Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant

Bruno Kahn et Nguyen Thi Kim Ngan

ABSTRACT

Let G be a linear algebraic group over a field k . For any Rost cycle module M over k and $n \in \mathbb{Z}$, write $\text{Inv}_k(G, M_n)$ for the group of invariants of G with values in M_n as defined by Serre, and $\text{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n)$ for its subgroup of unramified invariants. Inspired by work of Peyre, we construct residue homomorphisms $\partial_{D,g} : \text{Inv}_k(G, M_n) \rightarrow \text{Inv}_k(D, M_{n-1})$ for any pair (D, g) , where D is a closed subgroup of G and $g : \mu_m \rightarrow G$ is a homomorphism whose image centralises D . In case G is finite of exponent m invertible in k and k contains a primitive m th root of unity, we prove that $\text{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n) = \bigcap_{(D,g)} \text{Ker } \partial_{D,g}$. This allows us to recover and generalise results of Bogomolov and Peyre on the unramified cohomology of fields of invariants of G .

1. Introduction

Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps k , et soit $M = M_*$ un module de cycles sur k au sens de Rost [Ros96]. Suivant Serre [GMS03, définition 1.1], on définit le *groupe des invariants de degré n de G à valeurs dans M*

$$\text{Inv}_k(G, M_n)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$: il s’agit du groupe des transformations naturelles $\varphi_K : H^1(K, G) \rightarrow M_n(K)$, où K décrit la catégorie des extensions de k . On peut aussi parler d’invariants non ramifiés au sens de [GMS03, 33.9] : ils forment un sous-groupe $\text{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n)$, dont la trivialité est une condition nécessaire pour une solution positive au problème de Noether.

En général le calcul de $\text{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n)$ est difficile, et celui de $\text{Inv}_k(G, M_n)$ est un peu plus facile. Le but de cet article est de réduire le calcul du premier à celui du second, dans certains cas particuliers. Le résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. *Supposons G fini constant, d’ordre premier à la caractéristique de k . Supposons de plus que k contienne les racines m -ièmes de l’unité, où m est l’exposant de G . Alors, à tout sous-groupe D de G et à tout homomorphisme $g : \mu_m \rightarrow Z_G(D)$ (centralisateur de D dans G), on peut associer un “homomorphisme résidu”*

$$\partial_{D,g} : \text{Inv}_k(G, M_n) \rightarrow \text{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

Received 19 January 2015, accepted in final form 2 September 2015.

2010 Mathematics Subject Classification 20G15, 14C15, 20J06.

Keywords: unramified cohomology, classifying space, cycle module.

This journal is © [Foundation Compositio Mathematica](#) 2016. This article is distributed with Open Access under the terms of the [Creative Commons Attribution Non-Commercial License](#), which permits non-commercial reuse, distribution, and reproduction in any medium, provided that the original work is properly cited. For commercial re-use, please contact the [Foundation Compositio Mathematica](#).

B.K. a bénéficié d’une aide de l’Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

tel que la suite

$$0 \rightarrow \operatorname{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n) \rightarrow \operatorname{Inv}_k(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \operatorname{Inv}_k(D, M_{n-1})$$

soit exacte.

Les hypothèses sont essentielles, en particulier celle sur les racines de l'unité. Pour G et k quelconques, on a encore un complexe comme ci-dessus, mais les $\partial_{D,g}$ ne sont sans doute pas suffisants pour détecter les invariants non ramifiés. En trouver la bonne généralisation est un problème ouvert.¹

COROLLAIRE 1.2. *Gardons les hypothèses du théorème 1.1 et définissons*

$$\operatorname{Inv}_k^{\text{nab}}(G, M_n) = \operatorname{Ker} \left(\operatorname{Inv}_k(G, M_n) \rightarrow \bigoplus_A \operatorname{Inv}_k(A, M_n) \right)$$

où A décrit les sous-groupes abéliens de G . Alors la suite exacte du théorème 1.1 se raffine en une suite exacte

$$0 \rightarrow \widetilde{\operatorname{Inv}}_k^{\text{nr}}(G, M_n) \rightarrow \operatorname{Inv}_k^{\text{nab}}(G, M_n) \xrightarrow{(\partial_{D,g})} \bigoplus_{(D,g)} \operatorname{Inv}_k^{\text{nab}}(D, M_{n-1})$$

où $\widetilde{\operatorname{Inv}}_k^{\text{nr}}(G, M_n)$ désigne le sous-groupe des invariants non ramifiés normalisés (triviaux sur le G -torseur neutre).

Ce corollaire peut être considéré comme une généralisation d'un théorème de Bogomolov [CTS07, théorème 7.1], qu'il permet de retrouver. Nous retrouvons aussi un théorème de Peyre [Pey08, théorème 1].

Voici la stratégie de la démonstration. D'après Totaro [GMS03, appendice C], on a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Inv}_k(G, M_n) = A^0(BG, M_n)$$

où le groupe de droite est celui de [Ros96, § 5]. Le sous-groupe $\operatorname{Inv}_k^{\text{nr}}(G, M_n)$ du membre de gauche correspond à un sous-groupe $A_{\text{nr}}^0(BG, M_n)$ du membre de droite. Tout ceci demande une explication, puisque BG n'est pas bien défini en tant que variété lisse : c'était l'objet de [KN14] (notamment § 6.4) dont la théorie est rappelée ici au § 2.1.

Les résidus $\partial_{D,g}$ sont définis au § 2 en termes de BG ; le théorème 1.1 et le corollaire 1.2 sont démontrés au § 4 ; au § 6, on fait le raccord avec les résultats de Bogomolov et de Peyre.

Voici une intuition qui peut éclairer le théorème 1.1. Soit X une k -variété lisse, et supposons donnée une compactification lisse $X \subset \bar{X}$, telle que $D = \bar{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux. On a alors une suite exacte [Kah11, remarque 6.9]

$$0 \rightarrow A^0(\bar{X}, M_n) \rightarrow A^0(X, M_n) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r A^0(D_i^\circ, M_{n-1})$$

où D_i décrit l'ensemble des composantes irréductibles de D et $D_i^\circ = D_i \setminus \bigcup_{j \neq i} D_j$. Imaginons que BG soit représenté par une variété X comme ci-dessus. Dans le théorème 1.1, tout se passe

1. Mathieu Florence a fait une suggestion dans ce sens au premier auteur, quand G est fini constant mais que k ne contient pas assez de racines de l'unité.

comme si on pouvait alors trouver une compactification $\bar{X}$ telle que les D_i° soient de la forme BD , où D décrit les sous-groupes de $G \dots$

Ce travail est une version remaniée et augmentée de la seconde partie de la thèse du second auteur (Paris Diderot, 2010), la première partie étant parue dans [KN14] ; il a été annoncé dans [Ngu11].

Guide de lecture

On utilise le langage développé dans [KN14] et rappelé au § 2.1 : si G est un groupe algébrique linéaire et F est un foncteur sur les variétés lisses vérifiant des axiomes simples, on peut donner un sens à $F(BG)$.

La section 2 introduit l’outil principal de l’article : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$. La section 3 enchaîne en montrant que les classes sur BG , non ramifiées au sens de [CTO89], sont non ramifiées au sens des résidus géométriques.

La section 4 est le cœur de ce travail. On y démontre que réciproquement, si G est fini constant d’exposant m et que k est de caractéristique première à m et contient les racines m -ièmes de l’unité, les classes sur BG , non ramifiées au sens des résidus géométriques, le sont au sens de [CTO89]. La raison pour laquelle les résidus géométriques suffisent dans ce cas semble être que, si G est le groupe de Galois d’une extension L/K où $K \supset k$ et que w est une valuation discrète de rang 1 sur L , le groupe d’inertie de w est *central* dans son groupe de décomposition.

Enfin, la section 5 reformule le résultat précédent de manière universelle, tandis que la section 6 l’utilise pour retrouver (et généraliser) des théorèmes de Bogomolov et Peyre [Bog88, Pey08].

2. Résidus géométriques

Nous introduisons ici des “résidus géométriques”, inspirés par les travaux de Peyre et de Voevodsky. On fixe un corps de base k .

2.1 Rappels de [KN14]

Notons $\mathbf{Sm}_k$ la catégorie des k -variétés lisses, les morphismes étant les morphismes plats. Pour $r \geq 1$, on note comme dans [KN14, définition 2.3] S_r l’ensemble des morphismes de $\mathbf{Sm}_k$, union de l’ensemble des projections d’espace total un fibré vectoriel et de l’ensemble des immersions ouvertes $j : U \rightarrow X$ de coniveau au moins r (par définition, cela signifie que $\mathrm{codim}_X(X - U) \geq r$). Notons d’autre part $\mathbf{Grp}$ la catégorie des k -groupes algébriques linéaires (morphismes : les homomorphismes de groupes algébriques) ; dans [KN14, définition 2.14], on a défini une suite compatible de foncteurs

$$B_r : \mathbf{Grp} \rightarrow S_r^{-1} \mathbf{Sm}_k, \quad r \geq 1 \quad (2.1)$$

où le membre de droite est la localisation à la Gabriel–Zisman de $\mathbf{Sm}_k$ relativement à S_r .

Pour référence ultérieure, rappelons la construction de B_r . On choisit une représentation linéaire V de G très fidèle de coniveau au moins r : cela signifie [KN14, définition 2.7] que V contient un ouvert G -invariant U , espace total d’un G torseur et tel que $\mathrm{codim}_V(V - U) \geq r$. L’existence de V est assurée par un théorème de Totaro [Tot99, remarque 1.4]. On définit $B_r G$ (essentiellement) comme $U/G \in S_r^{-1} \mathbf{Sm}_k$: le “lemme sans nom” permet de montrer que $B_r G$ est indépendant du choix de V à isomorphisme unique près, et est fonctoriel en G .

Un foncteur F de $\mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ est dit *homotopique et pur en coniveau au moins r* s'il inverse les morphismes de S_r (en particulier, F est invariant par homotopie). De manière équivalente, F induit un foncteur $S_r^{-1} \mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{F_r} \mathcal{C}$, et on pose

$$F(BG) = F_r(B_r G).$$

On renvoie à [KN14, § 3.2 et § 5] pour des exemples de tels foncteurs : cohomologie étale, cohomologie motivique, cohomologie de cycles de Rost.

Rappelons également la définition suivante [KN14, définition 3.8] :

DÉFINITION 2.1. Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Pour tout $G \in \mathbf{Grp}$, on pose

$$\tilde{F}(BG) = \text{Ker}(F(B\varepsilon))$$

où ε est l'idempotent $G \rightarrow \text{Spec}(k) \rightarrow G$. C'est la *partie réduite* de $F(BG)$.

Dans [KN14] on n'a utilisé que la fonctorialité plate sur les k -schémas lisses : cela permet par exemple de définir économiquement le foncteur $G \mapsto CH^n(BG)$ en n'utilisant que la contravariance "facile" des groupes de Chow, comme Totaro le fait dans [Tot99]. Ici nous aurons aussi besoin de fonctorialité pour certaines immersions fermées.

2.2 La construction F_{-1} de Voevodsky

DÉFINITION 2.2. Soit F un foncteur contravariant de $\mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$ vers la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens. On définit pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$ (cf. [MVW06, Lecture 23]) :

$$F_{-1}(X) = \text{Coker} \left(F(X \times \mathbb{A}^1) \rightarrow F(X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\})) \right) \quad (2.2)$$

et on note

$$\partial: F(X \times \mathbb{G}_m) \rightarrow F_{-1}(X).$$

Si F est contravariant pour les immersions fermées régulières, on note

$$s: F(X \times \mathbb{G}_m) \rightarrow F(X) \quad (2.3)$$

le morphisme défini par la section unité de $\mathbb{G}_m$.

Le lemme suivant se démontre sans difficulté :

LEMME 2.3. Si F est homotopique et pur en coniveau au moins r , le foncteur F_{-1} l'est aussi.

LEMME 2.4. Si F est invariant par homotopie et contravariant pour les immersions fermées régulières, alors

$$(s, \partial): F(X \times \mathbb{G}_m) \rightarrow F(X) \oplus F_{-1}(X)$$

est un isomorphisme pour tout X .

Démonstration. Comme F est invariant par homotopie, $F(X) \xrightarrow{\sim} F(X \times \mathbb{A}^1)$. De plus, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} F(X \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & F(X \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\partial} & F_{-1}(X) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \wr & & \swarrow s & & & & \\ F(X) & & \nwarrow p^* & & & & \end{array}$$

où $p: X \times \mathbb{G}_m \rightarrow X$ est la projection sur X . Comme $s \circ p^* = \text{id}$, on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X). \quad \square$$

Exemples 2.5 ($F_{-1}(X)$ pour certains foncteurs F).

(i) Pour $F(X) = H^i(X, \mathbb{Z}(n))$, on a

$$F_{-1}(X) = H^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1))$$

[MVW06, 23.1]. On a le même résultat pour la cohomologie étale et la cohomologie motivique étale, c'est-à-dire :

- Si $F(X) = H_{\text{ét}}^i(X, M)$, alors $F_{-1}(X) = H_{\text{ét}}^{i-1}(X, M(-1))$;
- Si $F(X) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1}(X) = H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1))$.

(ii) Soit $F(X) = A^0(X, M_n)$, où $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un module de cycles au sens de Rost [Ros96, § 5]. On a une suite exacte de localisation

$$\begin{aligned} A^0(X \times \mathbb{A}^1, M_n) &\longrightarrow A^0(X \times \mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{(4)} A^0(X, M_{n-1}) \\ &\xrightarrow{(5)} A^1(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \xrightarrow{(6)} A^1(X \times \mathbb{G}_m, M_n). \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4 et l'invariance par homotopie de la cohomologie de cycles, (6) est injectif scindé, donc (5) est nul et (4) est surjectif, soit $F_{-1}(X) = A^0(X, M_{n-1})$.

Ce calcul a implicitement utilisé la contravariance de la cohomologie de cycles pour les immersions fermées [Ros96, § 12].

2.3 Résidus géométriques “universels”

Soit G un k -groupe algébrique linéaire et soit H un sous-groupe fermé de G ; soit $r \geq 1$. Dans [KN14, exemple 2.18], on a construit un morphisme dans $S_r^{-1} \mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$

$$G/H \rightarrow B_r H. \quad (2.4)$$

CONSTRUCTION 2.6. Soit m un entier inversible dans k . Soit X un schéma lisse sur k . Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau au moins r . Le morphisme résidu universel

$$\partial_m: F(X \times B\mu_m) \rightarrow F_{-1}(X) \quad (2.5)$$

est défini de la manière suivante :

En utilisant (2.4) avec $G = \mathbb{G}_m$ et $H = \mu_m$ et en remarquant que $\mathbb{G}_m/\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$, on obtient une flèche canonique $\mathbb{G}_m \rightarrow B_r \mu_m$ dans $S_r^{-1} \mathbf{Sm}_{\mathbb{A}^1}$, d'où une composition :

$$\partial_m: F(X \times B\mu_m) \rightarrow F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\partial} F_{-1}(X).$$

De manière équivalente, soit U un $\mathbb{G}_m$ -torseur linéaire de coniveau au moins r [KN14, définition 2.7]. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m & \xleftarrow{\pi_1} & U \times \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\pi_2} & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_m & \xleftarrow[\sim]{\times m} & \mathbb{G}_m/\mu_m & \xleftarrow{\bar{\pi}_1} & (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m \xrightarrow{\bar{\pi}_2} U/\mu_m. \end{array} \quad (2.6)$$

La ligne du bas induit un diagramme

$$F(X \times (U/\mu_m)) \rightarrow F(X \times (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m) \xleftarrow{\sim} F(X \times (\mathbb{G}_m/\mu_m)) \xleftarrow{\sim} F(X \times \mathbb{G}_m) \rightarrow F_{-1}(X)$$

d'où l'on déduit (2.5).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui résulte de la description du morphisme bord d'une longue suite exacte de cohomologie :

LEMME 2.7. *Soit M un module de cycles. Notons ∂_0 le résidu relatif à la valuation discrète sur $k(t) = k(\mathbb{A}^1)$ correspondant à l'origine de $\mathbb{A}^1$. Notons d'autre part δ le bord de la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverte $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A^0(\mathbb{G}_m, M_n) & \xrightarrow{\delta} & A^0(k, M_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow = \\ M_n(k(t)) & \xrightarrow{\partial_0} & M_{n-1}(k) \end{array}$$

est commutatif.

LEMME 2.8. *Soit M un module de cycles sur k , et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors le morphisme résidu (2.5) pour $A^0(-, M_n)$ est compatible avec celui considéré par Peyre dans [Pey08, (13), p. 207].*

Plus précisément, soient $\chi: \mu_m \hookrightarrow k^*$ le caractère canonique de μ_m , W_χ la représentation fidèle de dimension 1 correspondante, B_χ la valuation discrète de rang 1 sur $k(X \times W_\chi) = k(X)(T)$ définie par le diviseur $T = 0$ et A_χ sa trace sur $k(X \times W_\chi)^{\mu_m}$. Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^0(X \times B\mu_m, M_n) & \xrightarrow{\partial_m} & A^0(X, M_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_n(k(X \times W_\chi)^{\mu_m}) & \xrightarrow{\partial_{A_\chi}} & M_{n-1}(k(X)). \end{array}$$

Démonstration. Par fonctorialité, on peut remplacer X par son corps des fonctions, donc (quitte à changer de corps de base) supposer que $X = \text{Spec } k$.

Soit $U = \mathbb{A}^r - \{0\}$; faisons opérer $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^r$ et donc sur U par homothéties. Choisissons un point rationnel $x \in U(k)$: ce point définit un morphisme $\mathbb{G}_m$ -équivariant $\varphi: \mathbb{G}_m \rightarrow U$, d'où un morphisme

$$\bar{\varphi}: \mathbb{G}_m \xleftarrow{\sim} \mathbb{G}_m/\mu_m \rightarrow U/\mu_m.$$

Soit $\gamma: \mathbb{G}_m \rightarrow U \times \mathbb{G}_m$ le transposé du graphe de φ : avec les notations de (2.6), c'est une section μ_m -équivariante de π_1 telle que $\pi_2 \circ \gamma = \varphi$. En prenant les quotients par μ_m , la section γ induit une section $\bar{\gamma}$ de $\bar{\pi}_1$ telle que $\bar{\pi}_2 \circ \bar{\gamma} = \bar{\varphi}$, ce qui implique que la composition

$$A^0((U/\mu_m), M_n) \xrightarrow{\bar{\varphi}^*} A^0(\mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{\delta} M_{n-1}(k)$$

est égale à ∂_m , où δ est le morphisme bord pour la suite exacte de localisation relative à l'immersion ouverte $\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$.

Finalement, on a $\varphi(\mathbb{G}_m) = L - \{0\}$ où L est la droite kx . L'assertion résulte maintenant du lemme 2.7. $\square$

2.4 Résidus géométriques “à la Peyre”

DÉFINITION 2.9. Soit F comme dans la construction 2.6. Soient $G \in \mathbf{Grp}$, $D \subset G$ un sous-groupe fermé et $g: \mu_m \rightarrow Z_G(D)$ un homomorphisme, où $Z_G(D)$ désigne le centralisateur de D dans G . On note $\varphi: D \times \mu_m \rightarrow G$ l'homomorphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. On définit un morphisme

$$\partial_{D,g}: F(BG) \xrightarrow{\varphi^*} F(B(D \times \mu_m)) \xrightarrow{\sim} F(BD \times B\mu_m) \xrightarrow{\partial_m} F_{-1}(BD)$$

où ∂_m est comme dans (2.5), l'isomorphisme provient de l'isomorphisme $B_r(D \times \mu_m) \simeq B_r D \times B_r \mu_m$ de [KN14, lemme 2.24] et $F_{-1}(BD)$ est défini par le lemme 2.3.

PROPOSITION 2.10. *Le morphisme $\partial_{D,g}$ est canonique et fonctoriel en F .*

Exemples 2.11. D'après les exemples 2.5, on a les résidus suivants :

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^n(BG, \mu_m^{\otimes j}) &\rightarrow H_{\text{ét}}^{n-1}(BD, \mu_m^{\otimes(j-1)}), \\ H_{\text{ét}}^n(BG, \mathbb{Z}(q)) &\rightarrow H_{\text{ét}}^{n-1}(BD, \mathbb{Z}(q-1)), \\ H^n(BG, \mathbb{Z}(q)) &\rightarrow H^{n-1}(BD, \mathbb{Z}(q-1)), \\ A^0(BG, M_n) &\rightarrow A^0(BD, M_{n-1}). \end{aligned}$$

Remarque 2.12. Supposons G fini constant, d'exposant e premier à la caractéristique de k . Alors tout homomorphisme g comme ci-dessus a pour image un sous-groupe cyclique d'ordre m' divisant e , donc se factorise par $\mu_{m'}$ via la surjection $\mu_m \rightarrow \mu_{m'}$; de plus, $\mu_{m'}$ est constant. Si $g': \mu_{m'} \rightarrow Z_G(D)$ est l'homomorphisme induit, on voit tout de suite que $\partial_{D,g} = \partial_{D,g'}$ en comparant deux suites exactes de Kummer. On peut donc se limiter aux valeurs de m divisant e et telles que $\mu_m \subset k$.

2.5 Le résidu d'un cup-produit

Le résultat principal de cette section (théorème 2.15) ne sera pas utilisé dans la suite; il est néanmoins très utile pour des calculs concrets.

2.5.1 *Décomposition de la diagonale.* Soient $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et $f: X \rightarrow \mathbb{G}_m$ ($f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$). Soit $\Gamma_f: X \rightarrow X \times \mathbb{G}_m$ le graphe de f . Soit $F: \mathbf{Sm}(k)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un foncteur homotopique et pur en coniveau au moins c . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} F(X \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & F(X \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & F_{-1}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow \sim & \downarrow \Gamma_f^* & & & & \\ & & F(X) & & & & \end{array}$$

Si $f = 1$, alors $\Gamma_f^* = s^F$ (la section de (2.3)) et donc on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X) \quad (2.7)$$

d'après le lemme 2.4. Alors $\Gamma_f^* - \Gamma_1^*$ s'annule sur $F(X \times \mathbb{A}^1)$, donc induit un morphisme

$$\{f\}^*: F_{-1}(X) \rightarrow F(X). \quad (2.8)$$

Considérons maintenant la diagonale $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. On a le morphisme

$$(1_X \times \Delta)^*: F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \rightarrow F(X \times \mathbb{G}_m).$$

Par transport de structure, il définit un morphisme $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{array}{ccc} F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{(1_X \times \Delta)^*} & F(X \times \mathbb{G}_m) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(X) \oplus 2F_{-1}(X) \oplus F_{-2}(X) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & F(X) \oplus F_{-1}(X) \end{array}$$

où $F_{-2} = (F_{-1})_{-1}$ et l'isomorphisme de gauche est obtenu en appliquant deux fois le lemme 2.4.

On va calculer $\tilde{\Delta}$ dans le cas particulier où F provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM} := \mathbf{DM}_{\text{Nis}}^{\text{eff}, -}(k)$ [MVW06, Lecture 14]. Le lemme suivant justifie la notation (2.8) :

LEMME 2.13. *Si F provient d'un foncteur sur $\mathbf{DM}$ et si $X = \text{Spec } k$, alors $\{f\}^*$ est induit par le cup-produit par $\{f\} \in K_1^M(k) = H^1(k, \mathbb{Z}(1))$ pour $f \in k^*$.*

Démonstration. Dans ce cas, $\Gamma_f^* - \Gamma_1^*$ provient de

$$M(X) \xrightarrow{\Gamma_f - \Gamma_1} M(X \times \mathbb{G}_m) = M(X) \oplus M(X)(1)[1] \xrightarrow{pr} M(X)(1)[1].$$

Si $X = \text{Spec } k$, d'où $f \in k^*$, alors

$$\Gamma_f - \Gamma_1 \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(1)[1]) \cong K_1^M(k)$$

[MVW06, 4.2]. On vérifie que cet isomorphisme identifie $\Gamma_f - \Gamma_1$ à $\{f\} \in K_1^M(k) \cong k^*$ (voir [MVW06, preuve de 4.4]). $\square$

PROPOSITION 2.14. *Supposons que F se factorise en*

$$\mathbf{Sm}(k)^{\text{op}} \xrightarrow{M^{\text{op}}} \mathbf{DM}^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}.$$

Alors $\tilde{\Delta}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On choisit la décomposition $M(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1]$ donnée par le point $1 \in \mathbb{G}_m$. Cela donne exactement (2.7) sur $F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $F_{-1}(M(X)) = F(M(X)(1)[1])$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{(1_X \times \Delta)^*} & F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])^{\otimes 2}) & \longrightarrow & F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(M(X)) \oplus 2F_{-1}(M(X)) \oplus F_{-2}(M(X)) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & F(M(X)) \oplus F_{-1}(M(X)). \end{array}$$

Dans ce cas, $\tilde{\Delta}$ est induite par

$$M(\Delta): \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1] \rightarrow \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}(1)[1] \oplus \mathbb{Z}(2)[2]$$

et on a

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}(j)[j], \mathbb{Z}(i)[i]) = \begin{cases} \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(i-j)[i-j]) = K_{i-j}^M(k) & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

D'après [HK06, lemme 7.4 et corollaire 7.9(b)], on trouve que $\tilde{\Delta}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}$$

où $\sum: 2F_{-1}(M(X)) \rightarrow F_{-1}(M(X))$ est induit par $\mathbb{Z}(1)[1] \rightarrow 2\mathbb{Z}(1)[1]$ et $\{-1\}: F_{-2}(M(X)) \rightarrow F_{-1}(M(X))$ est induit par $\{-1\}: \mathbb{Z}(1)[1] \rightarrow \mathbb{Z}(2)[2]$ (cf. lemme 2.13), ce qui correspond à la formule de [HK06, corollaire 7.9(b)]. $\square$

2.5.2 *Résidus géométriques et cup-produits.* Soient F, G, H dans la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{Sm}(k)$ vers les groupes abéliens et supposons que pour tous schémas $X, Y \in \mathbf{Sm}(k)$, on ait un produit externe

$$F(X) \otimes G(Y) \rightarrow H(X \times Y) \quad (2.9)$$

bifonctoriel en (X, Y) . D'où un produit interne :

$$F(X) \otimes G(X) \rightarrow H(X \times X) \rightarrow H(X)$$

où la dernière flèche est donnée par la diagonale $X \rightarrow X \times X$.

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} F(X \times \mathbb{A}^1) \otimes G(Y) & \longrightarrow & F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y) & \longrightarrow & F_{-1}(X) \otimes G(Y) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \exists ! & & \\ H(X \times Y \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{-1}(X \times Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G(Y) \rightarrow H_{-1}(X \times Y), \quad (2.10)$$

et de manière analogue

$$F(X) \otimes G_{-1}(Y) \rightarrow H_{-1}(X \times Y). \quad (2.11)$$

Pour $Y = X$, on a une composition

$$F(X) \otimes G_{-1}(X) \oplus F_{-1}(X) \otimes G(X) \rightarrow H_{-1}(X \times X) \rightarrow H_{-1}(X).$$

Considérons encore le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} F(X \times \mathbb{A}^1) \otimes G_{-1}(Y) & \longrightarrow & F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G_{-1}(Y) & \longrightarrow & F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \exists ! & & \\ H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{A}^1) & \longrightarrow & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{-2}(X \times Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On en déduit un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \rightarrow H_{-2}(X \times Y). \quad (2.12)$$

THÉORÈME 2.15. *Supposons que F, G, H se factorisent par $\mathbf{DM}$. Soient $x \in F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $y \in G(X \times \mathbb{G}_m)$; notons xy leur cup-produit dans $H(X \times \mathbb{G}_m)$. Alors on a*

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y) \quad (2.13)$$

où l'on note ∂^F, s^F , etc. pour garder la trace de F, G, H .

Démonstration. Appliquant ce qui précède, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \\ \downarrow 1 \times \partial^G & & \downarrow \partial^{H_{-1}} \\ F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) & \longrightarrow & H_{-2}(X \times Y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \\ \downarrow 1 \times s^G & & \downarrow s^{H-1} \\ F_{-1}(X) \otimes G(Y) & \longrightarrow & H_{-1}(X \times Y) \end{array}$$

où s^G, s^{H-1} sont des spécialisations comme dans le lemme 2.4.

Maintenant considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sim} & (F(X) \oplus F_{-1}(X)) \otimes (G(Y) \oplus G_{-1}(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(X \times \mathbb{G}_m \times Y \times \mathbb{G}_m) & & \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sim} & H(X \times Y) \oplus 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \\ \downarrow (1_{X \times Y} \times \Delta)^* & & \downarrow \bar{\Delta} \\ H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sim} & H(X \times Y) \oplus H_{-1}(X \times Y) \end{array}$$

où la longue flèche de droite est construite à partir de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12). D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow[\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G]{\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G} & F_{-1}(X) \otimes G(Y) \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \\ \downarrow (1_{X \times Y} \times \Delta)^* & & \downarrow \bar{\Delta} \\ H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\partial^H} & H_{-1}(X \times Y). \end{array}$$

Si $Y = X$, on a

$$\begin{array}{ccc} F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(X \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow[\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G]{\partial^F \times s^G + s^F \times \partial^G} & F_{-1}(X) \otimes G(X) \oplus F(X) \otimes G_{-1}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(X \times X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 2H_{-1}(X \times X) \oplus H_{-2}(X \times X) \\ \downarrow (1_{X \times X} \times \Delta)^* & & \downarrow \bar{\Delta} \\ H(X \times X \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\partial^H} & H_{-1}(X \times X) \\ \downarrow (\Delta_X \times 1)^* & & \downarrow (\Delta_X)^* \\ H(X \times \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\partial^H} & H_{-1}(X) \end{array}$$

où Δ_X est la diagonale $X \xrightarrow{\Delta_X} X \times X$. Du diagramme ci-dessus et de la proposition 2.14, on déduit

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y).$$

□

COROLLAIRE 2.16. La formule (2.13) s'applique aussi aux résidus ∂_m de (2.5) et $\partial_{D,g}$ de la définition 2.9.

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition de ces résidus. $\square$

Remarque 2.17. La formule (2.13) est analogue à celle de Rost [Ros96, P3, p. 331] (un signe apparaît en plus chez Rost parce que les modules de cycles sont gradués).

3. Classes non ramifiées sur un espace classifiant

3.1 Le foncteur $A_{\text{NR}}^0(-, M_n)$

On se donne un module de cycles $M = (M_n)$.

DÉFINITION 3.1. Soit $G \in \mathbf{Grp}$. On définit

$$A_{\text{NR}}^0(BG, M_n) = \bigcap_{(D \subset G, g: \mu_m \rightarrow Z_G(D))} \text{Ker} \left(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \right)$$

où $\partial_{D,g}$ est donné par la définition 2.9 et m parcourt les entiers strictement positifs.

PROPOSITION 3.2. La loi $G \mapsto A_{\text{NR}}^0(BG, M_n)$ définit un sous-foncteur de $G \mapsto A^0(BG, M_n)$ sur $\mathbf{Grp}$.

Démonstration. Soit $f: G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes : il s'agit de voir que

$$f^* A_{\text{NR}}^0(BH, M_n) \subset A_{\text{NR}}^0(BG, M_n).$$

Si $D \subset G$ est un sous-groupe de G , posons $D_H = f(D)$: on a $f(Z_G(D)) \subset Z_H(D_H)$. Soit $g: \mu_m \rightarrow Z_G(D)$. La composition

$$g_H: \mu_m \xrightarrow{g} Z_G(D) \xrightarrow{f} Z_H(D_H)$$

donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} A^0(BG, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD \times B\mu_m, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD \times \mathbb{G}_m, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD, M_{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A^0(BH, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD_H \times B\mu_m, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD_H \times \mathbb{G}_m, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD_H, M_{n-1}), \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{ccc} A^0(BG, M_n) & \xrightarrow{\partial_{D,g}^G} & A^0(BD, M_{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A^0(BH, M_n) & \xrightarrow{\partial_{D_H, g_H}^H} & A^0(BD_H, M_{n-1}) \end{array}$$

où l'on a écrit ∂^G, ∂^H pour garder la trace de G, H . D'où l'inclusion cherchée. $\square$

3.2 Une formule simplifiée pour $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n)$

LEMME 3.3. Soient $D' \subset D \subset G$ et $g: \mu_m \rightarrow Z_G(D)$; notons $g': \mu_m \rightarrow Z_G(D) \hookrightarrow Z_G(D')$. Alors $\text{Ker } \partial_{D,g} \subset \text{Ker } \partial_{D',g'}$.

Démonstration. Cela résulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 F(BG) & \longrightarrow & F(BD \times BI) & \longrightarrow & F(BD \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & F_{-1}(BD) \\
 \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F(BG) & \longrightarrow & F(BD' \times BI) & \longrightarrow & F(BD' \times \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & F_{-1}(BD').
 \end{array}$$

□

Du lemme 3.3, on déduit :

PROPOSITION 3.4. On a

$$A_{\text{nr}}^0(BG, M_n) = \bigcap_{g: \mu_m \rightarrow G} \text{Ker}(\partial_{Z_G(g), g})$$

où $Z_G(g)$ est le centralisateur de $g(\mu_m) \subset G$.

3.3 Une majoration de la cohomologie non ramifiée

Rappelons de [KN14, § 6] le groupe $A_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \subset A^0(BG, M_n)$ des classes non ramifiées : il est donné par

$$A_{\text{nr}}^0(K/k, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \text{Ker} \left(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A) \right),$$

où K est le corps des fonctions de U/G pour un G -torseur linéaire U de coniveau au moins 1 au sens de [KN14, définition 2.7] et $\mathcal{P}(K/k)$ est l'ensemble des sous-anneaux de valuation discrète A de rang 1 de K , de type géométrique sur k , tels que $K = \text{Frac}(A)$ [KN14, définition 6.1] ; ce groupe ne dépend pas du choix de U et est fonctoriel en G d'après [KN14, proposition 6.4 et 2.22].

PROPOSITION 3.5. On a l'inclusion

$$A_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \subset A_{\text{nr}}^0(BG, M_n).$$

Démonstration. Choisissons une représentation très fidèle W de G [KN14, définition 2.7]. Soit x un élément de $A_{\text{nr}}^0(k(W)^G, M_n) \subset A^0(BG, M_n)$: on a $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$. Remplaçons la notation $\partial_{D,g}$ de la définition 2.9 par $\partial_{D,g}^G$, pour garder la trace du groupe G . On veut montrer que pour tout le couple (D, g) , on a $\partial_{D,g}^G(x) = 0$.

Pour simplifier, posons $I = \mu_m$. Soit $\varphi: D \times I \rightarrow G$ le morphisme défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. D'après la définition des résidus géométriques, $\partial_{D,g}^G$ se factorise par $\partial_{D,g}^{D \times I}$; autrement dit, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A^0(BG, M_n) & & \\
 \downarrow \varphi^* & \searrow \partial_{D,g}^G & \\
 A^0(BD \times BI, M_n) & \xrightarrow{\partial_{D,g}^{D \times I}} & A^0(BD, M_{n-1}).
 \end{array}$$

Mais $\varphi^* A_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \subset A_{\text{nr}}^0(BD \times BI, M_n)$ [KN14, § 6.4]. On peut donc supposer que $G = D \times I$.

On raisonne comme Peyre dans [Pey08, p. 207] : choisissons W de la forme $W' \times W_\chi$, où W' est une représentation très fidèle de D et W_χ est la représentation fidèle canonique de dimension 1

de I . Le diagramme commutatif du lemme 2.8 :

$$\begin{array}{ccc} A^0(BD \times BI, M_n) & \xrightarrow{\partial_{D,g}^{D \times I}} & A^0(BD, M_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_n(k(W' \oplus W_\chi)^{D \times I}) & \xrightarrow{\partial_{A_\chi}} & M_{n-1}(k(W')^D) = M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}) \end{array}$$

où $A_\chi \in \mathcal{P}(k(W' \oplus W_\chi)^{D \times I}/k)$, montre immédiatement que $\partial_{D,g}^{D \times I} A_{\text{nr}}^0(BD \times BI, M_n) = 0$. $\square$

Remarque 3.6. Pour G quelconque, il est improbable qu'on ait égalité dans la proposition 3.5 : les résidus géométriques $\partial_{D,g}$ ne semblent pas suffisants. Le résultat principal de cet article est qu'on a égalité quand G est fini constant et que k contient assez de racines de l'unité. C'est l'objet de la section suivante.

4. Le théorème principal

À partir de maintenant, on suppose que G est un groupe fini constant d'exposant m , où m est un entier inversible dans k , et que $\mu_m \subset k$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n) = A_{\text{nr}}^0(BG, M_n)$ (égalité dans $A^0(BG, M_n)$).*

4.1 Un sous-groupe intermédiaire

D'après la proposition 3.5, il suffit de démontrer que $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n) \subset A_{\text{nr}}^0(BG, M_n)$. Pour cela, on va définir un autre sous-groupe de $A^0(BG, M_n)$ contenant $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n)$ de la manière suivante.

Soit W une représentation linéaire fidèle de G . Soient $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ et $B \in \mathcal{P}(k(W)/k)$ au dessus de A . Soient D le groupe de décomposition de B dans G et I son groupe d'inertie.

Remarque 4.2. Comme l'exposant de G divise m , l'ordre de G divise une puissance de m et donc $|G|$ est inversible dans k . D'après [Ser68, IV, § 2, corollaires 2 et 3], I est cyclique, canoniquement isomorphe à μ_q avec $q|m$, et *central* dans D .

DÉFINITION 4.3. On définit :

$$A_{\text{NR},sp}^0(k(W)^G, M_n) = \bigcap_{(D \subset G, g: I \rightarrow Z_G(D))} \text{Ker} \left(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \right),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des sous-groupes D, I relatifs à $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ comme ci-dessus et $\partial_{D,g}$ est donné par la définition 2.9.

Il est clair que $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n) \subset A_{\text{NR},sp}^0(k(W)^G, M_n)$. On va démontrer le théorème et les corollaires ci-dessous dans les numéros suivants.

THÉORÈME 4.4. *Soient B, A comme ci-dessus, et soient D et I les sous-groupes de décomposition et d'inertie de B . Considérons les résidus*

$$\begin{aligned} & A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \quad (\text{cf. définition 2.9}) \\ \text{et } & M_n(k(W)^G) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A) \end{aligned}$$

où κ_A est le corps résiduel de A . Si $x \in A^0(BG, M_n)$ est tel que $\partial_{D,g}(x) = 0$, alors $\partial_A(x) = 0$. Par conséquent,

$$A_{\text{NR},sp}^0(k(W)^G, M_n) \subset A_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \quad (\text{cf. définition 4.3 et [KN14, définition 6.1]}).$$

D'où l'on déduit le théorème principal 4.1 et un peu plus précisément :

COROLLAIRE 4.5. $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n) = A_{\text{NR},sp}^0(k(W)^G, M_n) = A_{\text{nr}}^0(BG, M_n)$.

De plus, comme $A_{\text{nr}}^0(BG, M_n)$ et $A_{\text{NR}}^0(BG, M_n)$ sont des foncteurs contravariants en G (cf. [KN14, § 5.5] et proposition 3.2), on obtient :

COROLLAIRE 4.6. On a aussi un résultat équivalent au théorème 4.1 pour la partie réduite (cf. définition 2.1) :

$$\tilde{A}_{\text{NR}}^0(BG, M_n) = \tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_n).$$

4.2 Lemmes

Dans cette partie, on garde les hypothèses de la définition 3.1 et les notations précédentes.

Pour montrer le théorème 4.4, on a besoin des lemmes suivants. Les deux premiers reformulent certains résultats de Saltman [Sal84].

LEMME 4.7. Soit k un corps contenant le groupe μ_q des racines de l'unité où q est inversible dans k . Soient G un groupe fini et N un groupe cyclique d'ordre q . Soit G' une extension centrale de G par N . Donnons-nous un 2-cocycle normalisé c de G à valeurs dans N définissant l'extension G' , associé à une section ensembliste s de la projection $\pi : G' \rightarrow G$ (vérifiant $s(1) = 1$).

Soit k'/k une extension de groupe de Galois G . Soit $\chi : N \xrightarrow{\sim} \mu_q$ un caractère fidèle de N sur k . Notons W_χ la k -représentation de dimension 1 correspondante. Soit W la représentation de G' induite de W_χ . Alors W est fidèle et on a un isomorphisme

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(S'(k'/k))/\text{Frac}(R(k'/k))$$

où G' opère sur $k'(W)$ par son action sur k' (via G) et sur W , et $S'(k'/k)$, $R(k'/k)$ sont associées à c comme dans Saltman [Sal84, discussion entre les lemmes 1.2 et 1.3].

Rappelons d'abord la définition de l'extension $S'(k'/k)/R(k'/k)$ de loc. cit. Dans la situation de l'énoncé :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G' \xrightleftharpoons[\pi]{s} G \longrightarrow 1$$

le 2-cocycle c est défini par la relation

$$s(g)s(h) = s(gh)c(g, h).$$

Soit $g' \in G'$: on écrit $g' = n(g')s\pi(g')$ avec $n(g') \in N \subset Z(G')$.

— $S''(k'/k) := k'[y(g) \mid g \in G](1/s)$ où $s = \prod_{g \in G} y(g)$. Et G opère sur $S''(k'/k)$ par son action sur k' et par

$$gy(h) = y(gh) \quad \forall g \in G.$$

— $S(k'/k) := S''(k'/k)[x(g) \mid 1 \neq g \in G]/(x(g)^q = y(g)/y(1))$. Notons $x(1) = 1$. Alors l'action de G sur $S(k'/k)$ étend celle sur $S''(k'/k)$ via

$$gx(h) = [x(gh)/x(h)]\chi(c(g, h)).$$

- $S'(k'/k) := S(k'/k)[\gamma]/(\gamma^q = y(1))$. Donc N opère sur $S'(k'/k)$ par l'action triviale sur $S(k'/k)$ et par

$$n\gamma = \chi(n)\gamma.$$

Alors G' opère sur $S'(k'/k)$ via N et G .

- $R(k'/k) := S(k'/k)^G$.

Le diagramme suivant résume ce qui précède :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & S'(k'/k) \\ & & & & \uparrow N \\ k' & \longrightarrow & S''(k'/k) & \longrightarrow & S(k'/k) \\ \uparrow G & & & & \uparrow G \\ k & \longrightarrow & & & R(k'/k). \end{array}$$

Démonstration du lemme 4.7. D'après la définition des représentations induites, on a

$$W = k[G'] \otimes_{k[N]} W_\chi$$

de base $\{s(g) \otimes w \mid g \in G'\}$ où w est une base de W_χ . L'action de $g' \in G'$ sur W est

$$\begin{aligned} g'(s(g) \otimes w) &= g's(g) \otimes w = n(g')s\pi(g')s(g) \otimes w \\ &= n(g')s(\pi(g')g)c(\pi(g'), g) \otimes w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes n(g')c(\pi(g'), g).w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes \chi(n(g')c(\pi(g'), g))w \\ &= \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w. \end{aligned}$$

En particulier :

- Si $n \in N$, on a $n(s(g) \otimes w) = \chi(n)s(g) \otimes w$.
- Si $h \in G$, on a $s(h)(s(g) \otimes w) = \chi(c(h, g))s(hg) \otimes w$.

Montrons que $\text{Ind}_N^{G'} \chi$ est une représentation fidèle de G' . Pour $g' \in G'$ et un élément $x = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \in W$ avec $\lambda_g \in k$, on a :

$$\begin{aligned} g'x = x &\iff g' \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g g's(g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\ &\iff \sum_{g \in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g))s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g \in G} \lambda_{\pi(g')g} s(\pi(g')g) \otimes w \\ &\iff \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g} \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Si $g' = n(g') \in N - \{1\}$, alors $\chi(n(g')) \neq 1$ et donc

$$g'x = x \iff \lambda_g \chi(n(g')) = \lambda_g \quad \forall g \in G \iff \lambda_g = 0 \quad \forall g \in G \iff x = 0.$$

Si $g' = n(g')s\pi(g') \in G' - N$, c'est-à-dire $\pi(g') \neq 1$, soit m le nombre d'éléments de G ; on a :

$$g'x = x \Leftrightarrow \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g} \quad \forall g \in G.$$

Ici on a m variables λ_g mais il y a au maximum $m - 1$ équations indépendantes. Donc on peut trouver des λ_g hors des solutions, c'est-à-dire des λ_g tels que $g'x \neq x$.

Posons

$$\gamma = 1 \otimes w \quad \text{et} \quad x(g) = \frac{s(g) \otimes w}{1 \otimes w} \in k(W) \quad \forall g \neq 1.$$

Si $h \in G$, on a

$$s(h)x(g) = \frac{s(h)s(g) \otimes w}{s(h) \otimes w} = \frac{\chi(c(h, g))s(hg) \otimes w}{s(h) \otimes w} = \chi(c(h, g))x(hg)/x(h).$$

Si $n \in N$, on a

$$nx(g) = \frac{\chi(nc(1, g))s(g) \otimes w}{\chi(nc(1, 1))1 \otimes w} = x(g) \quad \text{car} \quad c(1, 1) = c(1, g) = c(g, 1) = 1.$$

Ainsi, N opère trivialement sur $\{x(g) \mid g \in G\}$.

Pour $n \in N$, on a $n\gamma = \chi(n)\gamma$.

Pour $h \in G$,

$$s(h)\gamma = s(h) \otimes w = (1 \otimes w) \frac{s(h) \otimes w}{1 \otimes w} = \gamma x(h).$$

Ainsi, on a les mêmes générateurs et relations que chez Saltman, et donc

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(S'(k'/k))/\text{Frac}(R(k'/k)). \quad \square$$

Remarque 4.8. Dans la démonstration ci-dessus, si on note $W^{g'} = \{x \in W \mid g'x = x\}$ (pour $g' \in G' - N$), alors on voit que $\dim W^{g'} = [G : \langle \pi(g') \rangle]$. Donc

$$\nu(W) = 1 \Leftrightarrow \exists g' : |G| - [G : \langle \pi(g') \rangle] = 1 \Leftrightarrow |G| = 2$$

(cf. [KN14, remarque 2.8]).

LEMME 4.9. Avec les notations du lemme précédent, on a un k -isomorphisme

$$k'(W)^{G'} \simeq k(\mathcal{A})(x)$$

où x est une indéterminée, $\mathcal{A}$ est la k -algèbre centrale simple définie par le 2-cocycle c et $k(\mathcal{A})$ est son corps de déploiement générique (corps des fonctions de la variété de Severi–Brauer de $\mathcal{A}$).

Démonstration. Cela résulte du lemme 4.7 et de [Sal84, théorème 1.5]. $\square$

LEMME 4.10. Soit K un corps complet pour une valuation discrète v de rang 1. Soit A l'anneau de valuation de v . On suppose qu'on est dans la situation suivante :

$$K \xrightarrow{G} K_{\text{nr}} \xrightarrow{N} K'$$

où K'/K est galoisienne de groupe G' , de groupe d'inertie N . Soit B la clôture intégrale de A dans K_{nr} . Soient κ_A, κ_B les corps résiduels de A, B . Supposons que q soit inversible dans κ_A . Alors :

- (i) L'image de $[G'] \in H^2(G, N) = H^2(\kappa_B/\kappa_A, N)$ est triviale dans le groupe de Brauer $\text{Br}(\kappa_A)$.
- (ii) L'extension $\kappa_B(W)^{G'}/\kappa_A$ est rationnelle, où W est la représentation du lemme 4.7.

Démonstration. (i) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 [G'] \in H^2(G, N) & \longrightarrow & H^2(G, \kappa_B^*) & \hookrightarrow & \text{Br}(\kappa_A) \\
 \downarrow & & \swarrow \varphi & & \\
 & & H^2(G, K_{\text{nr}}^*) & & \\
 \downarrow & & & & \\
 & & \text{Br}(K) & &
 \end{array}$$

Il existe un morphisme $\varphi: H^2(G, \kappa_B^*) \rightarrow H^2(G, K_{\text{nr}}^*)$ faisant commuter le triangle, et il est injectif (cf. [Ser68, XII, § 3]). En effet, on a la suite exacte

$$1 \rightarrow U_{K_{\text{nr}}} \rightarrow K_{\text{nr}}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

scindée par le choix d'une uniformisante de K . On en déduit une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow H^2(G, U_{K_{\text{nr}}}) \rightarrow H^2(G, K_{\text{nr}}^*) \rightarrow H^2(G, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

De plus, on a une autre suite exacte :

$$1 \rightarrow U_{K_{\text{nr}}}^1 \rightarrow U_{K_{\text{nr}}} \rightarrow \kappa_B^* \rightarrow 1$$

où $U_{K_{\text{nr}}}^1$ est le sous-groupe de $U_{K_{\text{nr}}}$ formé des $a \in U_{K_{\text{nr}}}$ tels que $v(1-a) \geq 1$. On a $H^q(G, U_{K_{\text{nr}}}^1) = 0$ pour tout $q \geq 1$ [Ser68, lemme 2, p. 193]. Donc

$$H^2(G, \kappa_B^*) \xleftarrow{\sim} H^2(G, U_{K_{\text{nr}}}) \hookrightarrow H^2(G, K_{\text{nr}}^*).$$

Comme K'/K est une extension de groupe de Galois G' induite par K_{nr}/K de groupe G (“the embedding problem”), d’après [Sal84, proposition 1.1], l’image de $[G']$ dans $H^2(G, K_{\text{nr}}^*)$ est triviale. Elle est donc triviale dans $H^2(G, \kappa_B^*) \hookrightarrow \text{Br}(\kappa_A)$.

(ii) Cela résulte du point (i) et du lemme 4.9, puisqu’avec les notations de ce lemme on a $[\mathcal{A}] = [G'] \in \text{Br}(\kappa_A)$. □

LEMME 4.11 (Lemme sans nom tordu). *Soient G, N, G' comme dans le lemme 4.9. Soit k'/k une extension de groupe de Galois G . Soient W, W' deux représentations fidèles de G' sur k . Alors $k'(W)^{G'}$ et $k'(W')^{G'}$ sont stablement équivalents sur k . Si l’un est pur, l’autre est stablement pur.*

Démonstration. Soit U un ouvert de W tel que U soit un G' -torseur (cf. [KN14, remarque 2.8]). Alors $U_{k'} = U \times_k \text{Spec}(k')$ est encore un G' -torseur (puisque $\text{Spec}(k')$ est un k -schéma affine [GR71, VIII, corollaire 7.9] ou [Mil80, 1, théorème 2.23]). Donc $U_{k'} \times_k W'/G'$ est un fibré vectoriel sur $U_{k'}/G'$. Et donc $k'(W \oplus W')^{G'} = k'(U_{k'} \times W')^{G'}$ est transcendant pur sur $k'(W)^{G'}$. On raisonne de même avec W' . □

4.3 Démonstration du théorème 4.4

D’après la remarque 4.2, le groupe I est cyclique ($I \xrightarrow{\sim} \mu_q$ où $q|m$) et central dans D . Rappelons aussi que

$$I = \text{Ker}(D \rightarrow \text{Gal}(\kappa_B/\kappa_A)).$$

Soit W' une k -représentation fidèle de D , qui est somme directe d’au moins deux représentations régulières de D (cf. [KN14, remarque 2.8 et § 5.5]). Soit

$$\chi: I \xrightarrow{\sim} \mu_q \hookrightarrow k^*$$

un caractère fidèle de I (cf. [Pey08, démonstration de la proposition 3, p. 207]). Soit π une uniformisante de B telle que $\pi^q \in k(W)^I$ (un tel π existe, cf. [Lan94, II, proposition 12]). Alors, $k(W) = k(W)^I[\pi]$ et

$$\sigma\pi = \chi(\sigma)\pi \quad (4.1)$$

pour $\sigma \in I$, parce que $\mu_q \subset k(W)^I$ et donc l'extension $k(W)/k(W)^I$ est kummerienne.

On note $\varphi: D \times I \rightarrow G$ le morphisme défini par $(d, i) \mapsto di$. Alors $D \times I$ opère sur W via φ .

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \overline{k(W)} & \longrightarrow & \overline{k(W \oplus W' \oplus \chi)} & \longleftarrow & \overline{k(W' \oplus \chi)} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ k(W) & \longrightarrow & k(W \oplus W' \oplus \chi) & \longleftarrow & k(W' \oplus \chi) \\ \uparrow G & & \uparrow D \times I & & \uparrow D \times I \\ k(W)^G & \longrightarrow & k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D \times I} & \longleftarrow & k(W' \oplus \chi)^{D \times I} \end{array}$$

où $D \times I$ opère sur $W \oplus W' \oplus \chi$ par l'action de $D \times I$ sur W , l'action de D sur W' et l'action de I sur χ .

Soit $(X_1, \dots, X_s)$ une base de W' . D'après [Bou64, lemme 1, p. 156], il existe une unique valuation discrète de rang 1, notée w_1 , prolongeant v_B dans $k(W)(X_1)$ et telle que

$$w_1(P) = w_1\left(\sum_j a_j X_1^j\right) = \inf_j \{v_B(a_j) + j\xi\}$$

où $a_j \in k(W)$ et $\xi \in \mathbb{Z}$. On choisit $\xi = 0$ et donc $w_1(X_1) = 0$. De plus, d'après [Bou64, proposition 2, p. 157], le corps résiduel κ_{w_1} de w_1 est transcendant pur sur $\kappa_B = \kappa_{v_B}$ et plus précisément $\kappa_{w_1} = \kappa_B(t_1)$ où t_1 est l'image de X_1 dans κ_{w_1} . Par récurrence, il existe une unique valuation discrète w prolongeant v_B dans $k(W \oplus W')$ telle que

$$w\left(\sum_J a_J X^J\right) = \inf_J \{v_B(a_J)\}$$

où

$$J = (j_1, \dots, j_s), \quad X^J = X_1^{j_1} \cdots X_s^{j_s}, \quad a_J \in k(W).$$

Donc $w(X_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, s$ et $X_i \in W'$, et $\kappa_w = \kappa_B(t_1, \dots, t_s)$ où t_i est l'image de X_i dans κ_w pour tout i . Notons la formule

$$w(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_s X_s) = 0 \quad \text{si} \quad k^s \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \neq (0, \dots, 0). \quad (4.2)$$

Enfin, il existe une unique valuation discrète de rang 1, notée $v_{B'}$, prolongeant w , donc prolongeant v_B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi) = k(W \oplus W')(T)$, telle que

$$v_{B'}\left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l\right) = \inf_l \left\{ w\left(\sum_J a_{J,l} X^J\right) + l \right\} = \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\}, \quad a_{J,l} \in k(W).$$

Donc $v_{B'}(T) = 1$ (on choisit $\xi = 1$). Et donc $v_{B'}(T/\pi) = 0$ où π engendre l'idéal maximal m_B de B . D'où $\kappa_{B'} = \kappa_{v_{B'}} = \kappa_B(t_1, \dots, t_s, t)$ où t est l'image de T/π dans $\kappa_{B'}$. Ainsi l'anneau B' de $v_{B'}$ prolonge B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi)$. Posons $A' = B' \cap k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D \times I}$.

Comme W' est une somme de représentations régulières de D , on peut choisir les X_i ci-dessus de telle sorte qu'ils soient permutés par D , soit $gX_i = X_{g(i)}$ pour tout i . C'est ce que nous faisons dans le lemme qui suit.

LEMME 4.12. *Le groupe de décomposition de B' dans $D \times I$ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$.*

Démonstration. D'abord on va montrer que $(D \times 1)B' = B'$. Soit $g \in D$. Comme D est le groupe de décomposition de B , on a $gB = B$. Par le choix des X_i , on a $gX^J = g(X_1^{j_1} \cdots X_s^{j_s}) = X^{gJ}$. Alors

$$\begin{aligned} v_{gB'} \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right) &= v_{B'} \left(g \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right) \right) = v_{B'} \left(\sum_{J,l} (ga_{J,l}) X^{gJ} T^l \right) \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(ga_{J,l}) + l\} = \inf_{J,l} \{v_{gB}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'} \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right). \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité de B' , on a $gB' = B'$ pour tout $g \in D$, donc $(D \times 1)B' = B'$. Et on a aussi $W' \subset B'$. Grâce à l'équation (4.2), on a $v_{B'}(\sum \lambda_i X_i) = 0$ avec $\lambda_i \in k$ et donc $W' \hookrightarrow \kappa_{B'}$. Posons $\overline{W'} = \text{Im}(W')$, c'est le sous-espace vectoriel de $\kappa_{B'}$ de base $t_1, \dots, t_s$ et D opère librement sur $\overline{W'}$. Notons que $W' \rightarrow \overline{W'}$ est un isomorphisme $D \times I$ -équivariant de k -espaces vectoriels.

Comme $I \subset D$ et $I = \langle \sigma \rangle$ opère sur T par $\sigma T = \chi(\sigma)T$ où $\chi(\sigma) \in k^*$, on a de manière analogue

$$\begin{aligned} v_{\sigma B'} \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right) &= v_{B'} \left(\sigma \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right) \right) = v_{B'} \left(\sum_{J,l} (\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l})) X^J T^l \right) \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l})) + l\} = \inf_{J,l} \{v_{\sigma B}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'} \left(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l \right). \end{aligned}$$

Ainsi $(1 \times I)B' = B'$. En conclusion, $(D \times I)B' = B'$.

D'autre part, I opère trivialement sur κ_B à cause de la définition de I et D opère librement sur $\{t_1, \dots, t_s\}$. De plus,

$$\sigma t = \sigma(T/\pi) = \chi(\sigma)T/\chi(\sigma)\pi = t$$

où π est choisi comme en (4.1). Ainsi $1 \times I$ opère trivialement sur le corps $\kappa_B(t_1, \dots, t_s, t)$. $\square$

Soient B_χ la restriction de B' à $k(W' \oplus \chi) = k(W')(T)$ et v_{B_χ} sa valuation associée. Alors v_{B_χ} est nulle sur $k(W')$ et $v_{B_\chi}(T) = 1$ (donc B_χ est l'anneau que Peyre a considéré dans [Pey08, preuve de la proposition 3, p. 207]). Posons $A_\chi = B_\chi \cap k(W' + \chi)^{D \times I}$. On a aussi que le groupe de décomposition de B_χ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$. On a des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & B' & \longleftarrow & B_\chi \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' & \longleftarrow & A_\chi \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \kappa_B & \longrightarrow & \kappa_{B'} & \longleftarrow & \kappa_{B_\chi} \\ \uparrow D/I & & \uparrow D & & \uparrow D \\ \kappa_A & \longrightarrow & \kappa_{A'} & \longleftarrow & \kappa_{A_\chi} \end{array}.$$

LEMME 4.13. *L'indice de ramification de $A'|A$ est 1.*

Démonstration. D'abord, d'après notre construction, l'indice de ramification de $B|A$ est $e_{B|A} = |I| = q$ et celui de $B'|B$ est $e_{B'|B} = v_{B'}(\pi_B) = 1$ où π_B est une uniformisante de B . D'après le lemme 4.12, on a $e_{B'|A'} = |1 \times I| = |I| = q$. Enfin, grâce à la relation

$$e_{B'|A} = e_{B'|B}e_{B|A} = e_{B'|A'}e_{A'|A},$$

on en déduit $e_{A'|A} = 1$. $\square$

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A^0(BG, M_n) & \longrightarrow & A^0(BD \times BI, M_n) & \xrightarrow{\partial_{D \times I, g}} & A^0(BD, M_{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ M_n(k(W)^G) & \longrightarrow & M_n(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D \times I}) & \xleftarrow{\partial_{A_\chi}} & M_{n-1}(k(W')^D) \\ \downarrow \partial_A & & \downarrow \partial_{A'} & & \downarrow \partial_{A_\chi} \\ M_{n-1}(\kappa_A) & \xrightarrow{\alpha} & M_{n-1}(\kappa_{A'}) & \xleftarrow{e_{A'|A_\chi}} & M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}). \end{array}$$

En effet, le rectangle supérieur gauche et le triangle supérieur central commutent par définition du foncteur $A^0(-, M_n)$ et des morphismes $A^p(X, M_n) \rightarrow A^p(Y, M_n)$ pour $Y \rightarrow X$ [Ros96, § 12]. Le trapèze supérieur droit commute grâce au lemme 2.8. Enfin, la commutativité des rectangles inférieurs résulte du lemme 4.13 et de l'axiome (R3a) de [Ros96].

Pour conclure, il suffit de montrer que la flèche α est injective, et pour cela, il suffit de voir que l'extension $\kappa_{A'}/\kappa_A$ est unirationnelle [KN14, lemme 5.3].

Soit $W'' = \text{Ind}_I^D \chi$ (vue comme k -représentation). Comme χ est facteur direct de la représentation régulière de I , W'' est facteur direct de la représentation régulière de D , donc $W'' \subset W'$. D'après le lemme 4.7, la représentation W'' est fidèle. On note $\overline{W''}$ l'image de W'' dans $\kappa_{B'}$.

D'après le lemme 4.10(ii), le corps $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D = \kappa_B(\overline{W''})^D(t)$ est transcendant pur sur κ_A . D'après le lemme 4.11, les corps $\kappa_{A'} = \kappa_B(\overline{W'}, t)^D$ et $\kappa_B(\overline{W''}, t)^D$ sont stablement équivalents sur κ_A et finalement $\kappa_{A'}$ est stablement pur sur κ_A .

Remarque 4.14. La représentation W'' intervenant à la fin de la démonstration ci-dessus provient du lemme 4.9; elle joue un rôle clé dans la démonstration. En principe, on aurait pu utiliser $W'' \oplus W''$ à la place de W' ci-dessus mais cela rendrait la vérification du lemme 4.12 plus délicate. Pour cette raison, nous avons préféré procéder indirectement en passant par la représentation régulière de D .

4.4 Un raffinement du théorème principal

DÉFINITION 4.15. Soit G un k -groupe algébrique linéaire. On définit

$$A_{\text{nab}}^0(BG, M_n) = \bigcap_A \text{Ker}(A^0(BG, M_n) \rightarrow A^0(BA, M_n))$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens fermés de G , de type multiplicatif déployé.

Notons que $A_{\text{nab}}^0(BG, M_n) \subset \tilde{A}^0(BG, M_n)$ (considérer $A = 1$ dans la définition 4.15).

LEMME 4.16. Avec les notations de la définition 4.15, on a $\tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \subset A_{\text{nab}}^0(BG, M_n)$.

Démonstration. C'est évident par fonctorialité, puisque $\tilde{A}_{\text{nr}}^0(BA, M_n) = 0$ pour tout A de type multiplicatif déployé [KN14, théorème 2.29 et corollaire 6.5]. $\square$

LEMME 4.17 (Lemme de Bogomolov). *Supposons G fini constant et d'exposant m , avec $\mu_m \subset k$. Pour tout $D \subset G$ et $g: I = \mu_m \rightarrow Z_G(D)$, on a*

$$\partial_{D,g}(A_{\text{nab}}^0(BG, M_n)) \subset A_{\text{nab}}^0(BD, M_{n-1}).$$

Démonstration. Soit A_D un sous-groupe abélien de D . Posant $A = \langle A_D, g(\mu_m) \rangle$ (qui est abélien), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A^0(BG, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA, M_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0(BD \times BI, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA_D \times BI, M_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0(BD, M_{n-1}) & \longrightarrow & A^0(BA_D, M_{n-1}). \end{array}$$

D'où l'énoncé. $\square$

COROLLAIRE 4.18. *On a la suite exacte*

$$0 \rightarrow \tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_n) \rightarrow A_{\text{nab}}^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A_{\text{nab}}^0(BD, M_{n-1}). \quad (4.3)$$

Démonstration. D'après le théorème 4.1, le lemme 4.17 et le lemme 4.16, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_n) & \longrightarrow & \tilde{A}^0(BG, M_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1}) \\ & \searrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & A_{\text{nab}}^0(BG, M_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{D,g} A_{\text{nab}}^0(BD, M_{n-1}) \end{array}$$

où la première ligne est une suite exacte. D'où (4.3). $\square$

Pour le théorème suivant, rappelons la définition 5.4 de [KN14].

DÉFINITION 4.19. Un module de cycles M est dit *connectif* s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$ pour tout $n < n_0$.

THÉORÈME 4.20. *Avec l'hypothèse de la définition 4.15, soient M un module de cycles et $n \in \mathbb{Z}$.*

- (i) *Si $A_{\text{nab}}^0(BG, M_n) = 0$, alors $\tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_n) = 0$.*
- (ii) *Si M est connectif et*

$$\forall H \subset G, \quad \forall m \leq n, \quad \tilde{A}_{\text{nr}}^0(BH, M_m) = 0,$$

alors

$$\forall H \subset G, \quad \forall m \leq n, \quad A_{\text{nab}}^0(BH, M_m) = 0.$$

Démonstration. On a tout de suite l'assertion (i) grâce au lemme 4.16. On montre l'assertion (ii) par récurrence sur m . Comme M est connectif, c'est évident pour m petit. Supposons que ce soit vrai pour $m-1$. Utilisons la suite exacte (4.3) avec $A_{\text{nab}}^0(BD, M_{m-1}) = 0$ pour tout D ; on a

$$A_{\text{nab}}^0(BG, M_m) \xleftarrow{\sim} \tilde{A}_{\text{nr}}^0(BG, M_m) = 0.$$

Et c'est vrai également pour tout sous-groupe H de G . $\square$

5. Reformulation : 0-cycles sur le compactifié de BG

5.1 Le foncteur $\overline{CH}_0$

DÉFINITION 5.1. Soient donnés $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et une compactification $j: X \hookrightarrow \bar{X}$ où $\bar{X}$ est projectif et lisse. On définit

$$\overline{CH}_0(X) = CH_0(\bar{X}) = A_0(\bar{X}, K_0^M).$$

PROPOSITION 5.2. Si k est de caractéristique zéro, $\overline{CH}_0(X)$ ne dépend que de X et $\overline{CH}_0$ définit un foncteur homotopique et pur en coniveau au moins 1.

La partie délicate de cette proposition est la fonctorialité.

Démonstration. Notons $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sm}$ formée des schémas projectifs, S_b la classe des morphismes birationnels de $\mathbf{Sm}$. D'après [KS07, théorème 2.1], on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sm}^{\text{proj}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Sm} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_b^{-1} \mathbf{Sm}^{\text{proj}} & \xrightarrow{\sim} & S_b^{-1} \mathbf{Sm} \end{array}$$

où le foncteur du bas est une équivalence de catégories.

Considérons le foncteur $F: \mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{Ab}$ donné par $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z})$ (homologie de Suslin, cf. [KN14, définition 3.14]). Il vérifie les hypothèses de [KS07, § 3] par rapport au diagramme ci-dessus. En effet, pour X projectif et lisse, $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z}) = CH_0(X)$ et d'après Fulton [Ful98, exemple 16.1.11, p. 312], $CH_0(X) = CH_0(Y)$ pour tout $X \rightarrow Y$ dans S_b . Donc on a un isomorphisme naturel de foncteurs :

$$(\mathbf{Sm}^{\text{proj}} \rightarrow \mathbf{Sm} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}) \simeq (\mathbf{Sm}^{\text{proj}} \rightarrow S_b^{-1} \mathbf{Sm}^{\text{proj}} \xrightarrow{CH_0} \mathbf{Ab}).$$

En appliquant [KS07, § 3 et théorème 2.1], on obtient une transformation naturelle de foncteurs

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \overline{CH}_0(X)$$

où $H_p(-, \mathbb{Z}(q))$ est l'homologie motivique de Voevodsky [KN14, 3.2.4] et $\overline{CH}_0(X) := CH_0(\bar{X})$ pour $\bar{X}$ une compactification lisse de X : c'est exactement le foncteur de la définition 5.1, qui est donc bien défini.

De plus, $\overline{CH}_0$ est homotopique et pur en coniveau au moins 1. En effet, soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, alors $\bar{X}$ est aussi un compactifié de U :

$$U \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}.$$

Donc $\overline{CH}_0(U) = \overline{CH}_0(\bar{X}) = CH_0(X)$.

D'autre part, soit $f: E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X ; on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} j^* E & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

où $j^*E \cong U \times \mathbb{A}^n$ quand U est assez petit. Alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{CH}_0(j^*E) & \xrightarrow{\sim} & \overline{CH}_0(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{CH}_0(U) & \xrightarrow{\sim} & \overline{CH}_0(X) \end{array}$$

nous ramène au cas $E = X \times \mathbb{A}^n$.

Soit $j: X \hookrightarrow Y$ une compactification de X , nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E = X \times \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & Y \times \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & Y \times \mathbb{P}^n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & & & Y \end{array}$$

où $Y \times \mathbb{P}^n$ est une compactification lisse de E . D'après [Ful98, III, théorème 3.3], on a $CH_0(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} CH_0(Y)$. Donc

$$\overline{CH}_0(E) = \overline{CH}_0(X). \quad \square$$

Remarque 5.3. Comme sous-produit de la démonstration de la proposition 5.2, on obtient un morphisme de foncteurs

$$H_0(-, \mathbb{Z}) \rightarrow \overline{CH}_0.$$

Ce morphisme est surjectif d'après [Kah11, proposition 6.1].

Soit $G \in \mathbf{Grp}$. D'après la proposition 5.2 et [KN14, définition 2.14], le groupe $\overline{CH}_0(BG)$ est bien défini et on a une surjection

$$H_0(BG, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{CH}_0(BG).$$

Question 5.4. Peut-on définir $\overline{CH}_0(-)$ a priori comme quotient de $H_0(-, \mathbb{Z})$, sans utiliser la résolution des singularités (sous-jacente à la preuve de la proposition 5.2)? Voir remarque 5.6 pour une réponse dans le cas particulier de BG .

5.2 Un résultat dual du théorème 4.1

PROPOSITION 5.5. *Si k est de caractéristique zéro et contient une racine primitive e -ième de l'unité, on a la suite exacte*

$$\bigoplus_{D \subset G, g: \mu_e \rightarrow Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \rightarrow H_0(BG, \mathbb{Z}) \rightarrow \overline{CH}_0(BG) \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

pour tout groupe fini G dont l'exposant divise e .

Démonstration. D'après le théorème 4.1, on a

$$0 \rightarrow A_{\text{nr}}^0(BG, M_0) \rightarrow A^0(BG, M_0) \rightarrow \bigoplus_{D, g: I \rightarrow Z_G(D)} A^0(BD, M_{-1}).$$

Soient U_G un G -torseur linéaire de coniveau au moins c et $\bar{X}$ une compactification lisse de U_G/G . D'après [KN14, définition 6.1 et proposition 6.6], on a

$$A_{\text{nr}}^0(BG, M_0) = A_{\text{nr}}^0(U_G/G, M_0) = A^0(\bar{X}, M_0).$$

De plus, d'après [Kah11, théorème 1.3], pour X lisse, on a

$$A^0(X, M_0) \cong \text{Hom}_{\text{CM}}(H^X, M)$$

où CM est la catégorie des modules de cycles et pour tout corps F/k ,

$$H_n^X(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n)).$$

Donc on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{\bar{X}}, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_G/G}, M) \rightarrow \bigoplus_{D, g: I \rightarrow Z_G(D)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_D/D}[1], M).$$

En appliquant le lemme de Yoneda dans la catégorie abélienne CM, on en tire la suite exacte

$$\bigoplus_{D, g: I \rightarrow Z_G(D)} H^{U_D/D}[1] \rightarrow H^{U_G/G} \rightarrow H^{\bar{X}} \rightarrow 0.$$

D'où la suite exacte suivante sur le corps de base k :

$$\bigoplus_{D, g: I \rightarrow Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \rightarrow H_0(BG, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

où $H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) = A_0(\bar{X}, K_0^M) = \overline{CH}_0(BG)$ (cf. définition 5.1).

Le morphisme $H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \rightarrow H_0(BG, \mathbb{Z})$ est donné explicitement par

$$\begin{aligned} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D)(1)[1]) \\ &\downarrow \\ &\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \\ &\downarrow (*) \\ &\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(U_{\mu_m}/\mu_m)) \\ &\downarrow \\ H_0(BG, \mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbb{Z}, M(U_G/G)) \end{aligned}$$

où (*) est donné par $\mathbb{G}_m \rightarrow B\mu_m$. □

Remarque 5.6. Si k est de caractéristique p , la suite exacte (5.1) donne une définition de “ $\overline{CH}_0(BG)$ ”.

5.3 Conditions équivalentes pour avoir des groupes non ramifiés triviaux

DÉFINITION 5.7. Soient k un corps et X un schéma lisse sur k . On dit que X n'a pas d'invariants non ramifiés² si pour tout module de cycles M ,

$$M_n(k) \xrightarrow{\sim} A_{\mathrm{nr}}^0(X, M_n).$$

THÉORÈME 5.8. Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le schéma X n'a pas d'invariants non ramifiés (définition 5.7) ;
- (ii) l'application $\deg: \overline{CH}_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est bijective pour toute extension F/k .

Démonstration. D'après la définition 5.1 et la résolution des singularités, on a

$$\overline{CH}_0(X_F) = CH_0(\bar{X}_F)$$

où $\bar{X}$ est une compactification propre et lisse de X . Donc ce théorème est exactement [Mer08, théorème 2.11]. □

2. Ceci concerne les invariants de type motivique, et non (par exemple) les invariants dans le groupe de Witt.

COROLLAIRE 5.9. Soit $G \in \mathbf{Grp}$. Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le “schéma” BG n’a pas d’invariants non ramifiés (définition 5.7) ;
- (ii) on a $\widetilde{\overline{CH}}_0(BG_F) = 0$ pour toute extension F/k (définition 2.1).

Démonstration. Remarquons que pour $\mathrm{Spec} k \rightarrow G$, on a

$$\begin{array}{ccc} \overline{CH}_0(BG_F) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \uparrow & \nearrow \sim & \\ \overline{CH}_0(B1) & & \end{array}$$

D’où le résultat d’après le théorème 5.8. □

COROLLAIRE 5.10. Soit G un groupe fini d’exposant m sur un corps k contenant μ_m , où m est inversible dans k . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le “schéma” BG n’a pas d’invariants non ramifiés (définition 5.7) ;
- (ii) pour tout module de cycles M et pour tout n ,

$$\tilde{A}^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1})$$

est injectif ;

- (iii) pour toute extension F/k ,

$$\bigoplus_{D,g} H_{-1}(BD_F, \mathbb{Z}(-1)) \rightarrow \tilde{H}_0(BG_F, \mathbb{Z})$$

est surjectif.

Démonstration. On a l’équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) grâce au théorème 4.1 et à la définition 5.7, et l’équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) à cause de la proposition 5.5 et du corollaire 5.9. □

COROLLAIRE 5.11. Soit G un groupe fini d’exposant m sur un corps k contenant μ_m , où m est inversible dans k . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $H \subset G$, le “schéma” BH n’a pas d’invariants non ramifiés (définition 5.7) ;
- (i^{bis}) pour tout $H \subset G$, le “schéma” BH n’a pas d’invariants non ramifiés à valeurs dans un module de cycles connectif (définition 4.19) ;
- (ii) pour tout $H \subset G$ et pour toute extension F/k ,

$$\bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z})$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de H .

Démonstration. On va montrer les implications (i) $\Rightarrow$ (i^{bis}) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (i^{bis}) : évident.

(i^{bis}) $\Rightarrow$ (ii) : Pour tout $H \subset G$ et pour tout M connectif, d’après le théorème 4.20, on a

$$A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n).$$

D'après [KN14, théorème 5.17], ceci implique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M[n]) \hookrightarrow \bigoplus_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BA}, M[n])$$

pour tout M connectif. Comme H^{BH}, H^{BA} sont connectifs [KN14, lemme 5.15], ceci implique par le lemme de Yoneda

$$\forall H \subset G, \quad \bigoplus_A H^{BA} \twoheadrightarrow H^{BH}.$$

En évaluant H_0 sur un corps F , on a

$$\forall H \subset G, \quad \forall F/k, \quad \bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Pour tout module de cycles M , on a [KN14, théorème 5.17]

$$A^0(BH, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{\mathrm{Nis}}(BH), \mathcal{M}_0).$$

Donc l'assertion (ii) implique

$$\bigoplus_{A \subset H} h_0^{\mathrm{Nis}}(BA)(\mathrm{Spec} F) \twoheadrightarrow h_0^{\mathrm{Nis}}(BH)(\mathrm{Spec} F)$$

pour tout F/k . Pour conclure, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 5.12. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{HI}$ deux faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Alors,*

$$f \text{ est un épimorphisme} \Leftrightarrow \forall F/k, \text{ le morphisme } f_F \text{ est surjectif.}$$

Démonstration. C'est évident pour l'implication $\Rightarrow$. Pour l'implication $\Leftarrow$, posons $\mathcal{H} = \mathrm{Coker} f$; on a $\mathcal{H}_{\mathrm{Spec} F} = 0$ pour tout F/k . D'après [MVW06, corollaire 11.2], on a $\mathcal{H} = 0$. Donc f est un épimorphisme. $\square$

Suite de la démonstration du corollaire 5.11. Appliquons le lemme 5.12 pour $\mathcal{F} = \bigoplus_A h_0^{\mathrm{Nis}}(BA)$, $\mathcal{G} = h_0^{\mathrm{Nis}}(BH)$; on a

$$\forall H \subset G, \quad \bigoplus_{A \subset H} h_0^{\mathrm{Nis}}(BA) \twoheadrightarrow h_0^{\mathrm{Nis}}(BH).$$

Ceci implique

$$\forall H \subset G, \quad A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n)$$

pour tout module de cycles M . On en déduit l'assertion (i) grâce au lemme 4.16. $\square$

6. Application : théorèmes de Bogomolov et de Peyre

On retrouve ici les théorèmes de Bogomolov [CTS07, théorème 7.1] et de Peyre [Pey08, théorème 1].

6.1 Généralité du théorème de Bogomolov

LEMME 6.1. *Soit k un corps contenant μ_m , où m est inversible dans k . Soit G un groupe fini d'exposant m . On a $A_{\mathrm{nr}}^0(BG, H_{\mathrm{ét}}^2(\mathbb{Z})) = A_{\mathrm{nab}}^0(BG, H_{\mathrm{ét}}^2(\mathbb{Z})) = 0$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 A_{\text{nab}}^0(BG, H_{\text{ét}}^2(\mathbb{Z})) &= \text{Ker} \left(A^0(BG, H_{\text{ét}}^2(\mathbb{Z})) \rightarrow \bigoplus_A A^0(BA, H_{\text{ét}}^2(\mathbb{Z})) \right) \text{ (définition 4.15)} \\
 &= \text{Ker} \left(H_{\text{ét}}^2(BG, \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_A H_{\text{ét}}^2(BA, \mathbb{Z}) \right) \text{ ([KN14, théorème 8.3a), } n = 0]) \\
 &= \text{Ker} \left(H^2(G, \mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_A H^2(A, \mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z}) \right) \text{ [KN14, (7.4)]} \\
 &= \text{Ker} \left(\text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_A \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z}) \right) = 0
 \end{aligned}$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de G . On conclut avec le lemme 4.16. $\square$

THÉORÈME 6.2. *Soit k un corps contenant μ_m , où m est inversible dans k . Soient G un groupe fini d'exposant m et W une k -représentation fidèle de G . On a*

$$\widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Ker} (H^2(G, k^*) \rightarrow H^2(A, k^*)) \quad (6.1)$$

où $\mathcal{B}_G$ est l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G et $\widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k(W)^G)$ est la partie réduite de $\text{Br}_{\text{nr}}(k(W)^G) = \text{Br}_{\text{nr}}(BG)$ (cf. définition 2.1).

En particulier, si $k = k_s$ est séparablement clos, on a

$$\text{Br}_{\text{nr}}(k_s(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Ker} (H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \quad (6.2)$$

En général ($\mu_m \subset k$),

$$\widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k(W)^G) \hookrightarrow \widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k_s(W)^G) = \text{Br}_{\text{nr}}(k_s(W)^G).$$

Remarque : Pour $k = \mathbb{C}$, l'égalité (6.2) est due à Bogomolov [Bog88].

Démonstration. Rappelons que

$$\text{Br}(k(W)^G) = H_{\text{ét}}^2(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = A^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1))).$$

Utilisons le corollaire 4.18 et le lemme 6.1 ; on a

$$\text{Br}_{\text{nr}}(BG) = \text{Br}_{\text{nab}}(BG) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Ker} (A^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1))) \rightarrow A^0(BA, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1)))). \quad (6.3)$$

En fait, on a égalité. En effet, soit γ appartenant à la partie droite de (6.3), on raisonne comme Peyre [Pey08, remarque 4]. Soient $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \rightarrow Z_G(D)$. Soit $x \in D$, alors $A = \langle x, I \rangle$ est un sous-groupe bicyclique de G . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\text{ét}}^3(BG, \mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\partial_{D,g}} & H_{\text{ét}}^2(BD, \mathbb{Z}) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\text{ét}}^3(BA, \mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\partial_{\langle x \rangle, g}} & H_{\text{ét}}^2(B\langle x \rangle, \mathbb{Z}) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}(\langle x \rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H_{\text{ét}}^2(k, \mathbb{Z})
 \end{array}$$

où les égalités résultent de [KN14, (7.4)].

Comme l'image de γ dans $H_{\text{ét}}^3(BA, \mathbb{Z}(1))$ et donc dans $H_{\text{ét}}^2(B\langle x \rangle, \mathbb{Z})$ est nulle pour tout $x \in D$, son image dans $H_{\text{ét}}^2(BD, \mathbb{Z})$ l'est aussi. Alors $\gamma \in \text{Br}_{\text{nr}}(k(W)^G)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k(W)^G) &= \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Ker}(\tilde{A}^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1))) \rightarrow \tilde{A}^0(BA, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1)))) \\ &= \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Ker}(\tilde{H}_{\text{ét}}^3(BG, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow \tilde{H}_{\text{ét}}^3(BA, \mathbb{Z}(1))) \text{ ([KN14, (8.6)]).} \end{aligned}$$

D'après [KN14, (7.5)], on a $\tilde{H}_{\text{ét}}^3(BG, \mathbb{Z}(1)) = H^2(G, k^*)$. D'où (6.1).

Si k est séparablement clos, on a

$$H_{\text{ét}}^3(k_s, \mathbb{Z}(1)) = H^2(k_s, \mathbb{G}_m) = \text{Br}(k_s) = 0, \quad H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(G, k^*).$$

D'où (6.2).

En général, on a $\widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(k_s(W)^G) = \text{Br}_{\text{nr}}(k_s(W)^G)$ car $\text{Br}(k_s) = 0$. Considérons la longue suite exacte suivante :

$$H^1(G, k^*) \rightarrow H^1(G, k_s^*) \rightarrow H^1(G, k_s^*/k^*) \rightarrow H^2(G, k^*) \rightarrow H^2(G, K_s^*).$$

Comme $\mu_m \subset k^* \subset k_s^*$, on a

$$H^1(G, k^*) \xleftarrow{\sim} H^1(G, \mu_m) \xrightarrow{\sim} H^1(G, k_s^*).$$

Donc la suite

$$0 \rightarrow H^1(G, k_s^*/k^*) \rightarrow H^2(G, k^*) \rightarrow H^2(G, K_s^*)$$

est exacte. D'où le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(BG) & \longrightarrow & \text{Br}_{\text{nr}}(BG_{k_s}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(G, k_s^*/k^*) & \longrightarrow & H^2(G, k^*) & \longrightarrow & H^2(G, k_s^*) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{A \in \mathcal{B}_G} H^1(A, k_s^*/k^*) & \longrightarrow & \bigoplus_{A \in \mathcal{B}_G} H^2(A, k^*) & \longrightarrow & \bigoplus_{A \in \mathcal{B}_G} H^2(A, k_s^*). \end{array}$$

La flèche fragmentée est injective parce que

$$H^1(G, k_s^*/k^*) = \text{Hom}(G, k_s^*/k^*) \hookrightarrow \bigoplus_{A \in \mathcal{B}_G} \text{Hom}(A, k_s^*/k^*) = \bigoplus_{A \in \mathcal{B}_G} H^1(A, k_s^*/k^*).$$

On en déduit l'inclusion $\widetilde{\text{Br}}_{\text{nr}}(BG) \hookrightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(BG_{k_s})$. □

6.2 Une généralisation de $A_{\text{NR}}^0(-, M_n)$ inspirée par Bogomolov

DÉFINITION 6.3. Soit $F: \mathbf{Sm}_{\text{fl}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$. On définit

$$F_{\text{neg}}(X) := \bigcup_U \text{Ker}(F(X) \rightarrow F(U)) = \text{Ker}(F(X) \rightarrow F(\text{Spec } k(X)))$$

où U parcourt les ouverts de X et $k(X)$ est le corps des fonctions de X , et

$$F_{\text{st}}(X) := F(X)/F_{\text{neg}}(X) = \text{Im}(F(X) \rightarrow F(\text{Spec } k(X))).$$

Ce sont respectivement la *partie négligeable* et l'*image stable* de F (en X). Elles définissent des foncteurs sur $\mathbf{Sm}_{\mathbb{A}}$.

LEMME 6.4. *Supposons k infini. Si F est homotopique et pur en coniveau au moins c , alors F_{neg} , F_{st} le sont aussi.*

Démonstration. Soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X . Considérons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \supset & E_U & \xleftarrow{\quad} & E_\eta & \xleftarrow{\quad} & k(E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \supset & U & \supset & \text{Spec } k(X) & & \end{array}$$

D'après l'hypothèse sur F , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} F(E) & \longrightarrow & F(E_U) & \longrightarrow & F(E_\eta) & \longrightarrow & F(k(E)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\ F(X) & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(k(X)) & & \end{array}$$

D'où $F_{\text{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\text{neg}}(E)'$ où $F_{\text{neg}}(E)' = \text{Ker}(F(E) \rightarrow F(E_\eta))$. En fait $F_{\text{neg}}(E)' = F_{\text{neg}}(E)$. En effet, on va montrer que $F(E_\eta) \hookrightarrow F(\text{Spec } k(E))$. On peut se ramener au cas $X = \text{Spec } k$. Tout ouvert V de $E_\eta = \mathbb{A}_k^n$, a un point rationnel. Donc $F(k) \rightarrow F(V)$ admet une section et $F(k) \hookrightarrow F(k(E))$. Ainsi, on a $F_{\text{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\text{neg}}(E)$.

Soit $U \subset X$ un ouvert de X de coniveau $\delta(X, U) \geq c$ (cf. [KN14, définition 2.1]). On a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{\text{neg}}(U) & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(\text{Spec } k(U)) \\ & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & F_{\text{neg}}(X) & \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & F(\text{Spec } k(X)) \end{array}$$

car $k(U) = k(X)$. D'où $F_{\text{neg}}(X) \xrightarrow{\sim} F_{\text{neg}}(U)$. Ainsi, F_{neg} est homotopique et pur en coniveau au moins c .

De la définition de F_{st} , on déduit tout de suite qu'il est aussi homotopique et pur en coniveau au moins c . $\square$

Remarque 6.5. Si G est un groupe fini sur un corps infini k contenant μ_m , où m est inversible dans k , alors $F_{\text{neg}}(BG), F_{\text{st}}(BG)$ sont bien définis (cf. définition 3.1).

DÉFINITION 6.6. On définit

$$F_{\text{NR}}(BG) := \{x \in F(BG) \mid \forall (D, g), \partial_{D,g}(x) \in (F_{-1})_{\text{neg}}(BD)\}.$$

Exemple 6.7 ([Bog93]). Soit $F = H_{\text{ét}}^i(-, \mathbb{Z}(n))$. Pour X lisse, on retrouve dans la définition 6.3 les classes k -négligeables de $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}(n))$:

$$H_{\text{neg}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) = \text{Ker}(H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(k(X), \mathbb{Z}(n)))$$

et la cohomologie stable de $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}(n))$:

$$H_{\text{st}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}(n)) / H_{\text{neg}}^i(X, \mathbb{Z}(n)).$$

Donc d'après [KN14, proposition 3.9], l'exemple 2.5(i) et la définition 6.6, on a

$$H_{\text{NR}}^i(BG, \mathbb{Z}(n)) = \{x \in H_{\text{ét}}^i(BG, \mathbb{Z}(n)) \mid \forall (D, g), \partial_{D,g}(x) \in H_{\text{neg}}^{i-1}(BD, \mathbb{Z}(n-1))\}. \quad (6.4)$$

6.3 Théorème de Peyre

DÉFINITION 6.8. Soit G un groupe fini sur un corps k contenant μ_m , où m est inversible dans k .

On définit le groupe $H_p^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des *classes permutation-négligeables* comme le groupe [Pey08, définition 4]

$$\sum_{H \subset G} \text{Cor}_H^G(\text{Im}(H^1(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\otimes 2} \xrightarrow{\cup} H^3(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))).$$

Notons $H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) = \langle c_2(\rho) \rangle$ le sous-groupe de $H_{\text{ét}}^4(BG, \mathbb{Z}(2))$ engendré par les secondes classes de Chern des représentations ρ de G .

Utilisant [Pey08, proposition 1 et proposition 2] et [KN14, théorème 7.1], on obtient :

LEMME 6.9. Si k est séparablement clos, alors

$$H_p^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] = H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right].$$

THÉORÈME 6.10. Soit k un corps contenant μ_m , où m est inversible dans k . Soient G un k -groupe fini d'exposant m et W une représentation fidèle de G . On a un isomorphisme

$$H_{\text{NR}}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) / H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{nr}}^4(k(W)^G, \mathbb{Z}(2)) \quad (6.5)$$

où $H_{\text{NR}}^4(BG, \mathbb{Z}(2))$ est comme en (6.4) et $H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2))$ comme dans la définition 6.8.

Démonstration. D'après le théorème 4.1, on a

$$H_{\text{nr}}^3(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = A_{\text{NR}}^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

La suite exacte de [KN14, théorème 8.3b)] donne une suite exacte

$$0 \rightarrow CH^2(BG) \rightarrow H_{\text{ét}}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow A^0(BG, H_{\text{ét}}^4(\mathbb{Z}(2))) \rightarrow 0. \quad (6.6)$$

Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & CH^2(BG) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) & \longrightarrow & A^0(BG, H_{\text{ét}}^4(\mathbb{Z}(2))) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_{D,g} & & \downarrow \partial_{D,g} \\ & & & & H_{\text{ét}}^3(BD, \mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\sim} & A^0(BD, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Z}(1))) \end{array}$$

où l'isomorphisme provient de [KN14, théorème 8.3a)]. D'après [Tot99, remarque avant le corollaire 3.2, p. 257], le groupe $CH^2(BG)$ est engendré par des classes de Chern des représentations de G . D'où l'on déduit (6.5). $\square$

Remarque 6.11. En particulier, si k est algébriquement clos de caractéristique zéro, on a d'après [KN14, théorème 7.1 et lemme 7.3, 1)]

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^4(BG, \mathbb{Z}(2)) &\cong H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ H_{\text{ét}}^3(BD, \mathbb{Z}(1)) &\cong H^2(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

De plus, l'isomorphisme $CH^2(BG) \xrightarrow{\sim} H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2))$ provenant de (6.6) et l'existence de transferts pour $G \mapsto CH^2(BG)$ montrent que

$$H_p^4(BG, \mathbb{Z}(2)) \subset H_{Ch}^4(BG, \mathbb{Z}(2)).$$

Enfin, $H_{\text{neg}}^3(BD, \mathbb{Z}(1)) = 0$ pour tout D d'après [KN14, 8.6.1]. On déduit donc du théorème 6.10 une surjection

$$H_{\text{nr}}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H_p^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_{\text{nr}}^3(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

de noyau annulé par une puissance de 2, où

$$H_{\text{nr}}^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{D \subset G, g: I \rightarrow Z_G(D)} \text{Ker}(H^3(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{D,g}} H^2(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

On peut montrer que les résidus $\partial_{D,g}$ sont égaux à ceux de Peyre [Pey08, définition 5]. Ainsi, le théorème 6.10 précise le théorème 1 de [Pey08].

Remarque 6.12. Grâce à la suite exacte (4.3) et au théorème 6.2, on obtient une généralisation en degré 3 de la suite exacte de Bogomolov :

$$0 \rightarrow A_{\text{nr}}^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \rightarrow A_{\text{nab}}^0(BG, H_{\text{ét}}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} \text{Br}_{\text{nr}}(BD).$$

REFERENCES

- Bog88 F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces of linear representations*, Math. USSR Izv. **30** (1988), no. 3, 455–485; <http://dx.doi.org/10.1070/IM1988v030n03ABEH001024>.
- Bog93 ———, *Stable cohomology of groups and algebraic varieties*, Sb. Math. **76** (1993), no. 1, 1–21; <http://dx.doi.org/10.1070/SM1993v076n01ABEH003398>.
- Bou64 N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5: Entiers. Chapitre 6: Valuations*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1308 (Hermann, Paris, 1964).
- Bou65 ———, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7: Diviseurs*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1314 (Hermann, Paris, 1965).
- CTO89 J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158; <http://dx.doi.org/10.1007/BF01850658>.
- CTS07 J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Algebraic Groups and Homogeneous Spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. (Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007), 113–186.
- Ful98 W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1998); <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1700-8>.
- GMS03 S. Garibaldi, A. Merkurjev, and J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, Univ. Lecture Ser., vol. 28 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003); <http://dx.doi.org/10.1090/ulect/028>.
- GR71 A. Grothendieck and M. Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., vol. 224 (Springer-Verlag, Berlin – New York, 1971); <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0058656>.
- HK06 A. Huber and B. Kahn, *The slice filtration and mixed Tate motives*, Compos. Math. **142** (2006), no. 4, 907–936; <http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X06002107>.

- Kah11 B. Kahn, *Relatively unramified elements in cycle modules*, J. K-Theory **7** (2011), no. 3, 409–427; <http://dx.doi.org/10.1017/is011003002jkt147>.
- KN14 B. Kahn and N.T.K. Ngan, *Sur l'espace classifiant d'un groupe algébrique linéaire, I*, J. Math. Pures Appl. **102** (2014), no. 5, 972–1013; <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2014.03.006>.
- KS07 B. Kahn and R. Sujatha, *A few localisation theorems*, Homology, Homotopy Appl. **9** (2007), no. 2, 137–161; <http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2007.v9.n2.a5>.
- Lan94 S. Lang, *Algebraic number theory*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 110, (Springer-Verlag, New York, 1994); <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0853-2>.
- Mer08 A. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. Lond. Math. Soc. **78** (2008), no. 1, 51–64; <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/jdn011>.
- Mil80 J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., vol. 33 (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1980).
- MVW06 C. Mazza, V. Voevodsky, and C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Math. Monogr., vol. 2, (Amer. Math. Soc., Providence, RI, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006).
- Ngu11 ———, *Classes non ramifiées sur un espace classifiant*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 5-6, 233–237; <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2011.02.012>.
- Pey08 E. Peyre, *Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 191–225; <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-007-0080-z>.
- Ros96 M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. **1** (1996), no. 16, 319–393.
- Sal84 D.J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), no. 1, 71–84; <http://dx.doi.org/10.1007/BF01389135>.
- Ser68 J.-P. Serre, *Corps locaux* (Hermann, Paris, 1968).
- Tot99 B. Totaro, *The Chow ring of a classifying space*, Algebraic K-Theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999), 249–281; <http://dx.doi.org/10.1090/pspum/067/1743244>.

Bruno Kahn bruno.kahn@imj-prg.fr

IMJ-PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Nguyen Thi Kim Ngan nguyen.t.k.ngan.vn@gmail.com

Faculty of Natural Sciences, Thu Dau Mot University, Binh Duong, Vietnam