеханики описывающая осесимметричный поток сжимаемого вязкого газа. Система уравнений записана в цилиндрической системе координат. Алгоритм разработан на основе явной модифицированной схемы Стигера-Уорминга, позволяющий производить сквозной расчёт всего тракта двигателя, как дозвукового течения продуктов сгорания в камере, так и сверхзвукового течения в сопле. Разработанная программа использует предложенный алгоритм для проведения параллельных вычислений на компьютере с многоядерным CPU. В работе приведены результаты исследований внутрикамерного нестационарного течения сжимаемого вязкого газа, полученные с использованием разработанной параллельной программы, и определена зависимость относительной вычислительной производительности компьютерной системы от количества ядер CPU участвующих в расчёте.

Ключевые слова: параллельные вычисления, турбулентность, нестационарное течение, вычислительная гидрогазодинамика.

✉ Андрей Шумихин, e-mail: shumihin@udman.ru

Numerical Simulation of a Compressible Viscous Gas Flow Using Parallel Calculations

Andrey A. Shumikhin

Udmurt Federal Research Center UB RAS (T. Baramzina Str., 34, Izhevsk, 426067, Russian Federation)

Summary. The paper presents a technique that uses parallel calculations to simulate the flow of gas in the path of a solid-fuel rocket engine. The algorithm allows you to perform parallel calculations on computers with a multi-core central processor (CPU). A system of equations of hydromechanics describing an axisymmetric flow of a compressible viscous gas is given. The system of equations is written in a cylindrical coordinate system. The algorithm is developed on the basis of an explicit modified Stiger-Warming scheme, which allows for end-to-end calculation of the entire engine path, both the subsonic flow of combustion products in the chamber and the supersonic flow in the nozzle. The increasing complexity of modern problems of fluid mechanics solved using computer technologies requires the use of high-performance computing systems using parallel computing to create effective algorithms. Currently, effective parallel algorithms are being developed that allow calculations of computational mechanics problems using systems that have a speed of 1 Teraflop or higher. The developed program uses the algorithm proposed in the work for conducting parallel calculations on a computer with a multicore CPU. The paper presents the results of studies of the intra-chamber unsteady flow of a compressible viscous gas obtained using the developed parallel program, and the dependence of the relative computational performance of a computer system on the number of CPU cores involved in the calculation is determined. From the results obtained, it can be concluded that to increase the efficiency of parallel calculations using the developed program, when using more than 3 cores in the calculation, a computer system with a higher data exchange rate between the cores of the central processor and the computer's RAM is required. Accordingly, further optimization of the program code is also required in order to reduce the data exchange traffic of CPU cores with RAM.

Keywords: parallel calculations, turbulence, unsteady flow, computational hydro-gas dynamics.

✉ Andrey Shumikhin, e-mail: shumihin@udman.ru

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование внутренних турбулентных потоков сжимаемого газа имеет важное значение для исследования газодинамических процессов протекающих в твердотопливных ракетных двигателях (РДТТ). Во многих случаях постановка физического эксперимента связана со значительными трудностями, что обуславливает актуальность динамичного развития методов математического моделирования таких течений. Необходимо отметить, что моделирование внутрикамерных процессов является задачей высокой сложности. Турбулентный характер течения, нестационарность протекающих в ракетном двигателе процессов, высокие градиенты давления обуславливают сложность моделирования течения продуктов сгорания в РДТТ [1 – 3]. Это, с одной стороны, объясняет необходимость совершенствования уже известных, опробованных в практических расчётах методов, с целью более эффективного использования ими увеличивающейся вычислительной производительности компьютеров, а с другой стороны, необходимость создания новых программ, отвечающих современным практическим потребностям, позволяющим использовать более сложные постановки решаемых задач. Рост сложности современных задач механики жидкости и газа, решаемых с использованием компьютерных технологий, требует для создания эффективных алгоритмов применения высокопроизводительных вычислительных систем использующих параллельные вычисления. В настоящее время разрабатываются эффективные параллельные алгоритмы позволяющие проводить расчеты задач вычислительной механики с использованием систем, которые имеют быстродействие 1 Терафлоп и выше [4].

В задачах гидрогазодинамики повышенные требования к производительности компьютеров обуславливаются сложными нелинейными моделями исследуемых течений, пространственным характером задачи, и как следствие, большим количеством ячеек расчётной сетки [5]. Решение задачи на многопроцессорной высокопроизводительной вычислительной технике связывается с необходимостью создания программы, выполняющей несколько подзадач параллельно, то есть одновременно и независимо друг от друга, с последующим обменом информацией между ними. Технически это достигается либо за счёт использования центральных процессоров (CPU) с большим количеством ядер, работающих под общей памятью, либо за счет объединения нескольких компьютеров в одну вычислительную систему, работающей соответственно с распределенной памятью. Уже в настоящее время массово выпускаемые процессоры имеют от 4 до 8 ядер, а компании производящие компьютерную технику заявляют о своих планах по выпуску процессоров имеющих 32 – 64 ядра. В ближайшей перспективе возможно налаживание производства процессоров с сотнями ядер [6].

Необходимо отметить, что наряду с проблемой увеличения мощности многопроцессорных вычислительных систем важным является разработка соответствующих математических алгоритмов и программного обеспечения. Разработка параллельного программного обеспечения имеет ряд особенностей, так как использование многопроцессорной вычислительной техники накладывает определенные требования на построение численных методов и программную реализацию алгоритмов для решения прикладных задач [4]. Одним из требований является минимизация обмена информацией между процессорами вычислительной системы во время расчета. При большом объеме передаваемой информации система значительную часть времени будет тратить на обмен данными между процессорами по каналам связи, а не на численные вычисления производимые процессорами. Необходимо отметить, что для явных схем время затрачиваемое на обмен данными является достаточно незначительным по сравнению с временем затрачиваемым на общий объем вычислительной работы, а эффективность параллельных вычислений приближается к 100 % при увеличении количества узлов сетки. При этом особую ценность представляют явные схемы, использующие неструктурированные сетки и обладающие хорошей устойчивостью [5]. Разработка простого и эффективного

параллельного алгоритма, как правило, намного более сложная задача, чем создание его последовательной версии. В некоторых случаях для создания параллельного алгоритма даже приходится разрабатывать новую математическую модель решаемой задачи, которая позволяет построить алгоритм, обладающий внутренним параллелизмом. Кроме того, создание параллельных алгоритмов приводит к развитию, казалось бы, далекого непосредственно от проблем механики жидкости и газа, математического и программного обеспечения с использованием параллельных вычислений (вычислительных сред позволяющих реализовать параллельные вычисления, программ многопроцессорной визуализации, динамической перезагрузки процессоров при расчете и т. д.) [4 – 11].

В данной работе для моделирования турбулентного течения сжимаемого газа в тракте ракетного двигателя предложена явная вычислительная методика, основанная на численном интегрировании уравнений механики жидкости и газа, записанных в цилиндрической системе координат [12 – 16]. Предложенный алгоритм пригоден для сквозного расчёта всего тракта ракетного двигателя, как дозвукового течения продуктов сгорания в камере двигателя, так и сверхзвукового течения в сопле. Алгоритм основан на явной модифицированной схеме расщепления векторов потоков (схеме Стигера-Уорминга) [17]. Разработанная программа использует параллельный алгоритм для проведения вычислений на компьютере с многоядерным CPU (процессор имеет 4 ядра). В работе приведены результаты исследований внутрикамерного нестационарного течения сжимаемого вязкого газа, полученные с использованием разработанной параллельной программы, и определена зависимость относительной вычислительной производительности компьютерной системы от количества ядер CPU участвующих в расчёте.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для моделирования осесимметричного течения продуктов сгорания в двигателе использовалась система основных уравнений в цилиндрической системе координат. В векторном виде система записывается так [1, 12 – 14]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_r}{\partial r} + F_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} r L_x + \frac{\partial}{\partial r} r L_r \right) + L_{\theta\theta}, \quad (1)$$

где Q – вектор переменных; $F_x, F_r, F_{\theta\theta}$ – векторы конвективных потоков; $L_x, L_r, L_{\theta\theta}$ – векторы вязких напряжений; x, r – осевая и радиальная координаты; t – время. Векторы переменных, конвективных потоков (2) [12, 13] и вязких напряжений (3) [13 – 16] имеют вид

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uh \end{bmatrix}, \quad F_r = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vh \end{bmatrix}, \quad F_{\theta\theta} = \frac{\rho}{r} \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 \\ vh \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xr} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xr} \end{bmatrix}, \quad L_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx} \\ \tau_{rr} \\ u\tau_{rx} + v\tau_{rr} \end{bmatrix}, \quad L_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

здесь u, v – компоненты вектора скорости, p – давление, ρ – плотность, e – удельная энергия, h – удельная энтальпия, $\tau_{xx}, \tau_{rr}, \tau_{xr}, \tau_{rx}, \tau_{\theta\theta}$ – компоненты тензора вязких напряжений.

Компоненты тензора вязких напряжений определяются выражениями [1, 13 – 15]

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2(\mu + \mu_{sgs}) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_{sgs}) \operatorname{div} \Omega, \\ \tau_{rr} &= 2(\mu + \mu_{sgs}) \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_{sgs}) \operatorname{div} \Omega, \\ \tau_{xr} &= \tau_{rx} = (\mu + \mu_{sgs}) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{\theta\theta} &= 2(\mu + \mu_{sgs}) \frac{v}{r} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_{sgs}) \operatorname{div} \Omega,\end{aligned}\tag{4}$$

где $\Omega = (u; v)$ – вектор скорости, μ – динамическая вязкость, μ_{sgs} – подсеточная вихревая вязкость. Дивергенция вектора скорости вычислялась с использованием формулы

$$\operatorname{div} \Omega = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}.\tag{5}$$

Полная удельная энергия, полная удельная энтальпия и давление определялись так

$$e = \frac{u^2 + v^2}{2} + C_v T, \quad h = \frac{u^2 + v^2}{2} + C_p T, \quad p = \rho(\gamma - 1) \left(e - \frac{u^2 + v^2}{2} \right),\tag{6}$$

здесь C_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объёме, C_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, T – температура, R – удельная газовая постоянная, γ – показатель адиабаты.

Подсеточная вихревая вязкость μ_{sgs} вычислялась с использованием метода Смагоринского, обобщённого для сжимаемых течений [18, 19]. Данный метод в частности использовался в работах [19, 20].

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

В разработанной явной вычислительной методике использовался алгоритм, основанный на модифицированной схеме Стигера-Уорминга (методе расщепления векторов потоков), предложенной в работе [17]. Схема так же описана в работах [13, 16]. Вектор конвективных потоков F_x можно представить в следующем виде

$$F_x = A_x Q,\tag{7}$$

где $A_x = \frac{\partial F_x}{\partial Q}$ матрица Якоби. Собственные числа матрицы A_x равны [17]

$$\lambda_{x1} = \lambda_{x2} = u, \quad \lambda_{x3} = u + c, \quad \lambda_{x4} = u - c,\tag{8}$$

где $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ – скорость звука.

С использованием (7, 8) вектор F_x может быть записан таким образом

$$F_x = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma - 1)\lambda_{x1} + \lambda_{x3} + \lambda_{x4} \\ 2(\gamma - 1)\lambda_{x1}u + \lambda_{x3}(u + c) + \lambda_{x4}(u - c) \\ 2(\gamma - 1)\lambda_{x1}v + \lambda_{x3}v + \lambda_{x4}v \\ 2(\gamma - 1)\lambda_{x1}h + \lambda_{x3}h + \lambda_{x4}h \end{bmatrix}.\tag{9}$$

Основой схемы Стигера-Уорминга, как и других методов основанных на подходе Годунова, является расщепление вектора F_x на две части

$$F_x = F_x^+ + F_x^-, \quad (10)$$

где вектор F_x^+ соотносится с вектором, сформированным из положительных собственных чисел матрицы A_x . Соответственно вектор F_x^- будет соотноситься с вектором, сформированным из отрицательных собственных чисел. Аналогичным образом расщепляются и собственные числа матрицы Якоби

$$\lambda_x(Q) = \lambda_x^+(Q^+) + \lambda_x^-(Q^-), \quad \lambda_x^+(Q^+) = \frac{\lambda_x(Q^+) + |\lambda_x(Q^+)|}{2}, \quad \lambda_x^-(Q^-) = \frac{\lambda_x(Q^-) - |\lambda_x(Q^-)|}{2}. \quad (11)$$

Соответственно применяя (9) – (11) можно записать

$$F_x^+ = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ + \lambda_{x3}^+ + \lambda_{x4}^+ \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ u^+ + \lambda_{x3}^+ (u^+ + c^+) + \lambda_{x4}^+ (u^+ - c^+) \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ v^+ + \lambda_{x3}^+ v^+ + \lambda_{x4}^+ v^+ \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ h^+ + \lambda_{x3}^+ h^+ + \lambda_{x4}^+ h^+ \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$F_x^- = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- + \lambda_{x3}^- + \lambda_{x4}^- \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- u^- + \lambda_{x3}^- (u^- + c^-) + \lambda_{x4}^- (u^- - c^-) \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- v^- + \lambda_{x3}^- v^- + \lambda_{x4}^- v^- \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- h^- + \lambda_{x3}^- h^- + \lambda_{x4}^- h^- \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для дискретизации системы основных уравнений (1) применялся метод конечных объёмов [13, 16]. С использованием выражений (10) - (13), определяются значения конвективных потоков F_x , для всех ячеек расчетной области. Аналогичные операции производятся для вектора F_r . Вычисление значений вектора $F_{\theta\theta}$ производятся с использованием значений вектора параметров в центрах контрольных объёмов. Вязкие потоки $L_x, L_r, L_{\theta\theta}$ аппроксимировались методом центральных разностей, с использованием выражений (3) - (5).

По времени дискретизация выполнялась с использованием явной схемы 1-го порядка точности (схема Эйлера, одношаговая явная двухслойная схема). Конвективные и вязкие потоки на текущем временном слое $F_x^n, F_r^n, F_{\theta\theta}^n$ и $L_x^n, L_r^n, L_{\theta\theta}^n$ рассчитывались с использованием значений вектора переменных также на текущем временном слое Q^n . Далее с использованием вычисленных потоков определялись значения вектора переменных на следующем временном слое Q^{n+1} .

В итоге, по известным значениям Q^{n+1} соответственно рассчитывались все параметры газа на $n+1$ временном слое.

Подходы, применяемые для организации параллельных вычислений, описаны в статьях [7 – 8]. Блок-схема разработанной программы, использующей параллельные вычисления, приведена на рис. 1.

Рис. 1. Блок-схема алгоритма параллельных вычислений
Fig. 1. Block diagram of the parallel computing algorithm

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты проводились для модельного РДТТ с центральным телом описанного в работе [16]. В начальный момент времени давление газа в камере задавалась $p_0 = 10^6$ Па и температура $T_0 = 294$ К. Скорость горения топлива определялась по формуле $\omega = \omega_0 (p/10^5)^g$, где ω_0 – скорость горения при атмосферном давлении, g – константа. В расчётах скорость горения задавалась $\omega_0 = 0.005$ м/с. Константа в формуле горения принималась равной $g = 0.7$. На рис. 2 показана поверхность горения заряда твёрдого топлива. Температура продуктов сгорания твёрдого топлива задавалась $T_{гор} = 3300$ К. Показатель адиабаты продуктов сгорания принимался $\gamma = 1.18$.

Рис. 2. Зона вдува продуктов сгорания твёрдого топлива с поверхности заряда
Fig. 2. The zone of injection of solid fuel combustion products from the charge surface

Количество контрольных объёмов составляло 251760. Шаг по времени задавался равным $\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-8}$ с. В расчётах использовался компьютер с многоядерным CPU, имеющим 4 ядра. В таблице приведены время выполнения 100 итераций по времени, относительная вычислительная производительность и величина общей загрузки процессора для разного количества ядер CPU участвующих в расчёте.

Таблица – Результаты тестовых расчётов
Table – Results of test calculations

Количество ядер CPU участвующих в расчёте (количество параллельно выполняемых задач) The number of CPU cores involved in the calculation (the number of parallel tasks)	Время выполнения 100 итераций, с Execution time 100 iterations, s	Относительная вычислительная производительность Relative computing performance	Общая загрузка CPU, % Total CPU usage, %
1	122	1	28
2	72	1.89	51
3	58	2.10	75
4	55	2.26	98

На рис. 3 приведена зависимость относительной вычислительной производительности компьютерной системы от количества ядер CPU участвующих в расчёте. Из полученных результатов видно, что для данной разработанной программы при использовании более 3 ядер в расчёте увеличение вычислительной производительности становится минимальным. В расчётах использовался вариант с минимальной площадью критического сечения [16]. Результаты исследований течения сжимаемого вязкого газа в твёрдотопливном ракетном двигателе, полученные с использованием разработанной параллельной программы приведены на рис. 4 – 6. Распределения осевой скорости в двигателе приведены на рис. 4, давления на рис. 5 и плотности продуктов сгорания твёрдого топлива на рис. 6.

Рис. 3. Зависимость относительной вычислительной производительности компьютерной системы от количества ядер CPU участвующих в расчёте

Fig. 3. Dependence of the relative computing performance of a computer system on the number of CPU cores involved in the calculation

Рис. 4. Распределение осевой скорости в двигателе при минимальной площади $S_{кр}$

Fig. 4. Distribution of axial velocity in the engine with a minimum critical cross-sectional area

Рис. 5. Распределение давления в двигателе при минимальной площади $S_{кр}$
 Fig. 5. Distribution of pressure in the engine with a minimum critical cross-sectional area

Рис. 6. Распределение плотности в двигателе при минимальной площади $S_{кр}$
 Fig. 6. Distribution of density in the engine with a minimum critical cross-sectional area

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм и разработана программа, позволяющая проводить моделирование внутренних нестационарных турбулентных течений сжимаемого вязкого газа с использованием параллельных вычислений.

Проведены тестовые численные исследования ракетного двигателя с использованием разработанной параллельной программы. Представлены результаты моделирования течения в двигателе.

Определена зависимость относительной вычислительной производительности компьютерной системы от количества ядер CPU участвующих в расчёте.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что для увеличения эффективности параллельных вычислений с использованием разработанной программы, при использовании более 3 ядер в расчёте, требуется компьютерная система с более высокой скоростью обмена данными между ядрами центрального процессора и оперативной памятью компьютера (RAM). Соответственно, также требуется дальнейшая оптимизация программного кода с целью уменьшения трафика обмена данными CPU с RAM.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный метод расчёта турбулентных течений и теплообмена в двигателях летательных аппаратов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1988, № 1. С. 49-53.
2. Соломонов Ю. С., Липанов А. М., Алиев А. В., Дорофеев А. А., Черепов В. И. Твёрдотопливные регулируемые двигательные установки. М.: Машиностроение, 2011. 416 с.
3. Липанов А. М., Бобрышев В. П., Алиев А. В., Спиридонов Ф. Ф., Лисица В. Д. Численный эксперимент в теории РДТТ / под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург: УИФ Наука, 1994. 302 с.
4. Четверушкин Б. Н. Высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы // Вестник Российской академии наук. 2002. Т. 72, № 9. С. 786-794.
5. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014. 536 с.
6. Гергель В. П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. 50 с.
7. Параллельные вычисления в Lazarus. URL: <https://yandex.ru/turbo/webdelphi.ru/s/2020/06/parallelnye-vychisleniya-v-lazarus-modul-mtprocs/> (дата обращения: 05.04.2021).
8. Распределенные вычисления на FreePascal под Windows. URL: <http://www.freepascal.ru/article/raznoe/20051207110629/> (дата обращения: 05.04.2021).
9. Фьюэр А. Р., Джехани Н. Языки программирования Ада, Си, Паскаль. Сравнение и оценка. Пер. с англ. И.А. Леонен. М.: Радио и связь, 1989. 368 с.
10. Пайл Я. Ада - язык встроенных систем. Пер. с англ. Н.Е. Богородской и др. М.: Финансы и статистика, 1984. 238 с.
11. Перминов О. Н. Введение в язык программирования Ада. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.
12. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
13. Липанов А. М., Дадикова С. Ю., Шумихин А. А., Королева М. Р., Карпов А. И. Численное моделирование внутрикамерных нестационарных турбулентных течений. Часть 1 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12, № 1. С. 32-43. <https://doi.org/10.14529/mmp190103>
14. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. Пер. с англ. под ред. Р.В. Торнера. М.: Химия, 1984. 632 с.
15. Лыков А. В. Теплообмен. Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1971. 560 с.
16. Шумихин А. А., Дадикова С. Ю. Численное моделирование течения вязкого сжимаемого газа в РДТТ с центральным телом // Химическая физика и мезоскопия. 2020, Т. 22, № 2. С. 184-196. <https://doi.org/10.15350/17270529.2020.2.18>
17. Steger J. L., Warming R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods // Journal of Computational Physics, 1981, vol. 40, iss. 2, pp. 263-293. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90210-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90210-2)
18. Yoshizawa A. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling // Physics of Fluids, 1986, vol. 29, no. 7, pp. 2152-2164. <https://doi.org/10.1063/1.865552>
19. Pino Martin M., Piomelli U., Candler G. V. Subgrid-Scale Models for Compressible Large-Eddy Simulations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 361-376. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/PL00020896.pdf>
20. Шумихин А. А., Королева М. Р., Дадикова С. В., Карпов А. И. Использование схемы WENO для моделирования турбулентного течения в канале с обратным уступом // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 3. С. 460-469. <https://doi.org/10.20537/vml170313>

REFERENCES

1. Lipanov A. M., Kisarov Yu. F., Klyuchnikov I. G. Chislennyy metod rascheta turbulentnykh techeniy i teploobmena v dvigatelyakh letatel'nykh apparatov [A numerical method for calculating turbulent flows and heat transfer in aircraft engines]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatcionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics], 1988, no. 1, pp. 49-53. (In Russian).
2. Solomonov Yu. S., Lipanov A. M. *Regulable Solid Propellant Rocket Engines*. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2011. 416 p.
3. Lipanov A. M., Bobryshev V. P., Aliev A. V., Spiridonov F. F., Lisitsa V. D. *Chislennyi eksperiment v teorii RDIT* [Numerical Experiment in the Theory of Solid Propellant Rocket Motors]. Ekaterinburg: UIF Nauka Publ., 1994. 302 p.
4. Chetverushkin B. N. Vysokoproizvoditel'nye mnogoprocessornye vychislitel'nye sistemy [High-performance multiprocessor computing systems]. *Vestnik Rossiyskoy akademii nauk* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences], 2002, vol. 72, no. 9, pp. 786-794. (In Russian).

5. Volkov K. N., Deryugin Yu. N., Emel'yanov V. N., Karpenko A. G., Kozelkov A. S., Teterina I. V. *Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschyotov na nestruturizirovannykh setkakh* [Methods for accelerating gas dynamic calculations on unstructured meshes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2014. 536 p.
6. Gergel' V. P. *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya dlya mnogoyadernykh mnogoprocessornykh system* [High performance computing for multi-core multiprocessor systems]. Nizhny Novgorod: NNGU im. N.I. Lobachevskogo Publ., 2010. 50 p.
7. *Parallel'nye vychisleniya v Lazarus* [Parallel computing in Lazarus]. URL: <https://yandex.ru/turbo/webdelphi.ru/s/2020/06/parallelnye-vychisleniya-v-lazarus-modul-mtprocs/> (accessed April 5, 2021).
8. *Raspredelennye vychisleniya na FreePascal pod Windows* [Distributed computing on FreePascal for Windows]. URL: <http://www.freepascal.ru/article/raznoe/20051207110629/> (accessed April 5, 2021).
9. Feuer A. R., Gehani N. *Comparing and Assessing Programming Languages: Ada, C. and Pascal*. Computer Science, Prentice-Hall, inc. 1984.
10. Pyle I. C. *The Ada programming language: a guide for programmers*. Endlewood Cliffs, N.Y., 1981.
11. Perminov O. N. *Vvedenie v yazyk programmirovaniya Ada* [Introduction to the Ada Programming Language]. Moscow: Radio i svyaz' Publ., 1991. 288 p.
12. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krajko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 400 p.
13. Lipanov A. M., Dadikina S. Yu., Shumikhin A. A., Koroleva M. R., Karpov A. I. Chislennoe modelirovanie vnutrikamernykh nestatsionarnykh turbulentnykh techeniy. Chast' 1 [Numerical simulation intra-chamber of unsteady turbulent flows stimulate. Part 1]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2019, vol. 12, no. 1, pp. 32-43.2019. (In Russian). <https://doi.org/10.14529/mmp190103>
14. Tadmor Z., Gogos C. G. *Principles of polymer processing*. New York etc., John Wiley & Sons, 1979.
15. Lykov A. V. *Teplomassoobmen* [Heat and mass transfer]. Spravochnik. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: Energiya Publ., 1971. 560 p.
16. Shumikhin A. A., Dadikina S. Yu. Chislennoe modelirovanie techeniya vyazkogo szhimaemogo gaza v RDIT s tsentral'nym telom [Numerical simulation of a compressible viscous gas flow in solid-fuel rocket engine with a central body]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2020. vol. 22. no. 2, pp. 384-396 pp. (In Russian). <https://doi.org/10.15350/17270529.2020.2.18>
17. Steger J. L., Warming R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 40, iss. 2, pp. 263-293. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90210-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90210-2)
18. Yoshizawa A. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. *Physics of Fluids*, 1986, vol. 29, no. 7, pp. 2152-2164. <https://doi.org/10.1063/1.865552>
19. Pino Martin M., Piomelli U., Candler G. V. Subgrid-Scale Models for Compressible Large-Eddy Simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2000, vol. 13, no. 5, pp. 361-376. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/PL00020896.pdf>
20. Shumikhin A. A., Koroleva M. R., Dadikina S. V., Karpov A. I. Ispol'zovanie skhemy WENO dlya modelirovaniya turbulentnogo techeniya v kanale s obratnym ustupom [Application of WENO scheme for simulation of turbulent flow in a channel with backward-facing step]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 460-469. (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vml70313>

Поступила 23.07.2021; после доработки 30.07.2021; принята к опубликованию 02.08.2021
Received 23 July 2021; received in revised form 30 July 2021; accepted 02 August 2021

Шумихин Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, Ижевск, Российская Федерация
e-mail: shumihin@udman.ru

Andrey A. Shumikhin, Cand. Sci. (Phys.-Math.),
Researcher, Udmurt Federal Research Center UB RAS,
Izhevsk, Russian Federation, e-mail: shumihin@udman.ru