Porównanie metod estymacji stanu systemów dynamicznych

Jacek Michalski¹, Piotr Kozierski^{2,1}, Joanna Ziętkiewicz¹

¹Politechnika Poznańska, Wydział Elektryczny, Instytut Automatyki, Robotyki i Inżynierii Informatycznej, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

²Politechnika Poznańska, Wydział Informatyki, Instytut Automatyki i Robotyki, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

Streszczenie: W pracy poruszono problem estymacji stanu dla układów dynamicznych oraz przedstawiono wybrane jego rozwiązania. Zaproponowano cztery metody estymacji: rozszerzony filtr Kalmana, bezśladowy filtr Kalmana, filtr cząsteczkowy oraz filtr Kalmana, stosowany dla obiektów liniowych. Metody te zastosowano dla trzech obiektów nieliniowych oraz dla dwóch obiektów liniowych (systemy jedno- i wielowymiarowe). Wszystkie obiekty zostały opisane za pomocą równań stanu. Przedstawiono także trzy różne wskaźniki jakości, reprezentujące błędy względne oraz bezwzględne, a także porównano ich działanie dla różnego typu obiektów. W wyniku przeprowadzonych symulacji stwierdzono, że najlepszą jakość estymacji zapewnia filtr cząsteczkowy, ale jednocześnie ta metoda jest najwolniejsza.

Słowa kluczowe: estymacja stanu, układy dynamiczne, filtr Kalmana, rozszerzony filtr Kalmana, bezśladowy filtr Kalmana, filtr cząsteczkowy, wskaźniki jakości

1. Wprowadzenie

Estymacja stanu jest to bardzo ważna dziedzina nauki, szczególnie przy analizie systemów dynamicznych w środowisku, gdzie oddziałują także czynniki stochastyczne. Metody estymacji mają szerokie zastosowania w nauce i technice, np. do analizy sieci elektroenergetycznej [1, 2], w napędzie elektrycznym [3] czy też do analizy lotów robotów latających [4, 5].

Estymacja stanu jest stosowana w praktycznych rozwiązaniach od ponad 50 lat. W 1960 r. Schweppe opublikował trzy artykuły [6–8], w których uzasadniał potrzebę zastosowania estymacji stanu sieci elektroenergetycznej, a także zaproponował konkretne rozwiązanie – metodę ważonych najmniejszych kwadratów WLS (ang. *Weighted Least Squares*). Jest to jednak metoda estymacji statycznej, która znacznie ustępuje metodom dynamicznym.

W 1960 r. Rudolf Kalman zaproponował algorytm do estymacji stanu obiektów dynamicznych [9], który stał się powszechnie wykorzystywanym standardem, podobnie jak jego algorytm przeznaczony do obiektów nieliniowych – rozszerzony filtr Kalmana EKF (ang. *Extended Kalman Filter*). W 1993 r. Gordon, Salmond i Smith zaproponowali inny algorytm estymacji dynamicznej, tj. filtr cząsteczkowy PF (ang. *Particle Filter*) [10]. Cały czas tworzone są nowe metody estymacji dynamicznej, głównie będące modyfikacjami tych już istnieją-

cych, jak na przykład zmieszana metoda cząsteczkowego filtru Kalmana MKPF (ang. *Mixed Kalman Particle Filter*) [11].

W artykule autorzy omówili podstawowe metody estymacji dynamicznej, tj. trzy filtry Kalmana (liniowy, rozszerzony oraz bezśladowy) oraz filtr cząsteczkowy. Porównano te metody wykorzystując trzy wskaźniki jakości, a także pod względem szybkości obliczeń. W drugim rozdziale sformułowano rozwiązywany problem, w trzecim rozdziale przedstawiono zastosowane metody estymacji oraz ich algorytmy. W czwartym i piątym pokazano odpowiednio modele użytych obiektów i wykorzystane wskaźniki jakości. Rozdział szósty zawiera wyniki symulacji z użyciem różnych metod oraz obiektów. Wnioski i uwagi końcowe zawarte są w rozdziale siódmym.

2. Sformułowanie problemu

Rozważany jest układ dany równaniami stanu:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = f(x^{(k)}, u^{(k)}; k) + v^{(k)} \\ y^{(k)} = h(x^{(k)}) + n^{(k)} \end{cases} \quad (1)$$

gdzie: $x^{(k)}$ – wektor stanu w k -tej chwili próbkowania, $u^{(k)}$ – wektor wejść, $y^{(k)}$ – wektor wyjść (pomiarów), $v^{(k)}$ – wektor szumów wewnętrznych, $n^{(k)}$ – wektor szumów pomiarowych, $f(\cdot)$ i $h(\cdot)$ to wektory funkcji nieliniowych, odpowiednio: przejścia oraz wyjścia. Postawionym w artykule zadaniem jest odtworzenie wartości zmiennych stanu na podstawie dostępnych pomiarowo wyjść i znanych wejść układu.

3. Algorytmy estymacji

3.1. Filtr Kalmana

Filtr Kalmana KF (ang. *Kalman Filter*) stosuje się do obiektów danych równaniem różnicowym liniowym. Zarówno w KF, jak i całej reszcie omawianych filtrów Kalmana, wejścia i wyj-

Autor korespondujący:

Jacek Michalski, jacek.slesin@wp.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 28.08.2017 r., przyjęty do druku 16.10.2017 r.

Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

ścia układów muszą być dostępne pomiarowo. Należy również założyć, że zakłócenia oddziałujące na stan układu oraz szumy pomiarowe mają rozkład normalny o znanych wariancjach i zerowych wartościach oczekiwanych. Wektory szumów wewnętrznych i pomiarowych muszą być wzajemnie niezależne. W filtrze Kalmana obiekt jest dany równaniami stanu w postaci liniowej:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + Bu^{(k)} + v^{(k)} \\ y^{(k)} = Cx^{(k)} + n^{(k)} \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: $A_{N_x \times N_x}$ – macierz stanu, $B_{N_x \times N_u}$ – macierz wejść, $C_{N_y \times N_x}$ – macierz wyjść, N_x – wymiar przestrzeni stanu, N_u – liczba wejść, N_y – liczba wyjść układu.

Algorytm filtru Kalmana składa się z dwóch etapów:

– etap predykcji (równania aktualizacji czasu):

$$\hat{x}^{(k|k-1)} = A\hat{x}^{(k-1|k-1)} + Bu^{(k-1)} \quad (3)$$

$$P^{(k|k-1)} = AP^{(k-1|k-1)}A^T + Q \quad (4)$$

– etap filtracji (równania aktualizacji pomiarów):

$$K^{(k)} = P^{(k|k-1)}C^T [CP^{(k|k-1)}C^T + R]^{-1} \quad (5)$$

$$\hat{x}^{(k|k)} = \hat{x}^{(k|k-1)} + K^{(k)}[y^{(k)} - C\hat{x}^{(k|k-1)}] \quad (6)$$

$$P^{(k|k)} = [I - K^{(k)}C]P^{(k|k-1)} \quad (7)$$

gdzie: Q – macierz kowariancji szumów przetwarzania (diagonalna), R – macierz kowariancji szumów pomiarowych (diagonalna), $K^{(k)}$ – wzmocnienie Kalmana, $P^{(k|k)}$ – macierz kowariancji, I – macierz jednostkowa o wymiarach $N_x \times N_x$.

3.2. Rozszerzony filtr Kalmana

Ta metoda (a także wszystkie następne) przeznaczona jest do wykorzystania w obiektach nieliniowych (1). Założenia odnośnie szumów są takie same jak dla KF. Algorytm także składa się z dwóch etapów:

– etap predykcji (równania aktualizacji czasu):

$$\hat{x}^{(k|k-1)} = f(\hat{x}^{(k-1|k-1)}, u^{(k-1)}; k) \quad (8)$$

$$P^{(k|k-1)} = F^{(k-1)}P^{(k-1|k-1)}F^{(k-1)T} + Q \quad (9)$$

– etap filtracji (równania aktualizacji pomiarów):

$$K^{(k)} = P^{(k|k-1)}H^{(k)T} [H^{(k)}P^{(k|k-1)}H^{(k)T} + R]^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{x}^{(k|k)} = \hat{x}^{(k|k-1)} + K^{(k)}[y^{(k)} - h(\hat{x}^{(k|k-1)})] \quad (11)$$

$$P^{(k|k)} = [I - K^{(k)}H^{(k)}]P^{(k|k-1)} \quad (12)$$

gdzie: $F^{(k-1)}$ – macierz jacobianowa obliczana jako $F^{(k-1)} = \nabla f_{k-1} \Big|_{\hat{x}^{(k-1|k-1)}}$, $H^{(k)}$ – macierz jacobianowa obliczana jako

$$H^{(k)} = \nabla h_k \Big|_{\hat{x}^{(k|k-1)}}.$$

3.3. Bezsładowy filtr Kalmana

Oprócz dwóch podstawowych kroków zawartych w EKF, UKF zawiera także wybór punktów sigma oraz bezsładową transformację (ang. *unscented transformation*). Założenia odnośnie szumów są takie, jak w dwóch poprzednich metodach. Algorytm UKF dla modelu (1) przedstawia się następująco:

– stan początkowy – wektor wartości losowych o znanych wartościach oczekiwanych:

$$\hat{x}^{(0|0)}: \mu^{(0|0)} = E[\hat{x}^{(0|0)}]$$

$$P^{(0|0)} = E\left[(\hat{x}^{(0|0)} - \mu^{(0|0)})(\hat{x}^{(0|0)} - \mu^{(0|0)})^T\right]$$

– wybór punktów Sigma:

$$\hat{X}^{(k-1|k-1)} = \left\{ \left(\hat{x}_j^{(k-1|k-1)}, W_j \right) \right\}_{j=0, \dots, 2N_x} \quad (13)$$

$$\hat{x}_0^{(k-1|k-1)} = \hat{x}^{(k-1|k-1)} \quad (14)$$

$$\hat{x}_i^{(k-1|k-1)} = \hat{x}^{(k-1|k-1)} + \left(\sqrt{\frac{N_x}{1-W_0}} P^{(k-1|k-1)} \right)_i, \quad i = 1, \dots, N_x \quad (15)$$

$$\hat{x}_{i+N_x}^{(k-1|k-1)} = \hat{x}^{(k-1|k-1)} - \left(\sqrt{\frac{N_x}{1-W_0}} P^{(k-1|k-1)} \right)_i, \quad i = 1, \dots, N_x \quad (16)$$

gdzie:

$$\left(\sqrt{\frac{N_x}{1-W_0}} P^{(k-1|k-1)} \right)_i$$

– i -ta kolumna macierzy pierwiastków kwadratowych z wyrażenia

$$\frac{N_x}{1-W_0} P^{(k-1|k-1)},$$

odpowiadająca za i -tą zmienną stanu. Wagi muszą spełniać warunek:

$$W_j = \frac{1-W_0}{2N_x}, \quad j = 1, \dots, 2N_x \quad (17)$$

– etap prognozowania modelu (aktualizacji czasu):

$$\hat{x}_j^{(k|k-1)} = f(\hat{x}_j^{(k-1|k-1)}, u^{(k-1)}; k), \quad \hat{x}^{(k|k-1)} = \sum_{j=0}^{2N_x} W_j \hat{x}_j^{(k|k-1)} \quad (18)$$

$$P^{(k|k-1)} = \sum_{j=0}^{2N_x} W_j \left(\hat{x}_j^{(k|k-1)} - \hat{x}^{(k|k-1)} \right) \left(\hat{x}_j^{(k|k-1)} - \hat{x}^{(k|k-1)} \right)^T + Q \quad (19)$$

$$\hat{y}_j^{(k|k-1)} = h(\hat{x}_j^{(k|k-1)}), \quad \hat{y}^{(k|k-1)} = \sum_{j=0}^{2N_x} W_j \hat{y}_j^{(k|k-1)} \quad (20)$$

$$P_{\hat{y}}^{(k|k-1)} = \sum_{j=0}^{2N_x} W_j \left(\hat{y}_j^{(k|k-1)} - \hat{y}^{(k|k-1)} \right) \left(\hat{y}_j^{(k|k-1)} - \hat{y}^{(k|k-1)} \right)^T + R \quad (21)$$

$$P_{\hat{x}\hat{y}}^{(k|k-1)} = \sum_{j=0}^{2N_x} W_j \left(\hat{x}_j^{(k|k-1)} - \hat{x}^{(k|k-1)} \right) \left(\hat{y}_j^{(k|k-1)} - \hat{y}^{(k|k-1)} \right)^T \quad (22)$$

– krok estymacji pomiarów:

$$K^{(k)} = P_{\hat{x}\hat{y}}^{(k|k-1)} \left(P_{\hat{y}}^{(k|k-1)} \right)^{-1} \quad (23)$$

$$\hat{x}^{(k|k)} = \hat{x}^{(k|k-1)} + K^{(k)} \left(y^{(k)} - \hat{y}^{(k|k-1)} \right) \quad (24)$$

$$P^{(k|k)} = P^{(k|k-1)} - K^{(k)} P_{\hat{y}}^{(k|k-1)} K^{(k)T} \quad (25)$$

3.4. Filtr cząsteczkowy

Ta metoda różni się od poprzednich tym, że szumy wewnętrzne oraz pomiarowe nie muszą mieć rozkładu Gaussa. Zasada działania filtru cząsteczkowego opiera się na działaniu rekursywnego filtru Bayesa:

$$p(x^{(k)} | Y^{(k)}) = \frac{p(y^{(k)} | x^{(k)}) \cdot p(x^{(k)} | Y^{(k-1)})}{p(y^{(k)} | Y^{(k-1)})} \quad (26)$$

gdzie: $Y^{(k)}$ – zbiór pomiarów wyjścia z k chwil początkowych, $p(x^{(k)} | Y^{(k)})$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa PDF (ang. *Probability Density Function*) *a posteriori*, $p(y^{(k)} | x^{(k)})$ – wiarygodność (ang. *likelihood*), $p(x^{(k)} | Y^{(k-1)})$ – PDF *a priori*, $p(y^{(k)} | Y^{(k-1)})$ – współczynnik normujący (ang. *evidence*).

W algorytmie filtru cząsteczkowego PDF jest reprezentowana przez zestaw cząsteczek. Każda cząsteczka jest złożona z wartości x^i (wektor zmiennych stanu) oraz wagi q^i (im większa jest waga cząsteczki, tym większe prawdopodobieństwo, że cząsteczka przyjmuje prawdziwą wartość wektora stanu). Stąd i -ta cząstka może zostać zapisana jako $\{x^i, q^i\}$. Gdy liczba cząsteczek N_p jest wystarczająco duża, PDF *a posteriori* można zapisać jako:

$$p(x^{(k)} | Y^{(k)}) \stackrel{N_p \rightarrow \infty}{=} \hat{p}(x^{(k)} | Y^{(k)}) = \sum_{i=1}^{N_p} q^{i,(k)} \delta(x^{(k)} - x^{i,(k)}) \quad (27)$$

gdzie: $\delta(\cdot)$ – delta Diraca.

Algorytm działania PF przedstawia się następująco:

1. Inicjalizacja. Wylosowanie wartości początkowych $x^{i,(0)}$ z rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $p(x^{(0)})$, ustawienie numeru iteracji $k := 1$.
2. Prognoza. Wylosowanie N_p nowych cząsteczek z modelu przejścia $x^{i,(k)} \sim p(x^{i,(k)} | x^{i,(k-1)})$.
3. Aktualizacja. Obliczenie wagi każdej z nowych cząsteczek na podstawie modelu pomiarowego $q^{i,(k)} = p(y^{(k)} | x^{i,(k)})$. Rozkład $p(y^{(k)} | x^{i,(k)})$ jest zależny od rodzaju zmiennej losowej, czyli można napisać, że $p(y^{(k)} | x^{i,(k)}) = p(n^{(k)})$.
4. Normalizacja. Skalowanie wag w taki sposób, by ich suma była równa 1.
5. Resampling (powtórne losowanie). Ponowne losowanie N_p nowych cząsteczek, ale tylko spośród tych już istniejących. Prawdopodobieństwo wylosowania danej cząsteczki jest równe jej znormalizowanej wadze (wykorzystano resampling systematyczny – patrz [12]).
6. Koniec iteracji. Obliczenie estymaty dla kroku k , uaktualnienie numeru iteracji $k := k+1$, przejście do kroku 2.

Wiecej informacji na temat działania PF można znaleźć w pracach [13, 14].

4. Badane obiekty

Pierwsze dwa obiekty nie mają sygnałów wejściowych, zatem są autonomiczne, a ich zmiana stanu spowodowana jest szumem wewnętrznym. *Ob1* jest wykorzystywany bardzo często do badania filtrów cząsteczkowych. Został wykorzystany m.in. w [10, 13], a w publikacji [15] autor napisał, że obiekt ten pierwotnie został zaproponowany przez Netto, Gimeno i Mendes w 1978 r. *Ob2* różni się od *Ob1* funkcją pomiarową, która w tym obiekcie jest liniowa. Uproszczona została też postać funkcji przejścia przez usunięcie funkcji trygonometrycznej.

Systemy wielowymiarowe – nieliniowy *Ob3* oraz liniowy *Ob4* – zostały zaproponowane w [16]. Nie są to obiekty autonomiczne, mają bowiem sygnały wejściowe losowane z równomiernych PDF.

Ob5 jest to zdyskretyzowany z okresem próbkowania $T_p = 1$ ms model silnika prądu stałego [17]. Parametry obiektu to: $R = 4,5 \Omega$, $L = 79$ mH, $k = 1,36$ Vs, $J = 0,024$ kg · m², $b = 0,005$ kg · m²/s. Zmienne stanu to odpowiednio prąd twornika i prędkość kątowna wału. Na wyjście wyprowadzono prędkość kątowną, a wejściem sterującym było napięcie na zaciskach. System symulowano w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego, wraz z regulatorem PI, zdyskretyzowanym z takim samym okresem T_p . Jako wartość zadaną podano 100 rad/s.

– (*Ob1*)

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = 0,5x^{(k)} + \frac{25x^{(k)}}{1+x^{(k)2}} + 8 \cos(1,2k) + v^{(k)} \\ y^{(k)} = \frac{x^{(k)2}}{20} + n^{(k)} \end{cases}$$

$$v^{(k)} \sim N(0; 10), n^{(k)} \sim N(0; 1),$$

$$x^{(0)} = 0,1$$

– (*Ob2*)

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = 0,5x^{(k)} + \frac{25x^{(k)}}{1+x^{(k)2}} + v^{(k)} \\ y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{20} + n^{(k)} \end{cases}$$

$$v^{(k)} \sim N(0; 10), n^{(k)} \sim N(0; 1),$$

$$x^{(0)} = 0,1$$

– (*Ob3*)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,5 \left(x_1^{(k)2} \right)^{\frac{1}{3}} + 0,3 x_2^{(k)} x_3^{(k)} + 0,2 u_1^{(k)} + v_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 0,5 \left(x_2^{(k)2} \right)^{\frac{1}{3}} + 0,3 x_3^{(k)} x_1^{(k)} + 0,2 u_2^{(k)} + v_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0,5 \left(x_3^{(k)2} \right)^{\frac{1}{3}} + 0,3 x_1^{(k)} x_2^{(k)} + 0,2 u_3^{(k)} + v_3^{(k)} \\ y_1^{(k)} = 0,5 \left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \right) + n_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} = 2 \left(x_1^{(k)} \right)^2 + n_2^{(k)} \end{cases}$$

$$v_{1/2/3}^{(k)} \sim N(0; 0,1), n_{1/2}^{(k)} \sim N(0; 0,1), u_{1/2/3}^{(k)} \sim U[-1; 1],$$

$$x^{(0)} = [0,1 \ 0,1 \ 0,1]^T$$

– (Ob4)

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7408 & 0 & 0 \\ 0,0779 & 0,8187 & 0 \\ 0,0041 & 0,0861 & 0,9048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0864 & 0 & 0 \\ 0,0042 & 0,0906 & 0 \\ 0,0001 & 0,0045 & 0,0952 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \\ v_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k+1)} \\ y_2^{(k+1)} \\ y_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1^{(k)} \\ n_2^{(k)} \\ n_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$v_{1/2/3}^{(k)} \sim N(0; 0,1), \quad n_{1/2}^{(k)} \sim N(0; 0,1), \quad u_{1/2/3}^{(k)} \sim U[-1; 1]$$

$$x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

– (Ob5)

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,9444 \\ 1 & 1,9435 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3452 \\ 0,3519 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} u^{(k)} + \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + n^{(k)}$$

$$v_{1/2}^{(k)} \sim N(0; 0,01), \quad n^{(k)} \sim N(0; 1)$$

$$w^{(k)} = 100$$

$$x^{(0)} = [0 \ 0]^T$$

gdzie: $U[a, b]$ – rozkład równomierny z przedziału $\langle a, b \rangle$, $N(\mu, \sigma^2)$ – rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 , $w^{(k)}$ – sygnał zadany.

5. Wskaźniki jakości

Wskaźnik (30) reprezentuje błąd bezwzględny, natomiast (31) oraz (32) to błędy względne. Pochodzą one z pozycji [11, 18, 19].

$$MSE_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(\hat{x}_i^{(k)} - x_i^{+(k)} \right)^2 \quad (28)$$

$$RMSE_i = \sqrt{MSE_i} \quad (29)$$

$$aRMSE = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} RMSE_i \quad (30)$$

$$\beta_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left| \frac{\hat{x}_i^{(k)} - x_i^{+(k)}}{x_i^{+(k)}} \right|, \quad \beta = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \beta_i \quad (31)$$

$$\xi_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left| \frac{\hat{y}_i^{(k)} - y_i^{+(k)}}{y_i^{+(k)}} \right|, \quad \xi_z = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \xi_i \quad (32)$$

gdzie: k – numer kroku symulacji, M – liczba kroków symulacji, i – numer zmiennej stanu (lub wyjścia – w ξ_z), N_x – liczba zmiennych stanu, N_y – liczba wyjść układu. Wartość $\hat{y}_i^{(k)}$ to wartość wyjścia obliczona na podstawie estymowanej wartości wektora stanu $\hat{x}_i^{(k)}$, a wartości z plusem oznaczają wartości prawdziwe.

Rys. 1. Porównanie wskaźników jakości dla Ob1
Fig. 1. Comparison of quality indices for Ob1

Rys. 2. Porównanie wskaźników jakości dla Ob2
Fig. 2. Comparison of quality indices for Ob2

Rys. 3. Porównanie wskaźników jakości dla Ob3; wskaźnik aRMSE został powiększony 10 razy
Fig. 3. Comparison of quality indices for Ob3; aRMSE indicator has been increased 10 times

Rys. 4. Porównanie wskaźników jakości dla Ob4; wskaźnik aRMSE został powiększony 10 razy
Fig. 4. Comparison of quality indices for Ob4; aRMSE indicator has been increased 10 times

Rys. 5. Porównanie wskaźników jakości dla Ob5; wskaźnik aRMSE został powiększony 10 razy, $\beta - 100$ razy
Fig. 5. Comparison of quality indices for Ob5; aRMSE indicator has been increased 10 times, $\beta - 100$ times

Tabela 1. Zestawienie wartości wskaźników jakości z zakresem 95% prawdopodobieństwa
Table 1. The values of quality indicators with the 95% probability range

Obiekt	Metoda	EKF	UKF	PF
Ob1	aRMSE	16,0822 $\pm 0,0506$	6,2825 $\pm 0,0066$	4,7100 $\pm 0,0178$
	β	5,8264 $\pm 1,1100$	3,5953 $\pm 0,8606$	1,2634 $\pm 0,1044$
	ξ_z	22,1054 $\pm 3,5220$	29,1577 $\pm 2,3966$	12,5996 $\pm 2,0674$
Ob2	aRMSE	10,5043 $\pm 0,1050$	10,0117 $\pm 0,0956$	5,2705 $\pm 0,0308$
	β	2,5132 $\pm 0,5122$	2,0963 $\pm 0,1640$	1,9678 $\pm 0,8432$
	ξ_z	4,4690 $\pm 0,6716$	5,7627 $\pm 2,2584$	1,7058 $\pm 0,1852$
Ob3	aRMSE	0,3421 $\pm 4,1020 \cdot 10^{-4}$	0,3729 $\pm 3,6876 \cdot 10^{-4}$	0,3013 $\pm 3,0648 \cdot 10^{-4}$
	β	6,4033 $\pm 1,9786$	8,8330 $\pm 1,1628$	4,1604 $\pm 0,3228$
	ξ_z	6,5105 $\pm 2,6078$	9,1185 $\pm 1,3480$	5,3449 $\pm 1,4752$
Ob4	Metoda	KF	UKF	PF
	aRMSE	0,2436 $\pm 2,2094 \cdot 10^{-4}$	0,2829 $\pm 2,9470 \cdot 10^{-4}$	0,2448 $\pm 11,3208 \cdot 10^{-5}$
	β	4,1329 $\pm 1,3202$	4,1252 $\pm 0,8986$	4,0455 $\pm 1,0426$
	ξ_z	5,7933 $\pm 2,0694$	9,5940 $\pm 2,9182$	5,3920 $\pm 0,7014$
Ob5	Metoda	KF	UKF	PF
	aRMSE	0,9548 $\pm 1,3340 \cdot 10^{-3}$	0,7233 $\pm 1,1470 \cdot 10^{-3}$	0,55342 $\pm 6,7472 \cdot 10^{-4}$
	β	0,1019 $\pm 0,0124$	0,0395 $\pm 0,0118$	0,0285 $\pm 0,0025$
	ξ_z	1,1524 $\pm 0,0419$	1,9168 $\pm 0,2235$	4,5748 $\pm 0,5813$

Tabela 2. Zestawienie czasów obliczeń dla wszystkich metod i obiektów (czas 1000 powtórzeń)
Table 2. The calculation times for all methods and objects (time of 1000 repetitions)

Obiekt	EKF (KF)	UKF	PF
Ob1	9,6 s	59,2 s	642,4 s
Ob2	9,4 s	58,6 s	147,2 s
Ob3	71,0 s	115,4 s	1640,1 s
Ob4	57,9 s	154,0 s	4601,4 s
Ob5	35,6 s	127,8 s	3579,4 s

6. Wyniki przeprowadzonych symulacji

Zostały przeprowadzone symulacje o długości $M = 1000$ kroków. Symulacje dla każdego filtru i obiektu zostały powtórzone 1000 razy, za każdym razem dla innego, losowo wygenerowanego przebiegu sygnałów. Podane wskaźniki jakości obliczono jako wartości średnie, a wyniki podano wraz z odchyleniem standardowym wartości średniej na podstawie twierdzenia, że wariancja wartości średniej σ_{sr}^2 jest m razy mniejsza od wariancji m -elementowej próby [20]. W PF dla Ob2 liczba cząsteczek wynosiła $N_p = 100$, natomiast dla wszystkich pozostałych przypadków $N_p = 500$. Wskaźniki jakości dla każdego z obiektów i różnych metod zostały przedstawione na rysunkach 1–4, każdy dla kolejnego obiektu. Naniesiono również 95% przedział ufności, czyli odchylenie o $2\sigma_{sr}$ w każdą stronę.

7. Wnioski

Analizując wyniki, dla poszczególnych obiektów najlepiej posłużyć się wskaźnikiem $aRMSE$, ponieważ daje on najstabilniejsze wyniki, z najmniejszymi odchyleniami. Z wartości $aRMSE$ można odczytać, że najlepsze efekty estymacji dla obiektów nieliniowych $Ob1-3$ daje filtr cząsteczkowy, dla którego w większości przypadków wskaźniki jakości były najmniejsze. Najlepszą jakość estymacji uzyskuje się tu jednak kosztem największych, spośród ww. filtrów, nakładów obliczeniowych. Dwie odmiany filtru Kalmana dawały podobne efekty, z tym że częściej UKF okazywało się minimalnie lepsze (ale to także jest okupione dłuższym czasem obliczeń). Dla obiektu liniowego $Ob4$ we wszystkich metodach estymacji $aRMSE$ dawało podobne wartości. Dla takich obiektów metody estymacji mają zbliżone właściwości i optymalne jest stosowanie metody KF, ponieważ jest ona najszybsza. Dla układu zamkniętego z regulatorem i obiektem $Ob5$ w torze głównym metoda KF daje zauważalnie gorsze wyniki od UKF i PF.

Pozostałe dwa wskaźniki, dane wzorami (31) i (32), reprezentują błędy względne. W badanych obiektach natomiast, zarówno zmienne stanu, jak i pomiary, miały wartości bardzo małe, czasem zbliżone do zera. Gdy wartość taka znalazła się w mianowniku, powodowało to gwałtowny wzrost wartości wskaźnika przy stosunkowo niewielkiej wartości reprezentowanej przez błąd bezwzględny $aRMSE$. Wyniki tych wskaźników dla 1000 powtórzeń dawały podobne wyniki jak $aRMSE$, jednak odchylenia standardowe mają tu dużo większe wartości. Dla pojedynczych symulacji zdarzały się przypadki, gdzie wskaźniki te nie odzwierciedlały prawdziwych rezultatów. Z tego powodu autorzy w przyszłości planują przestać korzystać z tych wskaźników, bądź też trochę je zmodyfikować.

W tabeli 2 zamieszczono czasy obliczeń dla 1000 powtórzeń działania algorytmów. Najszybciej działała metoda EKF (dla $Ob4$, $Ob5$ metoda KF), ponieważ sprowadza się ona jedynie do obliczeń macierzowych. Nieco dłuższe czasy obliczeń obserwowano w przypadku UKF, ze względu na dodatkowy etap wyboru punktów Sigma oraz bezśladową transformację. Największych nakładów obliczeniowych wymagał filtr cząsteczkowy ze względu na wybór dość dużej liczby cząsteczek. Gdyby te liczbę zmniejszyć, czas obliczeń mógłby być podobny do czasu UKF, ale kosztem pogorszenia jakości estymacji. W przypadku każdej z metod zwiększenie długości wektora stanu powodowało znaczne wydłużenie czasu obliczeń.

Bibliografia

1. Abur A., Exposito A.G., *Power System State Estimation: Theory and Implementation*, Marcel Dekker, Inc., 2004, 17–49, DOI: 10.1201/9780203913673.ch2.
2. Udupa H.N., Minal M., Mishra M.T., *Node Level ANN Technique for Real Time Power System State Estimation*, "International Journal of Scientific & Engineering Research", Vol. 5, No. 1, 2004, 1500–1505.
3. Zawirski K., Deskur J., Kaczmarek T., *Automatyka napędu elektrycznego*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2012.
4. Weiss S., Achtelek M.W., Lyen S., Achtelek M.C., Kneip L., Chli M., Siegart R., *Monocular Vision for Long-term Micro Aerial Vehicle State Estimation: A Compendium*, "Journal of Field Robotics", Vol. 30, No. 5, 2013, 803–831.
5. Marantos P., Koveos Y., Kyriakopoulos K.J., *UAV State Estimation using Adaptive Complementary Filters*, "IEEE Transactions on Control Systems Technology", Vol. 24, No. 4, 2016, 1214–1226.
6. Schweppe F.C., Wildes J., *Power System Static-State Estimation, Part I: Exact Model*, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", Vol. 89, No. 1, 1970, 120–125.
7. Schweppe F.C., Rom D.B., *Power System Static-State Estimation, Part II: Approximate Model*, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", Vol. 89, No. 1, 1970, 125–130, DOI: 10.1109/TPAS.1970.292679.
8. Schweppe F.C., *Power System Static-State Estimation, Part III: Implementation*, "IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", Vol. 89, No. 1, 1970, 130–135.
9. Kalman R.E., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, "Journal of Basic Engineering", Vol. 82, No. 35, 1960, 35–45, DOI: 10.1155/1.3662552.
10. Gordon N.J., Salmond D.J., Smith A.F.M., *Novel Approach to Nonlinear/non-Gaussian Bayesian State Estimation*, "IEE Proceedings-F", Vol. 140, No. 2, 1993, 107–113, DOI: 10.1049/ip-f-2.1993.0015.
11. Chen H., Liu X., She C., Yao C., *Power System Dynamic State Estimation Based on a New Particle Filter*, "Procedia Environmental Sciences", Vol. 11, Part B, 2011, 655–661, DOI: 10.1016/j.proenv.2011.12.102.
12. Koziński P., Lis M., Ziętkiewicz J., *Resampling in Particle Filtering – Comparison*, "Studia z Automatyki i Informatyki", Vol. 38, 2013, 35–64.
13. Arulampalam S., Maskell S., Gordon N., Clapp T., *A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*, "IEEE Transactions on Signal Processing", Vol. 50, No. 2, 2002, 174–188, DOI: 10.1109/78.978374.
14. Doucet A., Johansen A.M., *A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later*, Handbook of Nonlinear Filtering 2009/12, 656–704.
15. Kitagawa G., *Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models*, "Journal of computational and graphical statistics", Vol. 5, No. 1, 1996, 1–25.
16. Yadaiah N., Sowmoya G., *Neural Network Based State Estimation of Dynamical Systems*, International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN '06), 2006, 1042–1049, DOI: 10.1109/IJCNN.2006.246803.
17. Moseler O., Isermann R., *Application of model-based fault detection to a brushless DC motor*, "IEEE Transactions on industrial electronics", Vol. 47, No. 5, 2000, 1015–1020.
18. Valverde G., Terzija V., *Unscented Kalman Filter for Power System Dynamic State Estimation*, "IET Generation, Transmission & Distribution", Vol. 5, Iss. 1, 2011, 29–37, DOI: 10.1049/iet-gtd.2010.0210.
19. Koziński P., Lis M., Horla D., *Wrong Transition and Measurement Models in Power System State Estimation*, "Archives of Electrical Engineering", Vol. 65, No. 3, 2016, 559–574, DOI: 10.1515/ae-2016-0040.
20. Florek A., Mazurkiewicz P., *Sygnały i systemy dynamiczne*, wyd. 2, Poznań 2015, ISBN: 978-83-7775360-6.

Comparison of state estimation methods of dynamical systems

Abstract: In this paper the problem of state estimation of dynamical systems has been discussed and selected solutions have been presented. Four methods of state estimation have been proposed: Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, Particle Filter and Kalman Filter for a linear system. These methods have been applied to three nonlinear objects and to two linear objects (one- and multivariable systems). All plants have been described using state equations. Three quality indices has been used, which present relative and absolute errors. They were compared for different objects. As a result of the simulation, it was found that the best estimation quality is provided by the particle filter, but this method is also the slowest.

Keywords: state estimation, dynamical systems, Kalman Filter, Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, Particle Filter, quality indices

Jacek Michalski
jacek.slesin@wp.pl

Student ostatniego roku studiów I stopnia na Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania obejmują estymację stanu obiektów (liniowych oraz nieliniowych), przede wszystkim metodami filtru Kalmana oraz filtru cząsteczkowego, jak również sztuczną inteligencję.

mgr inż. Piotr Kozierski
piotr.kozierski@gmail.com

Doktorant oraz asystent na Politechnice Poznańskiej. Główne obszary zainteresowań to odporna estymacja stanu obiektów (z naciskiem na metody filtru cząsteczkowego oraz obiekt typu sieć elektroenergetyczna) oraz rozpoznawanie mowy ciągłej (w języku polskim, mowa zwykła i szeptana).

dr inż. Joanna Ziętkiewicz
joanna.zietkiewicz@put.poznan.pl

Absolwentka Wydziału Elektrycznego Politechniki Poznańskiej. W 2014 r. uzyskała stopień naukowy doktora nauk technicznych. Jej zainteresowania skupiają się głównie na problemach związanych ze sterowaniem układami nieliniowymi. W szczególności interesuje się sterowaniem predykcyjnym, linearyzacją przez sprzężenie zwrotne, jak również identyfikacją obiektów i problemem estymacji zmiennych stanu.