ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В РДТТ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ

ШУМИХИН А. А., ДАДИКИНА С. Ю.

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН,
426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

АННОТАЦИЯ. В работе представлена методика моделирования внутреннего течения продуктов сгорания в тракте управляемого твердотопливного ракетного двигателя с центральным телом. Приведена система определяющих уравнений, записанная в цилиндрической системе координат, описывающая трехмерный поток сжимаемого вязкого газа. Предложен вычислительный алгоритм, разработанный на основе модифицированной схемы Стигера-Уорминга. Алгоритм пригоден для сквозного расчета всего тракта двигателя, как дозвуковых зон течения, так и сверхзвуковых. Проведены исследования потока газа в РДТТ при различных положениях центрального тела, соответственно при различных значениях площади критического сечения сопла, и при различных величинах характеристик твердого топлива, определяющих его скорость горения. Получены зависимости внутрикамерных параметров потока и расходных (тяговых) характеристик ракетного двигателя от величины площади критического сечения и показателя степени в законе горения твердого топлива.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: внутрикамерное течение газа, центральное тело, цилиндрическая система координат, вычислительная гидрогазодинамика.

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования течения продуктов сгорания в твердотопливных ракетных двигателях (РДТТ) важное значение имеет численное моделирование потоков сжимаемого вязкого газа. Динамичное развитие методов математического моделирования процессов протекающих в РДТТ обусловлено трудностями, связанными с постановкой физического эксперимента. Актуальность разработки новых методик для численного моделирования задач гидрогазодинамики также объясняется необходимостью программной реализации новых, более сложных постановок решаемых задач, обусловленных современными практическими потребностями. Алгоритмы, используемые для исследования течения газа в РДТТ, должны учитывать турбулентный характер и существенную нестационарность потока, влияние градиентов давления на внутрикамерные процессы [1 – 5]. Для твердотопливного ракетного двигателя характерны большие разбросы тяговых (расходных) характеристик в зависимости от температуры топливного заряда и разбросов скорости горения твердого топлива. Вследствие этого вопрос управления расходной характеристикой двигателя может возникать при разработке РДТТ практически любого класса и назначения [2 – 4]. Также управление расходной характеристикой двигателя необходимо для реализации заданной циклограммы изменения тяги РДТТ в процессе полета. Управление площадью критического сечения сопла является наиболее простым и достаточно эффективным способом изменения расходных характеристик РДТТ. В данном случае система управления посредством специальных исполнительных элементов (центрального тела) активно воздействует на внутрикамерные процессы, протекающие в двигателе. Для описания трехмерного течения газа в тракте твердотопливного двигателя с центральным телом использовалась система уравнений сохранения, записанных в цилиндрической системе координат [1, 5 – 18]. Численное моделирование внутрикамерных процессов производилось с применением алгоритма, основанного на модифицированной схеме расщепления векторов потоков (схеме Стигера-Уорминга) [19, 20]. Алгоритм позволяет проводить сквозной расчет всего тракта двигателя, как дозвуковых зон течения, так и сверхзвуковых. Расчеты проводились при различных положениях центрального тела на входе в сопло, соответственно при разных площадях критического сечения, и при различных значениях показателя степени в законе горения твердого топлива.

СИСТЕМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для моделирования трёхмерного течения продуктов сгорания в камере РДТТ использовалась система уравнений гидромеханики в цилиндрической системе координат. В векторном виде система записывается следующим образом [5 – 8, 14]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + F_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} r L_x + \frac{\partial}{\partial r} r L_r + \frac{\partial}{\partial \theta} L_\theta \right) + L_{\theta\theta}, \quad (1)$$

где Q – вектор переменных; $F_x, F_r, F_\theta, F_{\theta\theta}$ – векторы конвективных потоков; $L_x, L_r, L_\theta, L_{\theta\theta}$ – векторы диффузионных потоков; x, r, θ – продольная, радиальная и угловая координаты; t – время. Векторы переменных, конвективных (2) [6, 14] и диффузионных потоков (3) [7, 9, 14] имеют вид

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uh \end{bmatrix}, \quad F_r = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vh \end{bmatrix}, \quad F_\theta = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wh \end{bmatrix}, \quad F_{\theta\theta} = \frac{\rho}{r} \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 - w^2 \\ 2vw \\ vh \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xr} + w\tau_{x\theta} \end{bmatrix}, \quad L_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rx} \\ \tau_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ u\tau_{rx} + v\tau_{rr} + w\tau_{r\theta} \end{bmatrix}, \quad L_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{\theta r} \\ \tau_{\theta\theta} \\ u\tau_{\theta x} + v\tau_{\theta r} + w\tau_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad L_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ \tau_{\theta r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

здесь u, v, w – осевая, радиальная и угловая компоненты вектора скорости, p – давление, $\tau_{xx}, \tau_{rx}, \tau_{\theta x}, \tau_{xr}, \tau_{rr}, \tau_{\theta r}, \tau_{x\theta}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta\theta}$ – компоненты тензора вязких напряжений, ρ – плотность, e – удельная энергия, h – удельная энтальпия.

Компоненты тензора вязких напряжений вычисляются так [7 – 18]

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \Omega, & \tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \Omega, & \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \Omega, \\ \tau_{xr} &= \tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), & \tau_{x\theta} &= \tau_{\theta x} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, $\Omega = (u; v; w)$ – вектор скорости. Дивергенция вектора скорости в цилиндрической системе координат определяется формулой

$$\operatorname{div} \Omega = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r}. \quad (5)$$

Полная удельная энергия, полная удельная энтальпия и давление [19] вычислялись по следующим соотношениям

$$e = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + C_v T, \quad h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + C_p T, \quad p = \rho(\gamma - 1) \left(e - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right), \quad (6)$$

здесь C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, C_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, T – температура, R – удельная газовая постоянная, γ – показатель адиабаты.

Векторы, входящие в систему уравнений (1), формируются с использованием уравнений сохранения, записанных в цилиндрической системе координат. Выражения для инвариантов (дивергенции, градиента, ротора) в цилиндрических координатах имеют следующий вид [21]

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial \theta} + \frac{A_2}{r}; \quad (7)$$

$$(\operatorname{grad} \varphi)_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad (8)$$

$$(\operatorname{rot} A)_x = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_3}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \right), \quad (\operatorname{rot} A)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad (\operatorname{rot} A)_\theta = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial r}, \quad (9)$$

где φ – произвольный скаляр, $A = (A_1; A_2; A_3)$ – произвольный вектор.

Уравнение неразрывности в векторном виде записывается [7, 11 – 14, 16]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \Omega) = 0. \quad (10)$$

С использованием выражения (7), уравнение (10) в цилиндрической системе координат примет следующий вид [5 – 7, 14, 17]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho w}{\partial \theta} + \frac{\rho v}{r} = 0. \quad (11)$$

В векторном виде уравнения сохранения импульса записываются так [7, 11 – 14, 18]

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \rho(\Omega \cdot \nabla) \Omega = -\operatorname{grad} p + \operatorname{Div} \tau. \quad (12)$$

Здесь [12, 18]

$$\tau = 2\mu\Phi - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\Omega \cdot I, \quad (13)$$

где Φ – тензор скоростей деформаций, I – единичный тензор.

Запишем уравнение (12) через инварианты для определения его проекций на оси цилиндрической системы координат. Известно [12], что

$$(\Omega \cdot \nabla) \Omega = \operatorname{rot} \Omega \times \Omega + \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right). \quad (14)$$

Вектор $\operatorname{Div} \tau$ с учетом (13) примет вид

$$\operatorname{Div} \tau = \mu \operatorname{Div}(2\Phi) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega). \quad (15)$$

В (15) второе слагаемое инвариантно относительно системы координат. Вектор $\operatorname{Div}(2\Phi)$ с использованием инвариантов описывается выражением

$$\operatorname{Div}(2\Phi) = \operatorname{div}(2\Phi_x) i + \operatorname{div}(2\Phi_y) j + \operatorname{div}(2\Phi_z) k, \quad (16)$$

где $\Phi_x = (\Phi_{xx}; \Phi_{xy}; \Phi_{xz})$, $\Phi_y = (\Phi_{yx}; \Phi_{yy}; \Phi_{yz})$, $\Phi_z = (\Phi_{zx}; \Phi_{zy}; \Phi_{zz})$ – векторы, составленные из компонентов тензора скоростей деформаций Φ ; i, j, k – орты осей декартовой системы координат. Компоненты тензора скоростей определяются

$$\operatorname{div}(2\Phi_x) = \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \Omega, \quad \operatorname{div}(2\Phi_y) = \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \Omega, \quad \operatorname{div}(2\Phi_z) = \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \Omega. \quad (17)$$

Тогда (16) с учетом (17) примет вид

$$\operatorname{Div}(2\Phi) = \nabla^2 \Omega + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega). \quad (18)$$

Используя формулу $\nabla^2 \Omega = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \Omega)$ [21], запишем выражение (18) следующим образом

$$\operatorname{Div}(2\Phi) = 2\operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \Omega). \quad (19)$$

С учетом (19), уравнение (15) преобразуется к виду

$$\operatorname{Div} \tau = \frac{4}{3} \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \Omega). \quad (20)$$

С использованием выражений (14) и (20), уравнение движения (12) примет форму инвариантную относительно системы координат

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \rho \left(\operatorname{rot} \Omega \times \Omega + \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right) \right) = -\operatorname{grad} p + \frac{4}{3} \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} \Omega) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \Omega). \quad (21)$$

Проецируя $\operatorname{Div} \tau$ на оси цилиндрической системы координат с учетом (4), (5), (9), получим

$$\begin{aligned} (\operatorname{Div} \tau)_x &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} \right), \\ (\operatorname{Div} \tau)_r &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \tau_{\theta\theta} \right), \\ (\operatorname{Div} \tau)_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (8) – (9), проекции левой части уравнения (21) преобразуются к уравнениям

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Omega \times \Omega)_x &= \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r}, \\ (\operatorname{rot} \Omega \times \Omega)_r &= u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w^2}{r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ (\operatorname{rot} \Omega \times \Omega)_\theta &= v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)_x &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)_r &= u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)_\theta &= \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Применяя выражения (22), (23), (24) и (8), получим проекции векторного уравнения движения (21) на оси цилиндрической системы координат $Ox r \theta$:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} \right), \quad (25)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \tau_{\theta\theta} \right), \quad (26)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} \right). \quad (27)$$

Выражения (25)–(27) сложим с уравнением неразрывности (11), предварительно умножая его на u , v , w соответственно. Таким образом, в цилиндрической системе координат уравнения движения в дивергентной форме окончательно примут вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u w}{\partial \theta} + \frac{\rho u v}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} \right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w}{\partial \theta} + \frac{\rho}{r} (v^2 - w^2) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \tau_{\theta\theta} \right), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial \theta} + \frac{2 \rho v w}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial r \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \tau_{\theta\theta} \right). \quad (30)$$

Уравнение энергии в векторном виде записывается [11, 12, 14]

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div}(\rho e + p) \Omega = \text{div}(\Omega \tau). \quad (31)$$

Используя (7), имеем

$$\text{div}(\rho e + p) \Omega = \frac{\partial(\rho e + p)u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e + p)v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho e + p)w}{\partial \theta} + \frac{(\rho e + p)v}{r}, \quad (32)$$

или

$$\text{div}(\rho e + p) \Omega = \frac{\partial \rho u h}{\partial x} + \frac{\partial \rho v h}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho w h}{\partial \theta} + \frac{\rho v h}{r}. \quad (33)$$

Для правой части (31) с учетом (13) запишем

$$\text{div}(\Omega \tau) = \text{div} \left(2 \mu \Omega \Phi - \frac{2}{3} \mu \Omega \cdot \text{div} \Omega \right), \quad (34)$$

где $\Omega \Phi$ в формуле (34) может быть выражено через инварианты [12]

$$\Omega \Phi = \text{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \Omega \times \text{rot} \Omega. \quad (35)$$

Тогда

$$\text{div}(\Omega \tau) = \text{div} \left(2 \mu \text{grad} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right) - \mu \Omega \times \text{rot} \Omega - \frac{2}{3} \mu \Omega \cdot \text{div} \Omega \right), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}(\Omega \times \text{rot} \Omega)_x &= v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial x}, \\(\Omega \times \text{rot} \Omega)_r &= w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w^2}{r} - \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial r}, \\(\Omega \times \text{rot} \Omega)_\theta &= \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{vw}{r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (37)$$

$$\text{С учетом (24), (37), компоненты вектора } 2\mu \text{grad}\left(\frac{\Omega^2}{2}\right) - \mu \Omega \times \text{rot} \Omega - \frac{2}{3} \mu \Omega \cdot \text{div} \Omega \quad (35)$$

на оси цилиндрической системы координат $Ox r \theta$ описываются формулами

$$x: u\tau_{xx} + v\tau_{xr} + w\tau_{x\theta}, \quad r: u\tau_{rx} + v\tau_{rr} + w\tau_{r\theta}, \quad \theta: u\tau_{\theta x} + v\tau_{\theta r} + w\tau_{\theta\theta}. \quad (38)$$

Тогда для $\text{div}(\Omega \tau)$ с учетом (7), (36), (38) получим [14]:

$$\text{div}(\Omega \tau) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r(u\tau_{xx} + v\tau_{xr} + w\tau_{x\theta})}{\partial x} + \frac{\partial r(u\tau_{rx} + v\tau_{rr} + w\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial (u\tau_{\theta x} + v\tau_{\theta r} + w\tau_{\theta\theta})}{\partial \theta} \right). \quad (39)$$

С использованием (33), (39) уравнение энергии в цилиндрической системе координат (31) окончательно примет вид [14]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h}{\partial x} + \frac{\partial \rho v h}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho w h}{\partial \theta} + \frac{\rho v h}{r} = \\= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r(u\tau_{xx} + v\tau_{xr} + w\tau_{x\theta})}{\partial x} + \frac{\partial r(u\tau_{rx} + v\tau_{rr} + w\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial (u\tau_{\theta x} + v\tau_{\theta r} + w\tau_{\theta\theta})}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (40)$$

Таким образом, с использованием выражений (11), (28) – (30), (40), формируются векторы (2) – (3), входящие в систему уравнений (1).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

В разработанном вычислительном алгоритме использовалась схема Стигера-Уорминга (метод расщепления векторов потоков), предложенная в работах [19, 20]. Вектор F_x можно представить следующим образом

$$F_x = A_x Q, \quad (41)$$

где $A_x = \frac{\partial F_x}{\partial Q}$ – матрица Якоби. Собственные числа матрицы A_x равны [19]

$$\lambda_{x1} = \lambda_{x2} = \lambda_{x3} = u, \quad \lambda_{x4} = u + c, \quad \lambda_{x5} = u - c, \quad (42)$$

где $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ – скорость звука.

С использованием (41, 42) вектор F_x может быть представлен

$$F_x = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_{x1} + \lambda_{x4} + \lambda_{x5} \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}u + \lambda_{x4}(u+c) + \lambda_{x5}(u-c) \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}v + \lambda_{x4}v + \lambda_{x5}v \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}w + \lambda_{x4}w + \lambda_{x5}w \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}h + \lambda_{x4}h + \lambda_{x5}h \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Основой схемы Стигера-Уорминга является расщепление вектора F_x на две части

$$F_x = F_x^+ + F_x^-, \quad (44)$$

где вектор F_x^+ соотносится с вектором, сформированным из положительных собственных чисел матрицы A_x . Соответственно вектор F_x^- соотносится с вектором, сформированным из отрицательных собственных чисел. Аналогично можно расщепить собственные числа матрицы Якоби

$$\lambda_x(Q) = \lambda_x^+(Q^+) + \lambda_x^-(Q^-), \quad \lambda_x^+(Q^+) = \frac{\lambda_x(Q^+) + |\lambda_x(Q^+)|}{2}, \quad \lambda_x^-(Q^-) = \frac{\lambda_x(Q^-) - |\lambda_x(Q^-)|}{2}. \quad (45)$$

Соответственно, используя (43) – (45), можно записать

$$F_x^+ = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ + \lambda_{x4}^+ + \lambda_{x5}^+ \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ u^+ + \lambda_{x4}^+ (u^+ + c^+) + \lambda_{x5}^+ (u^+ - c^+) \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ v^+ + \lambda_{x4}^+ v^+ + \lambda_{x5}^+ v^+ \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ w^+ + \lambda_{x4}^+ w^+ + \lambda_{x5}^+ w^+ \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^+ h^+ + \lambda_{x4}^+ h^+ + \lambda_{x5}^+ h^+ \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$F_x^- = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- + \lambda_{x4}^- + \lambda_{x5}^- \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- u^- + \lambda_{x4}^- (u^- + c^-) + \lambda_{x5}^- (u^- - c^-) \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- v^- + \lambda_{x4}^- v^- + \lambda_{x5}^- v^- \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- w^- + \lambda_{x4}^- w^- + \lambda_{x5}^- w^- \\ 2(\gamma-1)\lambda_{x1}^- h^- + \lambda_{x4}^- h^- + \lambda_{x5}^- h^- \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Для дискретизации системы основных уравнений (1) по пространству применялся метод конечных объёмов. По времени дискретизация производилось с использованием одношаговой явной двухслойной схемы. В используемом алгоритме параметры потока газа на границах объёмов задавались согласно рис. 1.

I_{i-1}		I_i		I_{i+1}	
Q_{i-1}		Q_i		Q_{i+1}	
$Q_{i-3/2}^- = Q_{i-1}$	$Q_{i-1/2}^+ = Q_{i-1}$	$Q_{i-1/2}^- = Q_i$	$Q_{i+1/2}^+ = Q_i$	$Q_{i+1/2}^- = Q_{i+1}$	$Q_{i+3/2}^+ = Q_{i+1}$
$F_{i-3/2}^-(Q_{i-1})$	$F_{i-1/2}^+(Q_{i-1})$	$F_{i-1/2}^-(Q_i)$	$F_{i+1/2}^+(Q_i)$	$F_{i+1/2}^-(Q_{i+1})$	$F_{i+3/2}^+(Q_{i+1})$
$\lambda_{i-3/2}^-(Q_{i-1})$	$\lambda_{i-1/2}^+(Q_{i-1})$	$\lambda_{i-1/2}^-(Q_i)$	$\lambda_{i+1/2}^+(Q_i)$	$\lambda_{i+1/2}^-(Q_{i+1})$	$\lambda_{i+3/2}^+(Q_{i+1})$

Рис. 1. Параметры потока газа $Q_{i-1/2}^+$, $Q_{i-1/2}^-$ и $Q_{i+1/2}^+$, $Q_{i+1/2}^-$ на гранях I_i -го контрольного объёма

Для расчёта векторов потоков $F_{i-1/2}^-(Q_{i-1/2}^-)$ и $F_{i+1/2}^+(Q_{i+1/2}^+)$, соответственно на левой и правой гранях I_i -го контрольного объёма, необходимо определить векторы параметров $Q_{i-1/2}^-$ и $Q_{i+1/2}^+$. В используемом алгоритме векторы параметров $Q_{i-1/2}^-$ и $Q_{i+1/2}^+$ на границах I_i -го объёма принимались равными векторам параметров в центре объёма Q_i . Таким образом значения векторов на гранях I_i -го контрольного объёма будут равны $Q_{i-1/2}^+ = Q_{i-1}$, $Q_{i-1/2}^- = Q_i$

и $Q_{i+1/2}^+ = Q_i$, $Q_{i+1/2}^- = Q_{i+1}$. Собственные числа на гранях также определяются с использованием значений векторов Q_i в центре I_i -го контрольного объема $\lambda_{i-1/2}^+(Q_{i-1})$, $\lambda_{i-1/2}^-(Q_i)$ и $\lambda_{i+1/2}^+(Q_i)$, $\lambda_{i+1/2}^-(Q_{i+1})$. Тогда, учитывая (44, 45), собственные числа и потоки на гранях I_i -й ячейки определяются следующим образом

$$F_{i-1/2} = F_{i-1/2}^+(Q_{i-1}, \lambda_{i-1/2}^+(Q_{i-1})) + F_{i-1/2}^-(Q_i, \lambda_{i-1/2}^-(Q_i)), \quad (48)$$

$$\lambda_{i-1/2}^+(Q_{i-1}) = \frac{\lambda_{i-1/2}(Q_{i-1}) + |\lambda_{i-1/2}(Q_{i-1})|}{2},$$

$$\lambda_{i-1/2}^-(Q_i) = \frac{\lambda_{i-1/2}(Q_i) - |\lambda_{i-1/2}(Q_i)|}{2}.$$

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^+(Q_i, \lambda_{i+1/2}^+(Q_i)) + F_{i+1/2}^-(Q_{i+1}, \lambda_{i+1/2}^-(Q_{i+1})), \quad (49)$$

$$\lambda_{i+1/2}^+(Q_i) = \frac{\lambda_{i+1/2}(Q_i) + |\lambda_{i+1/2}(Q_i)|}{2},$$

$$\lambda_{i+1/2}^-(Q_{i+1}) = \frac{\lambda_{i+1/2}(Q_{i+1}) - |\lambda_{i+1/2}(Q_{i+1})|}{2}.$$

Данная процедура выполняется для всех ячеек расчетной сетки. В результате, с использованием выражений (44) – (47), будут определены значения потоков F_x , для всей расчетной области. Аналогичные операции производятся для векторов F_r и F_θ . Значения вектора $F_{\theta\theta}$ также вычисляются с использованием значений вектора параметров в центрах контрольных объемов. Диффузионные потоки $L_x, L_r, L_\theta, L_{\theta\theta}$ аппроксимировались методом центральных разностей, с использованием выражений (3) – (5). Алгоритм также описан в работе [5]. Дискретизация по времени выполнялась с использованием явной схемы 1-го порядка точности (схема Эйлера, одношаговая явная двухслойная схема). Конвективные и диффузионные потоки на текущем временном слое $F_x^n, F_r^n, F_\theta^n, F_{\theta\theta}^n$ и $L_x^n, L_r^n, L_\theta^n, L_{\theta\theta}^n$ рассчитывались с использованием значений вектора переменных также на текущем временном слое Q^n . Далее с использованием вычисленных потоков определялись элементы вектора переменных на следующем временном слое Q^{n+1} . В итоге, по известным значениям Q^{n+1} соответственно рассчитывались все параметры газа на $n+1$ временном слое.

Турбулентность моделировалась методом крупных вихрей, являющимся одним из наиболее перспективных методов расчетов турбулентных течений. Данный метод в частности применялся в работах [22, 23].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Длина двигателя составляла $L = 2.2$ м. В начальный момент времени температура газа в камере задавалась $T_0 = 294$ К и давление $p_0 = 10^6$ Па. Количество ячеек в области составляло 14700. Шаг по времени задавался равным $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-7}$ с. Скорость горения топлива определялась по формуле $\omega = \omega_0 (p/10^5)^g$, где ω_0 – скорость горения при атмосферном давлении, g – константа. Угловая скорость полагалось $w = 0$, т.е. задача решалась в осесимметричной постановке. Расчетная сетка представлена на рис. 2.

Расчеты производились при различных положениях центрального тела.

Рис. 2. Расчетная сетка

На рис. 3 приведены распределения давления в тракте двигателя при показателе степени в законе горения топлива $\mathcal{G}=0.7$ и трёх значениях площади критического сечения (минимальном $S_{кр} = 0.0181 \text{ м}^2$, промежуточном $S_{кр} = 0.02475 \text{ м}^2$, максимальном $S_{кр} = 0.0314 \text{ м}^2$).

Рис. 3. Распределение давления в двигателе при $\mathcal{G} = 0.7$: а) – минимальная площадь $S_{кр}$;
 б) – промежуточная площадь $S_{кр}$; в) – максимальная площадь $S_{кр}$

На рис. 4, рис. 5 показаны соответственно распределения осевой скорости и плотности при минимальной площади критического сечения. Полученные зависимости давления в камере и тяги двигателя от площади критического сечения при различных значениях ϑ представлены на рис. 6.

Рис. 4. Распределение осевой скорости в двигателе при минимальной площади $S_{кр}$ и $\vartheta = 0.7$

Рис. 5. Распределение плотности в двигателе при минимальной площади $S_{кр}$ и $\vartheta = 0.7$

Рис. 6. График зависимости (1 – максимальная $S_{кр}$, 2 – промежуточная $S_{кр}$, 3 – минимальная $S_{кр}$):

а) – давления от показателя степени в законе горения;

б) – тяги от показателя степени в законе горения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм и разработана программа для моделирования течений сжимаемого вязкого газа в тракте твёрдотопливного ракетного двигателя с центральным телом.

Проведены тестовые расчёты двигателя при различных положениях центрального тела и при различных величинах показателя степени в законе горения топлива ϑ .

Представлены распределения параметров потока продуктов сгорания в РДТТ, полученные в результате моделирования.

Определены зависимости давления в камере и тяги двигателя от площади критического сечения при различных значениях ϑ . Полученная в результате расчетов глубина регулирования тяги менялась от 2.52:1 при $\vartheta = 0.5$ до 5.03:1 при $\vartheta = 0.7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный метод расчёта турбулентных течений и теплообмена в двигателях летательных аппаратов // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 1988, № 1. С. 49-53.
2. Петренко В. И., Соколовский М. И., Зыков Г. А., Лянгузов С. В., Тодощенко А. И., Попов В. Л., Потапов Б. Ф., Севастьянов В. В., Ярушин С. Г. Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.
3. Тимнат И. Ракетные двигатели на химическом топливе / пер. с англ. В. А. Вебера, С. М. Фролова с предисл. авт. М.: Мир, 1990. 292 с.
4. Алиев А. В., Мищенко О. В., Черепов И. В. Нестационарные внутрикамерные процессы в твердотопливных регулируемых двигательных установках // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2016. № 4. С. 24-39.
5. Липанов А. М., Дадикина С. Ю., Шумихин А. А., Королева М. Р., Карпов А. И. Численное моделирование внутрикамерных нестационарных турбулентных течений. Часть 1 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 12, № 1. С. 32-43.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров / пер. с англ., под ред. Р. В. Торнера М.: Химия, 1984. 632 с.
8. Руководство пользователя Fluent 6.3, 2006. URL: www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/ (дата обращения: 15.12.2019).
9. Комиссаров Ю. А., Гордеев Л. С., Вент Д. П. Процессы и аппараты химической технологии. В 5 ч. Часть 1. 2-е изд., пер. и доп. М.: ООО «Издательство Юрайт», 2018. 226 с.
10. Лыков А. В. Теплообмен. М.: Энергия, 1971. 560 с.
11. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Том 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.
14. Липанов А. М. Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
15. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
17. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. 6 изд. М.: Физматлит, 1963. 584 с.
18. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2. 6 изд. М.: Физматлит, 1963. 728 с.
19. Steger J. L., Warming R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods // Journal of Computational Physics, 1981, vol. 40, no. 2, pp. 263-293.
20. Anderson W. K., Thomas J. L., Van Leer B. A comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA Journal, 1986, vol. 24, no. 9, pp. 1453-1460.
21. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
22. Ducros F., Nicoud F., Poinot T. Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries // Proc. of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamic, Oxford, United Kingdom, 1998, pp. 293-300.

Numerical simulation of a compressible viscous gas flow in solid-fuel rocket engine with a central body

Shumikhin A. A., Dadikina S. Yu.

Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Science, Izhevsk, Russia

SUMMARY. The paper presents a method for modeling the internal flow of combustion products in the path of a controlled solid-fuel rocket engine with a central body. A system of defining equations written in a cylindrical coordinate system describing the three-dimensional flow of a compressible gas is given. A computational algorithm based on a modified Steger-Warming scheme is proposed and implemented. The algorithm is suitable for end-to-end calculation of the entire engine path, both subsonic and supersonic flow zones. Numerical studies of the gas flow in the solid-fuel rocket engine at different positions of the central body, respectively, at different values of the critical area of the nozzle cross section, and at different values of the characteristics of solid fuel that determine its burning rate. The dependences of the gas flow parameters inside the chamber and the flow (traction) characteristics of the rocket engine on the size of the critical cross-section area and the degree indicator in the law combustion of solid fuel are obtained.

KEYWORDS: intra-chamber gas flow, central body, cylindrical coordinate system, computational hydro-gas dynamics.

REFERENCES

1. Lipanov A. M., Kisarov Yu. F., Klyuchnikov I. G. Chislennyy metod rascheta turbulentnykh techeniy i teploobmena v dvigatelyakh letatel'nykh apparatov [A numerical method for calculating turbulent flows and heat transfer in aircraft engines]. *Izvestiya VUZov. Aviatcionnaya tekhnika* [Russian Aeronautics], 1988, no. 1, pp. 49-53.
2. Petrenko V. I., Sokolovskiy M. I., Zykov G. A., Lyanguzov S. V., Todoshchenko A. I., Popov V. L., Potapov B. F., Sevast'yanov V. V., Yarushin S. G. *Upravlyaemye energeticheskie ustanovki na tverdom raketnom toplive* [Solid propellant controlled power plants]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2003. 464 p.
3. Timmat Y. M. *Advanced chemical rocket propulsion*. London etc.: Academic Press, 1987. 286 p.
4. Aliev A. V., Mishchenkova O. V., Cherepov I. V. Nestatsionarnye vnutrikamernye protsessy v tverdotoplivnykh reguliruemyykh dvigatel'nykh ustanovkakh [Nonstationary Intra-Chamber Processes in Solid-Propellant Controlled Propulsion System]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering], 2016, no. 4, pp. 24-39. <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2016-4-24-39>
5. Lipanov A. M., Dadikina S. Yu., Shumikhin A. A., Koroleva M. R., Karpov A. I. Chislennoe modelirovanie vnutrikamernykh nestatsionarnykh turbulentnykh techeniy. Chast' 1 [Numerical simulation intra-chamber of unsteady turbulent flows stimulate. Part 1]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software], 2019, vol. 12, no. 1, pp. 32-43. <https://doi.org/10.14529/mmp190103>
6. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 400 p.
7. Tadmor L., Gogos C. G. *Principles of polymer processing*. New York etc.: John Wiley & Sons, 1979.
8. *Fluent 6.3 User's Guide*, 2006. URL: www.sharcnet.ca/Software/Fluent6/ (accessed December 15, 2019).
9. Komissarov Yu. A., Gordeev L. S., Vent D. P. *Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii. V 5 ch. Chast' 1. 2-e izd* [Processes and devices of chemical technology. In 5 part. Part 1. 2nd ed.]. Moscow: Izdatel'stvo Yurayt Publ., 2018. 226 p.
10. Lykov A. V. *Teplomassoobmen* [Heat and mass transfer]. Moscow: Energiya Publ., 1971. 560 p.
11. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. Tom 1* [Computational fluid mechanics and heat transfer. Volume 1]. Moscow: Mir Publ., 1990. 384 p.
12. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. 7-e izd.* [Mechanics of fluid and gas. 7th ed.]. Moscow: Drofa Publ., 2003. 840 p.
13. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika. 3-e izd.* [Theoretical physics. Voleum VI. Hydrodynamics. 3rd ed.]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 736 p.
14. Lipanov A. M. *Teoreticheskaya gidromekhanika n'yutonovskikh sred* [Theoretical hydromechanics of Newtonian fluids]. Moscow: Nauka Publ., 2011. 551 p.

15. Slezkin N. A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1955. 520 p.
16. Shlikhting G. *Teoriya pograničnogo sloya* [Theory of the boundary layer]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 712 p.
17. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaja gidromehanika. Chast' 1. 6 izd.* [Theoretical hydromechanics. Part 1. 6th ed.]. Moscow: Fizmatlit Publ., 1963. 584 p.
18. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaja gidromehanika. Chast' 2. 6 izd.* [Theoretical hydromechanics. Part 2. 6th ed.]. Moscow: Fizmatlit, 1963. 728 p.
19. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 1981, vol. 40, no. 2, pp. 263-293. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90210-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90210-2)
20. Anderson W. K., Thomas J. L., Van Leer B. A comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations. *AIAA Journal*, 1986, vol. 24, no. 9, pp. 1453-1460. <https://doi.org/10.2514/3.9465>
21. Kochin N. E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischislenija* [Vector calculus and the beginnings of tensor calculus]. Moscow: Nauka Publ., 1965. 426 p.
22. Ducros F., Nicoud F., Poinso T. Wall-adapting local eddy-viscosity models for simulations in complex geometries. *Proc. of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamic*, Oxford, United Kingdom, 1998, pp. 293-300.
23. Shumihin A. A., Koroleva M. R., Dadikina S. V., Karpov A. I. Ispol'zovanie shemy WENO dlja modelirovanija turbulentnogo techenija v kanale s obratnym ustupom [Application of WENO scheme for simulation of turbulent flow in a channel with backward-facing step]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'yuternye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2017, vol. 27, no. 3, pp. 460-469. <https://doi.org/10.20537/vm170313>

Шумихин Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник,
Институт механики УдмФИЦ УрО РАН, тел. (3412)20-34-76, e-mail: shumihin@udman.ru

Дадикина Светлана Юрьевна, младший научный сотрудник, Институт механики УдмФИЦ УрО РАН,
e-mail: sveta-dadikina@yandex.ru