SPH-ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО МЕТОДА ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПЛАТИНОВЫХ СТМ-ЗОНДОВ

ШЕЛКОВНИКОВ Е. Ю., ТЮРИКОВ А. В., ГУЛЯЕВ П. В., ЖУЙКОВ Б. Л.

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН,
426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрены вопросы исследования модели процесса изготовления платиновых зондов сканирующего туннельного микроскопа. Для моделирования разрезания платиновой заготовки зонда применен трехмерный метод гидродинамики сглаженных частиц с искусственными вязкостью и напряжением, для которого разработана итерационная процедура диагонализации тензора напряжений. Выполнен анализ влияния параметров процесса механического разрезания (скорости реза, силы вытягивания заготовки и начального диаметра заготовки) на результирующую макроскопическую форму зондирующего острия.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сканирующий туннельный микроскоп, платиновая игла, зондирующее острие, метод гидродинамики сглаженных частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Платина является одним из самых перспективных материалов для зондирующего острия сканирующего туннельного микроскопа (СТМ) благодаря своей значительной химической инертности, что улучшает качество эксперимента в области зондовой микроскопии [1 – 3]. Однако значительным недостатком платиновых зондов является их высокая цена. Разработка технологического процесса изготовления таких зондов связана со значительными материальными затратами при проведении множества экспериментов по разрезанию заготовок. Поэтому создание модели изготовления зонда, адекватно отражающей влияние большинства параметров эксперимента на форму и качество острия, является важной и актуальной задачей. Работа посвящена моделированию процесса формирования шейки заготовки зондирующих острий, обеспечивающей минимальный радиус кончика и заданный профиль зондирующего острия.

Форма зондирующих острий существенно влияет на результаты СТМ-экспериментов, что проявляется как на макроскопическом уровне, так и в наноскопическом масштабе. В УдмФИЦ УрО РАН выполнен ряд теоретических исследований, связанных с изготовлением вольфрамовых зондирующих острий методом электрохимического травления [4, 5]. Однако применение зондов, выполненных из платиновой проволоки, в некоторых случаях более целесообразно. Технология изготовления платиновых зондов существенно отличается от технологии для острий из вольфрама. [2, 3, 6, 7]. Травление платины значительно менее целесообразно, чем вольфрама [2, 3, 6, 7], поэтому платиновые зондирующие острия обычно изготавливаются методом механического разреза.

Ранее [2] авторами изучалась возможность исследования процесса резания платиновой проволоки с применением метода частиц. Однако, несмотря на получение приемлемых результатов в некоторых численных экспериментах, следует признать, что метод частиц более приемлем лишь в своем крайнем варианте – методе молекулярной динамики. Его применение для изучения разрушения макроскопических объектов является менее разумным из-за отсутствия подходящих для металлов параметров потенциалов взаимодействия (таких, например, как MEAM).

Одним из наиболее перспективных методов моделирования процессов разрушения твердого тела на макроскопическом уровне является метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) [8 – 14]. В отличие от классической эйлеровой гидродинамики (которая используется для моделирования поведения жидкостей и газов и требует наличия фиксированной конечно-

разностной сетки) SPH возможно использовать для моделирования как жидкостей, так и твердых тел. Для его использования нет необходимости определения сетки, поэтому SPH хорошо подходит для решения задач моделирования столкновений и деформации твердых тел, к классу которых относится задача о механическом разрезании платиновой заготовки.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В методе SPH основные уравнения, определяющие состояние прочных сред (уравнения неразрывности, а также сохранения энергии и импульса), заменяются на свои дискретные аналоги описывающие среду, искусственно разделенную на частицы [9, 14]. В этих уравнениях основные величины усредняются посредством сглаживающей функции W (называемой также функцией ядра) по окружающим частицам, находящимся в пределах сглаживающей длины h . Так плотность вещества в точке $\vec{r}$ в SPH описывается зависимостью:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j m_j W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (1)$$

где m_j – масса j -й частицы; $W(\vec{r}, h)$ – функция ядра; h – параметр сглаживающей длины. При этом уравнения движения в лагранжевой форме можно представить как:

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений. В уравнениях (2) и далее принято правило суммирования по повторным греческим индексам, которые относятся к компонентам векторов и тензоров. Нижние латинские индексы в (1) и последующих выражениях относятся к номеру частицы.

Для решения задачи стабилизации численных нестабильностей используется введение искусственных напряжения и вязкости [15 – 17]. В частности, после SPH-преобразования уравнения (2) запишутся в виде:

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_j^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \delta^{\alpha\beta} + R_{ij}^{\alpha\beta} f_{ij}^n \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}, \quad (3)$$

где ρ – плотность; v^α – α -я компонента скорости; x^α – α -я компонента радиус-вектора $\vec{r}$; Π_{ij} – искусственная вязкость; $R_{ij}^{\alpha\beta} = R_i^{\alpha\beta} + R_j^{\alpha\beta}$ – суммарное искусственное напряжение между частицами i и j ; $R_a^{\alpha\beta}$ – тензор искусственного напряжения [6, 7]. Форма искусственной вязкости Π_{ij} в (3) определена в [11, 12]. Величина f_{ij}^n рассчитывается по формуле:

$$f_{ij} = \frac{W(r_{ij})}{W(\Delta p)}, \quad (4)$$

где Δp – среднее расстояние между частицами в стабильном состоянии (здесь $\Delta p = 0.6h$ – показатель f_{ij}^n в (3), $n=4$ [7]). Метод расчета тензора искусственного напряжения $R^{\alpha\beta}$ в двухмерном случае определен в [17]:

$$\bar{R}_i^{\alpha\alpha} = -\frac{\mu \bar{\sigma}_i^{\alpha\alpha}}{\rho_i^2}; \quad \bar{\sigma}_i^{\alpha\alpha} > 0, \quad (5)$$

в ином случае $\bar{R}_i^{\alpha\alpha} = 0$. Для его расчета необходима диагонализация тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ при помощи поворота T :

$$\bar{\sigma}_i^{\alpha\beta} = T^{-1} \sigma_i^{\alpha\beta} T. \quad (6)$$

Искусственное напряжение в первоначальных координатах рассчитывается с помощью обратного поворота:

$$R_i^{\alpha\beta} = T \bar{R}_i^{\alpha\beta} T^{-1}. \quad (7)$$

Авторами предложен метод использования трехмерной SPH-модели с искусственными вязкостью и напряжением. При этом при диагонализации трехмерного тензора напряжений применен итеративный процесс, на каждой итерации которого диагонализуется не весь тензор целиком, а только отдельные его части [7]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} &= P_{(k)}^{-1} \bar{\sigma}_{(k-1)}^{\alpha\beta} P_{(k)}; \\ \bar{\sigma}_{(0)}^{\alpha\beta} &= \sigma^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $P_{(k+1)}$ – матрица поворота на k -й итерации. Полная матрица трансформации T вычисляется как: $T = \prod_k P_{(k)}$. Экспериментально установлена сходимость данного алгоритма на 10 – 20-й итерациях [7].

Для моделирования процесса резания заготовки необходимо учитывать влияние ножниц на заготовку. Это влияние учитывается добавлением внешних сил $Q^\alpha(\vec{r})$, действующих на заготовку, что достигается модификацией уравнения (3):

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_j^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \delta^{\alpha\beta} + R_{ij}^{\alpha\beta} f_{ij}^n \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + Q^\alpha(\vec{r}); \quad (9)$$

$$Q^\alpha(\vec{r}) = q \max \left(0, \left(\frac{h}{d(\vec{r})} \right)^2 - 1 \right),$$

где q – базовое значение силы, характеризующее отталкивание частиц заготовки частицами ножниц; $d(\vec{r})$ – расстояние от частицы заготовки до ножниц. В работе использовалось допущение, что ножницы неразрушимы (что подразумевает фиксацию образующих их частиц относительно друг друга).

Для изготовления платиновых зондов методом механического разрезания применяется установка, схема которой представлена на рис. 1. Заготовка из платиновой проволоки (1) закреплена неподвижно в держателе (2). Режущая часть установки включает в себя 2 ножа, один из которых (3) неподвижен, а второй (4) движется ему навстречу со скоростью $\vec{V}$. Одновременно с разрезанием осуществляется вытягивание заготовки с силой $\vec{F}$.

1 – заготовка; 2 – фиксирующий держатель; 3,4 – неподвижный и подвижный ножи соответственно

Рис. 1. Схема установки для разрезания платиновой заготовки

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

При проведении численных экспериментов исследовалось влияние на формирование макроскопического профиля зондирующего острия следующих параметров резания:

- скорость движения подвижного ножа $\vec{V}$ (варьирующаяся в интервале 0.5 – 0.7 м/с);
- интенсивность вытягивания заготовки, определяемая силой $\vec{F}$ (варьирующаяся в интервале 70 – 150 Н);
- диаметр платиновой проволоки d (варьирующийся в интервале 0.15 – 0.25 мм).

Величинами базовых параметров далее приняты следующие: $\vec{V}=0.7$ м/с, $\vec{F}=100$ Н, $d=0.2$ мм.

На рис. 2 представлены промежуточные и окончательные изображения СТМ-зонда, отображающие результаты эксперимента с базовыми параметрами диаметра и скорости и варьируемым в интервале 70 – 150 Н параметром силы.

Рис. 2. Промежуточные (а, в, д) и конечные (б, з, е) результаты разрезания платиновой заготовки диаметром 0.2 мм, скоростью движения ножа $\vec{V}=0.7$ м/с, силой вытягивания $\vec{F}=70$ Н (а, б); $\vec{F}=100$ Н (в, з); $\vec{F}=150$ Н (д, е)

Рис. 3 отражает результаты формирования профиля зондирующего острия с изменением скорости $\vec{V}$ в интервале 0.5 – 1.0 м/с при базовых значениях силы $\vec{F}$ и диаметра d .

На рис. 4 приведены изображения профиля острия с изменением диаметра d в интервале 0.15 – 0.25 мм при базовых значениях силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{V}$.

Рис. 3. Промежуточные (а, в, д) и конечные (б, г, е) результаты разрезания платиновой заготовки диаметром 0.2 мм, силой вытягивания $\vec{F}=100$ Н, скоростью движения ножа $\vec{V}=0.5$ м/с (а, б); $\vec{V}=0.7$ м/с (в, г); $\vec{V}=1.0$ м/с (д, е)

Рис. 4. Промежуточные (а, в, д) и конечные (б, г, е) результаты разрезания платиновой заготовки со скоростью движения ножа $\vec{V}=0.7$ м/с, силой вытягивания $\vec{F}=100$ Н, диаметром $d = 0.15$ мм (а, б); $d = 0.2$ мм (в, г); $d = 0.25$ мм (д, е)

ВЫВОДЫ

Полученные результаты однозначно описывают влияние трех основных параметров резания на характеристики макроскопической формы получаемого острия. Анализ показал, что с увеличением силы вытягивания (рис. 2) происходит значительное уменьшение угла «заточки» острия ($70 - 40^\circ$). При увеличении скорости реза угол «заточки» растет, но не столь интенсивно ($40 - 60^\circ$). Увеличение диаметра приводит к уменьшению угла «заточки», однако это уменьшение самое умеренное из всех изменений ($55 - 45^\circ$), инициированных вариацией всех трех параметров.

Вытянутость «шейки» также изменяется. При этом самое значительное вытягивание происходит при изменении диаметра заготовки: с увеличением последнего вытянутость растет. Менее выраженное вытягивание связано с увеличением скорости резания: чем меньше скорость, тем более вытянуто острие. Наименьшее вытягивание происходит при вариации силы вытягивания: чем больше сила, тем больше вытянутость.

В заключение можно отметить следующее. Наилучшая макроскопическая форма зонда (то есть наименьшая вытянутость и наиболее тупой угол заточки, гарантирующее минимальные колебания кончика острия при сканировании образца) достигается при наименьшем диаметре заготовки, высокой скорости резания и наименьшей силе вытягивания. Для уменьшения радиуса кончика острия оптимальными параметрами являются наименьшая сила вытягивания и высокая скорость резания. Изменение диаметра заготовки, как показывают эксперименты, практически не влияет на профиль получаемого острия. Результаты демонстрируют, что параметры эксперимента, при которых результирующее острие имеет наименьший радиус закругления в целом коррелируют с теми, при которых острие имеет наименьшую вытянутость и тупой угол заточки.

В целом в работе проведен полный цикл моделирования создания платиновых острий СЭТМ, анализ которого позволяет разработать указания к методике их изготовления методом механического разреза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюриков А. В., Шелковников Е. Ю., Гуляев П. В., Жуйков Б. Л., Стаханова П. А. Схема численного моделирования процесса формирования СТМ-игл механическим способом // Ползуновский Альманах. 2013. № 1. С. 18-19.
2. Жуйков Б. Л., Шелковников Е. Ю., Тюриков А. В., Кизнерцев С. Р., Осипов Н. И. Исследование макроскопической формы зондов СТМ при их изготовлении методом механического среза // Химическая физика и мезоскопия. 2015. Т. 17, № 1. С. 138-142.
3. Тюриков А. В., Шелковников Е. Ю., Жуйков Б. Л. Особенности применения потенциалов межчастичного взаимодействия при моделировании изготовления СТМ-зондов // Материалы XVI Международной НТК «Измерения, контроль, информатизация» (ИКИ-2015). Барнаул: АлтГТУ, 2015. С. 53-56.
4. Шелковников Е. Ю., Тюриков А. В., Жуйков Б. Л., Липанов С. И. Исследование влияния процесса теплопереноса на геометрическую форму острий СТМ-зондов в процессе их травления // Химическая физика и мезоскопия. 2014. Т. 16, № 4. С. 632-636.
5. Тюриков А. В., Шелковников Е. Ю., Гуляев П. В., Жуйков Б. Л., Липанов С. И. Моделирование электрохимической стадии процесса формирования острий СТМ-зондов // Химическая физика и мезоскопия. 2016. Т. 18, № 2. С. 323-330.
6. Жуйков Б. Л., Шелковников Е. Ю., Тюриков А. В., Гуляев П. В. Применимость метода гидродинамики сглаженных частиц для исследования процесса изготовления платиновых СТМ-зондов механическим способом // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 1. С. 145-150.
7. Жуйков Б. Л., Шелковников Е. Ю., Тюриков А. В., Гуляев П. В. Трехмерное SPH-моделирование процесса изготовления платиновых СТМ-зондов с использованием искусственных вязкости и напряжения // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 4. С. 623-627.
8. Monaghan J. J. Simulating Free Surface Flows with SPH // Journal of Computational Physics, 1994, vol. 110, iss. 2, pp. 399-406.
9. Monaghan J. J. An introduction to SPH // Computer Physics Communication, 1998, vol. 48, iss. 1, pp. 89-96.
10. Шелковников Е. Ю., Тюриков А. В., Гуляев П. В., Жуйков Б. Л., Липанов С. И. Особенности применения метода частиц для моделирования процесса изоляции зондирующих острий электрохимического СТМ // Химическая физика и мезоскопия. 2016. Т. 18, № 1. С. 154-159.

11. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, vol. 30, iss. 1, pp. 543-574.
12. Monaghan J. J. On the problem of penetration in particle methods // *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 82, iss. 1, pp. 1-15.
13. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012, vol. 425, pp. 1068-1082.
14. Randles P. W., Libersky L. D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, iss. 1-4, pp. 375-408.
15. Sugiura K., Inutsuka Shu-i. An extension of Godunov SPH II: Application to elastic dynamics // *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 333, pp. 78-103.
16. Monaghan J. J. SPH without a tensile instability // *Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 159, iss. 2, pp. 290-311.
17. Gray J. P., Monaghan J. J., Swift R. P. SPH elastic dynamics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, iss. 49-50, pp. 6641-6662.

Research of Process of Production of the Platinum STM-Probes

Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Gulyaev P. V., Zhuykov B. L.

Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russia

SUMMARY. Questions of a research of model of process of production of platinum probes of the scanning tunnel microscope are considered in this paper. These theoretical researches have essential value owing to significant influence of a set of parameters of an experiment on its result. In particular, the probes with the least extended edge and with the big angle of sharpening are necessary for successful STM of an experiment. It allows to achieve optimum oscillatory characteristics of the edge. Installation for cutting the platinum probe blanks is modelled with application of two knives. At the same time one of knives is stable and another moves to it towards. One of the ends of the blank is rigidly fixed, and the second is extended with the varying force. Within model of cutting of platinum preparation of the probe the three-dimensional method of smoothed particles hydrodynamics is applied. At its use there is a so-called problem of tensile instability. It arises because of an incorrect clustering of particles in areas with considerable tension. At its decision the three-dimensional method with artificial viscosity and tension is developed. The iterative procedure of a diagonalization of the stress tensor is applied for this purpose. Thus on the each iteration the stress tensor is not entirely diagonalized but only its separate components. In the paper the analysis is fulfilled of influence on a resultant macroscopic form of the probing edge of such parameters as: cut speed, force of pulling of the blank and its initial diameter. At the same time each of parameters varies in certain limits. It allowed to reveal accurate trends of change of a form of the edge while changing each parameter. It is revealed that the best macroscopic form turns out at increase in speed of a cut, reduction of force of pulling, reduction of diameter of preparation. These researches allow to create recommendations to technical process of production of platinum probes of the scanning tunnel microscope.

KEYWORDS: scanning tunnel microscope, platinum tip, probe edge, smoothed particles hydrodynamics method.

REFERENCES

1. Tyurikov A. V., Shelkovnikov E. Yu., Gulyaev P. V., Zhuykov B. L., Stahanova P. A. Skhema chislennogo modelirovaniya processa formirovaniya STM-igl mekhanicheskim sposobom [Scheme of a computational simulation the mechanical formation of probes for STM]. *Polzunovskij almanah* [Polzunovsky Almanac], 2013, no. 1, pp. 18-19.
2. Zhuykov B. L., Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Kiznertsev S. R., Osipov N. I. Issledovanie makroskopicheskoy formy zondov STM pri ih izgotovlenii metodom mekhanicheskogo sreza [Studying the macroscopic shape of the STM-probe at its producing with a method of the mechanical cutting]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2015, vol. 17, no. 1, pp. 138-142.
3. Tyurikov A. V., Shelkovnikov E. Yu., Zhuykov B. L. Osobennosti primeneniya potentsialov mezhchastichnogo vzaimodeystviya pri modelirovaniya izgotovleniya STM-zondov [Features of applications the interparticle interaction potentials for the simulation of the STM probes producing]. *Materialy XVI Mezhdunarodnoy NTK «Izmereniya, kontrol', informatizatsiya» (IKI-2015)*. Barnaul: AltGTU Publ., 2015, pp. 53-56.
4. Tyurikov A. V., Shelkovnikov E. Yu., Zhuykov B. L., Lipanov S. I. Issledovanie vliyaniya processa teploperenosa na geometricheskuyu formu ostrij STM-zondov v processe ih travleniya [Study of the influence of heat transfer on the geometric forms of the tip of STM probe while their etching]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2014, vol. 16, no. 4, pp. 632-636.
5. Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Gulyaev P. V., Zhuykov B. L., Lipanov S. I. Modelirovanie ehlektrokhimicheskoy stadii processa formirovaniya ostrij STM-zondov [Modelling of the electrochemical stage of process of formation the probes of STM]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy],

2016, vol. 18, no. 2, pp. 323-330.

6. Zhuykov B. L., Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Gulyaev P. V. Primenimost' metoda gidrodinamiki sglazhennykh chastic dlya issledovaniya processa izgotovleniya platinovykh STM-zondov mekhanicheskim sposobom [Applicability of the smoothed particles hydrodynamics method for the research of process of mechanical manufacture of the platinum STM-probes]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2018, vol. 20, no. 1, pp. 145-150.

7. Zhuykov B. L., Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Gulyaev P. V. Trekhmernoe SPH-modelirovanie processa izgotovleniya platinovykh STM-zondov s ispol'zovaniem iskusstvennykh vyazkosti i napryazheniya [3D SPH-model for operation of manufacture of platinum STM-probes with use the artificial viscosity and stress]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2018, vol. 20, no. 4, pp. 623-627.

8. Monaghan J. J. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 1994. vol. 110, iss. 2. pp. 399-406. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>

9. Monaghan J. J. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 1998, no. 48, iss. 1, pp. 89-96. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(88\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0010-4655(88)90026-4)

10. Shelkovnikov E. Yu., Tyurikov A. V., Gulyaev P. V., Zhuykov B. L., Lipanov S. I. Osobennosti primeneniya metoda chastic dlya modelirovaniya processa izolyacii zondiruyushchih ostrij ehlektrohimicheskogo STM [Features of application of the method of particles for modelling the process of isolation probes for electrochemical STM]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2016, vol. 18, no. 1, pp. 154-159.

11. Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, vol. 30, iss. 1, pp. 543-574. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>

12. Monaghan J. J. On the problem of penetration in particle methods. *Journal of Computational Physics*, 1989, vol. 82, iss. 1, pp. 1-15. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90032-6)

13. Dehnen W., Aly H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012, vol. 425, pp. 1068-1082. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21439.x>

14. Randles P. W., Libersky L. D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, iss. 1-4, pp. 375-408. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)001090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)001090-0)

15. Sugiura K., Inutsuka Shu-i. An extension of Godunov SPH II: Application to elastic dynamics. *Journal of Computational Physics*, 2017, vol. 333, pp. 78-103. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.026>

16. Monaghan J. J. SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 159, iss. 2, pp. 290-311. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6439>

17. Gray J. P., Monaghan J. J., Swift R. P. SPH elastic dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, iss. 49-50, pp. 6641-6662. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00254-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00254-7)

Шелковников Евгений Юрьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института механики УдмФИЦ УрО РАН, профессор кафедры «Вычислительная техника» ИжГТУ имени М.Т. Калашикова, e-mail: evshelk@mail.ru

Тюриков Александр Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института механики УдмФИЦ УрО РАН, e-mail: alex.tyurikov@mail.ru

Гуляев Павел Валентинович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики УдмФИЦ УрО РАН, e-mail: lucac@e-izhevsk.ru

Жуйков Богдан Леонидович, исполнитель темы УдмФИЦ УрО РАН, e-mail: fastblood@mail.ru