ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Л. В. ПАНКРАТОВА

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

НАУЧНО-ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР
КРАСНОЯРСК, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Л. В. Панкратова

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Научно-инновационный центр
Красноярск, 2020

УДК 517.521
ББК 22.1
П16

Рецензенты:

Кафедра фундаментальной математики,
заведующий кафедрой **Вечтомов Е. М.**, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вятский государственный университет»;

Н.И. Попов, д-р пед. наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина»;

Д.В. Чупраков, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вятский государственный университет»

Панкратова, Л.В.
П16 **Числовые ряды** : учебное пособие / Л.В. Панкратова. – Красноярск:
Научно-инновационный центр, 2020. – 126 с.

ISBN 978-5-907208-35-3
DOI: 10.12731/978-5-907208-35-3

В представленном учебном пособии рассмотрены основные понятия и положения теории числовых рядов, приведены достаточно подробные образцы решения различных познавательных упражнений, связанных с исследованием указанных рядов. Сформулированы задания для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для использования в образовательном процессе студентами математических специальностей и направлений подготовки вузов. Книга будет полезна преподавателям математики высших учебных заведений при подготовке к лекционным и практическим занятиям, а также при организации внеаудиторной работы обучающихся.

ISBN 978-5-907208-35-3

© Панкратова Л. В., 2020
© Оформление.
Научно-инновационный центр, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.	5
1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛОВЫХ РЯДАХ . . .	6
1.1. Основные понятия.	6
1.2. Основные теоремы о сходимости числовых рядов	13
1.3. Линейные операции над числовыми рядами. Группировка членов ряда	18
2. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ	25
2.1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами	25
2.2. Признаки сравнения рядов	28
2.3. Признаки Даламбера и Коши (радикальный)	39
2.4. Интегральный признак Коши	49
2.5. Признаки Раабе и Гаусса	56
2.6. Иные признаки сходимости	63
3. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ	72
3.1. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница	72
3.2. Признаки Абеля и Дирихле	77
3.3. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.	85
3.4. Теоремы о перестановке членов числового ряда.	90
3.5. Умножение числовых рядов	100
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	107
ПРИЛОЖЕНИЯ	108
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Об иных способах суммирования числовых рядов	108

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Доказательство отсутствия универсального ряда для сравнения	114
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Признак Куммера сходимости рядов с положительными членами	116
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. О сущности терминологии, используемой для знакопеременных рядов	120
ПОСЛЕСЛОВИЕ	122

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представляемое учебное пособие посвящено теоретическим и практическим аспектам темы «Числовые ряды», традиционно входящей в университетский курс математического анализа.

Пособие состоит из нескольких разделов, включающих в себя общие сведения о числовых рядах, а также вопросы исследования сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов. Его особенностью является то, что оно содержит весьма полный теоретический материал, обращенный в том числе к утверждениям, обычно выходящим за рамки стандартной университетской программы. Часть дополнительных вопросов, также представляющих значительный интерес, содержится в Приложениях.

Изложенные утверждения и теоремы проиллюстрированы большим количеством разнообразных примеров, не только типовых, но и повышенной трудности. В данном контексте пособие может рассматриваться в качестве практического руководства к решению задач по теме «Числовые ряды».

Каждый параграф пособия содержит задания для самостоятельной работы студентов. Во многих упражнениях предусмотрены указания к их решению, ответы же дают возможность контролировать освоение получаемых умений.

Учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей и направлений подготовки высших учебных заведений. Книга будет полезна преподавателям математического анализа, а также всем тем, кто ставит перед собой цель достаточно глубоко изучить числовые ряды.

1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛОВЫХ РЯДАХ

1.1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е. Пусть имеется последовательность $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ действительных чисел. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

называется *числовым рядом*, порождаемым данной последовательностью.

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots$ называются *членами ряда* (соответственно первым, вторым, третьим, ...). Если номер n члена ряда u_n не фиксируется, то u_n называют *общим членом ряда*.

Для задания числового ряда достаточно задать его общий член. Если, например, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$.

Пример 1. Укажите возможную формулу общего члена ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{80} + \dots$.

Решение. Поскольку члены ряда представляют собой дроби, где в числителях – единицы, а знаменатели могут быть получены по формуле $3^n - 1$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, то общий член ряда можно записать в виде $u_n = \frac{1}{3^n - 1}$.

О п р е д е л е н и е. Сумма n первых членов ряда (1) называется его n -й *частичной суммой* и обозначается символом S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Сумма

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

называется n -м остатком ряда (1).

Очевидно, любой остаток R_n числового ряда также является числовым рядом.

О п р е д е л е н и е. Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то говорят, что ряд (1) *сходится*. В таком случае число S называют *суммой ряда* и записывают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Если же частичные суммы S_n не имеют конечного предела при $n \rightarrow \infty$, то ряд (1) называют *расходящимся*, такой ряд не имеет суммы. Если при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ равен какому-либо символу, то говорят, что ряд (1) сходится к бесконечности.

Пример 2. Доказать сходимость данных рядов и найти их суммы, пользуясь непосредственно определением сходимости.

- 1) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

Решение. 1) Запишем n -ю частичную сумму ряда и преобразуем ее:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, он конечен, значит, ряд сходится, а его сумма $S = 1$.

2) Представим выражение общего члена ряда следующим образом:

$$\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

В таком случае

$$\begin{aligned} S_n &= \left((\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) \right) + \dots + \left((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right) = \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$, то $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$.

3) По формуле $\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$ для $x \cdot y < 1$ найдем

$$S_1 = \arctg \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} = \arctg \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \arctg \frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \arctg \frac{1}{18} = \arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{18} = \arctg \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18}} = \arctg \frac{3}{4},$$

откуда можно предположить, что $S_n = \arctg \frac{n}{n+1}$.

Для обоснования этого предположения применим метод математической индукции. Полагая, что соотношение $S_n = \arctg \frac{n}{n+1}$ справедливо для всех $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$, покажем его справедливость для $n = k$. Действительно,

$$S_k = S_{k-1} + \arctg \frac{1}{2k^2} = \arctg \frac{k-1}{k} + \arctg \frac{1}{2k^2} = \arctg \frac{k}{k+1},$$

следовательно, $S_n = \arctg \frac{n}{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Находя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$, заключаем, что данный ряд сходится, а его сумма S равна $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3. Доказать непосредственно расходимость рядов

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Решение. 1) Найдем выражение n -й частичной суммы ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1).$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, данный ряд расходится.

2) Последовательность частичных сумм ряда $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1, \dots$ не имеет предела, следовательно, ряд расходится.

3) Достаточно показать, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм данного ряда не является ограниченной, поскольку в таком случае она не может быть сходящейся. Для оценки величины S_n воспользуемся неравенствами¹

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} > \\ &> \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \ln(n+1). \end{aligned}$$

¹ Его левая часть равносильна очевидному соотношению $4n^2 > 4n^2 - 1$, правая же вытекает из неравенства $x > \ln(x+1)$, справедливого при $x \neq 0$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, последовательность $\{S_n\}$ расходится, значит, расходится и данный ряд.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, порождаемого геометрической прогрессией $(|q| \neq 1)^2$.

Решение. Частичная сумма данного ряда есть $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ при $|q| < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = +\infty$ при $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ при $|q| > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$.

Пример 5. Исследуйте сходимость ряда $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n-1)^q} \right)$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм данного ряда. Для нее имеем: $S_n = \frac{1}{n^q}$, значит, $\{S_n\}$ сходится при $q \geq 0$ и расходится при $q < 0$. Следовательно, и ряд $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n-1)^q} \right)$ будет сходиться при $q \geq 0$, а расходиться при $q < 0$.

З а м е ч а н и е 1. На основании сформулированных определений и приведенных примеров можно заключить, что изучение вопроса сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сводится к изучению сходимости соответ-

² Случаи $q = \pm 1$ также можно проанализировать, действуя непосредственно по определению сходимости ряда. Если $q = 1$, ряд, очевидно, расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$. Для $q = -1$ расходимость ряда была установлена ранее, в примере 3.

ствующей последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда. Справедливо и обратное: исследование сходимости числовой последовательности можно свести к исследованию сходимости соответствующего ряда³. Действительно, всякой числовой последовательности $\{u_n\}$ можно сопоставить ряд

$$u_1 + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) + \dots,$$

для которого $S_n = u_n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Таким образом, теория числовых рядов может рассматриваться как новая форма изучения числовых последовательностей. Но эта форма, как будет понятно далее, предоставляет неоценимые преимущества как при установлении существования предела последовательности, так и при его вычислении. Это делает ряды важнейшим средством исследования в математическом анализе и его приложениях.

З а м е ч а н и е 2. В приведенных примерах частичные суммы S_n рядов выражались достаточно просто, так что существование и величину предела S_n можно было установить непосредственно. Чаше подобный анализ затруднителен, поэтому основные задачи в теории числовых рядов связаны с установлением сходимости или расходимости ряда без вычисления величины его частичных сумм, а также с оценкой скорости сходимости ряда.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

³ В качестве соответствующей иллюстрации см. пример 6 п. 2.2.

$$1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots; \quad (\text{ответ: } S = \frac{2}{3})$$

$$2) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots; \quad (\text{ответ: } S = \frac{1}{3})$$

$$3) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$$

$$(\text{ответ: } S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right), S = \frac{1}{4})$$

$$4) \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots; \quad (\text{ответ: } S_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right), S = \frac{1}{8})$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad (\text{ответ: } S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}, S = 2)$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\left[\frac{n+1}{2} \right]} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots \quad (\text{ответ: } S_{2n} = 0, S_{2n-1} = \frac{1}{n}, S = 0)$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}, \text{ где } x - \text{любое фиксированное число, отличное от } \pm 1;$$

$$\text{Указание: } \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}} = \frac{1}{1 - x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^n}}.$$

$$(\text{ответ: } S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}, S = \frac{x}{1-x} \text{ для } |x| < 1 \text{ и } S = \frac{1}{1-x} \text{ для } |x| > 1)$$

2. Доказать непосредственно расходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \ln^{\frac{n}{2}} 5; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n;$$

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \lg \frac{\lg(n+1)}{\lg n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right).$$

1.2. Основные теоремы о сходимости числовых рядов

Т е о р е м а 1.2.1 (критерий Коши сходимости числового ряда). Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого положительного

числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любых натуральных чи-

сел p и n , $n > N(\varepsilon)$, справедливо неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$.

Формальная запись критерия такова:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \right).$$

Для доказательства достаточно применить критерий Коши сходимости числовой последовательности к последовательности $\{S_n\}$ ча-

стичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, заметив, что $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| = |S_{n+p} - S_n|$.

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| &= \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} + \dots + \frac{p}{(n+p)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

то, положив $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 1. Как и при анализе последовательностей, критерий Коши редко применяется для доказательства сходимости конкретного ряда из-за технических трудностей. Область применения критерия Коши, как правило, ограничена задачами на установление расходимости ряда, а также утверждениями, в которых из сходимости одного ряда выводится сходимость другого.

Т е о р е м а 1.2.2 (необходимое условие сходимости ряда). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку данный ряд сходится, то существует конечный предел его частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, соответственно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. В таком случае $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Необходимое условие сходимости ряда, собственно говоря, вытекает из критерия Коши. Действительно, полагая в нем $p = 1$, получим $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| = |u_{n+1}| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$, откуда и следует, что последовательность $\{u_n\}$ бесконечно мала.

З а м е ч а н и е 3. Из теоремы 1.2.2 следует, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд заведомо расходится. Это *достаточный признак расходимости* любого ряда.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Решение. При $x = \pi k$ (k – целое) все члены ряда равны нулю, предел его частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, ряд по определению сходится.

Если же $x \neq \pi k$ (k – целое), то последовательность $\{\sin nx\}$ не имеет предела. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx \neq 0$, значит, ряд расходится.

Пример 3. Используя необходимое условие сходимости, установить расходимость следующих рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{n^2}$.

Решение. 1) Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = 1$, необходимое условие сходимости ряда, очевидно, не выполняется.

2) Находим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{2n^2 + 3} \right)^{-\frac{2n^2 + 3}{2}} \right)^{-\frac{2n^2}{2n^2 + 3}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^2 + 3}} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

З а м е ч а н и е 4. Условия теоремы 1.2.2 не являются достаточными. Рассмотрим, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называемый *гармоническим*⁴, для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Покажем, что ряд при этом расходится.

Предположим противное. Пусть данный ряд сходящийся, тогда существует конечный предел его частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Но

⁴ Каждый член этого ряда, начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних членов, т.е. $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$, $n = 2, 3, \dots$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2},$$

следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$, что противоречит предыдущему выводу.

Итак, гармонический ряд – расходящийся⁵.

Т е о р е м а 1.2.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится любой его n -й остаток R_n . Обратно: из сходимости остатка R_n ряда вытекает сходимость самого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, т.е. предел его частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ конечен. Рассмотрим n -й остаток ряда $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ и найдем предел его k -х частичных сумм: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{n+k} - S_n) = S - S_n$. Предел конечен, значит, R_n сходится.

Пусть теперь сходится ряд $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$, т.е. существует конечный предел $\tilde{S} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k$. Положим $k = n - m$, ($m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$). Тогда

$$S_n = (u_1 + \dots + u_m) + (u_{m+1} + \dots + u_n) = S_m + \tilde{S}_{n-m} = S_m + \tilde{S}_k,$$

⁵ Расходимость гармонического ряда можно обосновать, исходя из критерия Коши. Построим для удобства отрицание к нему: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно положительное число ε с условием, что для любого номера $N = N(\varepsilon)$ найдутся натуральные p и $n > N(\varepsilon)$, для которых справедливо неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geq \varepsilon$. Пусть, к примеру, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n$, тогда выполнение условия $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon$ обеспечивает полученная ранее оценка $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n$.

следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_m - \tilde{S}_k) = S_m - \tilde{S}$. Предел частичных сумм ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ конечен, значит, ряд сходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Действительно, по теореме 1.2.3 любой n -й остаток R_n данного ряда сходится, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - S_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$.

З а м е ч а н и е 5. Из теоремы 1.2.3 следует, что сходимость ряда не изменится, если дописать к нему в начале несколько новых членов или, наоборот, вычеркнуть несколько начальных членов ряда. Упомянутая теорема позволяет также утверждать, что свойство ряда быть сходящимся или расходящимся не зависит от изменения любого конечного числа его членов. Это дает возможность в формулировках условий сходимости или расходимости рядов заменять требование «для всех членов ряда» на требование «для всех членов ряда, начиная с некоторого». Обосновав сейчас такую замену, в дальнейшем не будем специально ее оговаривать.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Используя необходимое условие сходимости, установите расходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+5}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2+n+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$$

2. Применяя критерий Коши, докажите сходимость данных рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (|a_n| < 10).$$

3. Применяя критерий Коши, докажите расходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

4. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$, где S_n – n -я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, также расходится.

Указание: примените критерий Коши, воспользовавшись оценкой

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} \quad (n, p \in \mathbb{N}).$$

5. Исследуйте сходимость ряда

$$e^{-|\ln|\lg 1^\circ||} + e^{-|\ln|\lg 1^\circ| \cdot \ln|\lg 3^\circ||} + \dots + e^{-|\ln|\lg 1^\circ| \cdot \ln|\lg 3^\circ| \cdot \dots \ln|\lg (2k-1)^\circ||} + \dots$$

Указание: все члены ряда, начиная с номера $n = 23$, будут иметь в показателе множитель $\ln|\lg 45^\circ| = 0$.

1.3. Линейные операции над рядами. Группировка членов ряда

Рассмотрим линейные операции над числовыми рядами и сформулируем их основные свойства.

Т е о р е м а 1.3.1. Если все члены сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, имеющего сумму S , умножить на произвольное число c , то образованный ряд останется сходящимся, а его сумма будет равна cS .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный предел его частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то для ряда, образованно-

го в соответствии с условиями теоремы, частичные суммы $\tilde{S}_n = cS_n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если все члены расходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ умножить на число $c \neq 0$, то образованный ряд останется расходящимся.

О п р е д е л е н и е. Суммой рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, общий член которого равен сумме общих членов данных рядов.

Т е о р е м а 1.3.2. Сумма двух сходящихся рядов является сходящимся рядом. Если при этом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_u$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_v$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = S_u + S_v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для ряда, полученного в результате суммирования исходных рядов, существует конечный предел частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k = S_u + S_v.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Сумма сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Действительно, пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. Если предположить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ окажется сходящимся, то сходящийся должен и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Полученное противоречит условию.

Таким образом, если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то для любых чи-

сел μ и λ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu u_n + \lambda v_n)$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu u_n + \lambda v_n) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \text{ Это означает, что множество сходящихся ря-}$$

дов образует линейное пространство.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$.

Решение. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$, а каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{ сходится (см. пример 4 п.1), то и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} \text{ сходится.}$$

Пример 2. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n2^n}$?

Решение. Заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится (см. замечание 4 п. 1.2), ряд же } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ — сходящийся. Та-}$$

ким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n2^n}$ расходится.

Пример 3. Покажите, что сумма двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Решение. Для расходящихся рядов $(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ и $(v) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (см.

пример 3 п.1) имеем:

$$(u) + (v) = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} + (-1)^n) = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots \text{ — сходящийся ряд,}$$

вместе с тем

$$(u) + (u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} - \text{расходящийся ряд.}$$

Воспользуемся рассмотренным примером для осмысления следующего факта. Если в ряде $(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расставить скобки⁶

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots,$$

и произвести внутри них сложение, получим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ (говорят, что он получен группировкой членов ряда (u)). Таким образом, *группировка членов ряда может превратить расходящийся ряд в сходящийся*. Заметим, однако, что для ряда (u) не выполнялось необходимое условие сходимости. Покажем, что и в случае его выполнения «эффект» группировки может быть тем же.

Пример 4. Докажите, что если опустить скобки в записи ряда $(1-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \dots - \frac{1}{n}\right) + \dots$, он станет расходящимся (в каждой скобке n слагаемых вида $\frac{1}{n}$ и столько же вида $-\frac{1}{n}$).

Решение. При доказательстве расходимости ряда (последовательность его членов является бесконечно малой)

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}} - \underbrace{\frac{1}{n} \dots - \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

⁶ Внимание публики к данному ряду привлек философ Гвидо Гранди в 1703 году. Он утверждал, что ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ символизирует создание вселенной из ничего. А именно, расстановка в нем скобок одним способом дает Ничто (то есть ноль), а другим способом – единицу. Другие любопытные факты, связанные с данным рядом, можно найти в Приложении 1.

будем использовать критерий Коши. Поскольку для любого натурального N найдутся такие натуральные числа p и $n > N$, что $u_{n+1} = \frac{1}{p}, \dots, u_{n+p} = \frac{1}{p}$,

то $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = 1$. Условия критерия не выполнены, значит, ряд расходится.

При этом нетрудно видеть, что произведя сложение внутри скобок заданного ряда, вновь получаем сходящийся ряд $0 + 0 + \dots + 0 + \dots$.

Исследуем проблему группировки членов ряда в более общем виде.

О п р е д е л е н и е. Если дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$,

где $U_k = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} u_n$, $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$, называется рядом, *полученным группировкой членов* заданного ряда (т.е. U_k для всякого k есть сумма членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ в k -х скобках).

Т е о р е м а 1.3.3. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то и всякий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$

также сходится, причем суммы обоих рядов равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S_n — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

а $\tilde{S}_k$ — частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$. В таком случае

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &= U_1 + U_2 + \dots + U_k = \\ &= \sum_{n=1}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n + \dots + \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n_k-1} = S_{n_k-1}, \end{aligned}$$

поскольку суммы $U_1, U_2, \dots, U_k$ конечны, и раскрытие скобок будет «законным». Получили, что $\{\tilde{S}_k\}$ является подпоследовательностью для $\{S_n\}$.

По условию теоремы $\{S_n\}$ сходится, значит, $\{\tilde{S}_k\}$ также сходится и $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Так как сходимость подпоследовательности $\{S_{n_k-1}\}$ не влечет, вообще говоря, сходимости всей последовательности $\{S_n\}$, то в случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может как сходиться, так и расходиться (см. примеры 3 и 4).

Т е о р е м а 1.3.4. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, при этом $U_k = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-1} u_n$, $1 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{m=n_{k-1}} \left\{ \left| \sum_{m=n_{k-1}}^n u_m \right|, n_{k-1} \leq n \leq n_k - 1 \right\} \right) = 0$.

В рамках настоящего пособия мы не рассматриваем доказательство данной теоремы, однако с ним можно ознакомиться в [1, с. 14–15].

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Убедитесь, что можно представить в виде суммы двух расходящихся рядов

а) сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (см. пример 2 п. 1.1);

б) расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ (см. пример 3 п. 1.1).

2. Произведите группировку членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ так, чтобы полученный ряд сходил к 1.

3. Применяя свойства линейных операций над числовыми рядами, исследуйте сходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 7^n + 11^n}{13^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^3 \cdot 3^{2n} + 10^7 \cdot 7^n}{11^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - \pi^n}{3^n}.$$

Ответы: 3. 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится.

2. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

2.1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм не убывает. В этом случае сходимость $\{S_n\}$ равносильна ее ограниченности, следовательно, значит, будет верна

Т е о р е м а 2.1.1 (критерий сходимости ряда с неотрицательными членами). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена.

Д о к а з а т е л ь с т в о немедленно следует из известных утверждений теории пределов. Необходимые условия вытекают из теоремы об ограниченности сходящейся последовательности, достаточные – из теоремы о монотонной ограниченной последовательности.

Поскольку для рассматриваемых рядов последовательность $\{S_n\}$ всегда имеет предел (либо конечный, либо бесконечный), то зачастую вместо слов «ряд сходится» или «ряд расходится» употребляют соответственно символы

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Пример 1. Доказать расходимость гармонического ряда⁷, убедившись, что последовательность его частичных сумм не ограничена.

Решение. Отбросив первые два члена ряда, остальные разобьем последовательно на группы по $2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$ членов в каждой

⁷ Расходимость гармонического ряда ранее (см. п. 1.1) была показана нами при помощи критерия Коши.

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_2; \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3}; \quad \dots; \quad \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}; \dots.$$

Каждая из выделенных сумм будет больше $\frac{1}{2}$, поскольку

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для частичной суммы S_{2^n} гармонического ряда справедлива оценка $S_{2^n} > n \cdot \frac{1}{2}$. Видим, что частичные суммы не могут быть ограничены сверху, ряд имеет бесконечную сумму.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где p – произвольное действительное число.

Решение. При $p < 1$ члены рассматриваемого ряда больше соответствующих членов гармонического ряда, значит, в этом предположении его частичные суммы и подавно не ограничены сверху, так что ряд расходится.

Пусть теперь $p > 1$. Обозначим $p = 1 + \sigma$, где $\sigma > 0$. Выделим, как и в примере 1, последовательные группы членов:

$$\underbrace{\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}}_2; \quad \underbrace{\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{16^p}}_{2^3}; \quad \dots; \quad \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^k)^p}}_{2^{k-1}}; \dots.$$

Оценим сумму членов в каждой группе:

$$\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^k)^p} < \frac{1}{(2^{k-1})^p} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}} = \frac{1}{(2^{k-1})^{\sigma}}.$$

Сейчас легко показать, что эти суммы соответственно меньше членов геометрической прогрессии $\frac{1}{2^\sigma}, \frac{1}{2^{2\sigma}}, \frac{1}{2^{3\sigma}}, \dots, \frac{1}{2^{(k-1)\sigma}}, \dots$. Следовательно, какую бы частичную сумму рассматриваемого ряда ни взять, она будет меньше постоянного числа

$$L = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

значит, при условии $p > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится.

З а м е ч а н и е. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где p – произвольное действительное число, называют *обобщенным гармоническим рядом*. Примеры 1 и 2 позволяют заключить, что такой ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Завершим рассмотрение раздела следующим любопытным примером.

Пример 3. Если в гармоническом ряде вычеркнуть все члены, знаменатели которых, записанные в десятичной системе, содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся.

Решение. Количество неотрицательных чисел между 0 и $10^m - 1$, которые записываются цифрами 0, 1, 2, ..., 8, равно 9^m . Записываемых без 9 чисел между $10^{m-1} - 1$ и $10^m - 1$ существует $9^m - 9^{m-1}$. Следовательно, сумма невычеркнутой части гармонического ряда меньше, чем

$$\frac{9-1}{1} + \frac{9^2-9}{10} + \frac{9^3-9^2}{100} + \dots = 8 \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \dots \right) = 80.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Докажите расходимость данных рядов, убедившись, что последовательности $\{S_n\}$ их частичных сумм не ограничены:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-1}}.$$

Указания: 1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{3n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1 = S_1$, $a_{n+1} = \frac{1}{S_n}$, где

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \text{ Докажите расходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Указание: убедитесь, что при $a_{n+1} = \frac{1}{S_n}$ не могут одновременно выполняться требование ограниченности последовательности $\{S_n\}$ и необходимое условие сходимости ряда.

2.2. Признаки сравнения

Во многих случаях изучение ограниченности последовательности $\{S_n\}$ затруднительно, поэтому для исследования числовых рядов с неотрицательными членами применяют их *признаки сходимости*, т. е. теоремы, содержащие достаточные условия сходимости рассматриваемых рядов.

Т е о р е м а 2.2.1 (простой признак сравнения). Пусть даны ряды с неотрицательными членами $(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $(v) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $u_n \leq v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Тогда:

1) если сходится ряд (v) , то сходится и ряд (u) ;

2) если расходится ряд (u) , то расходится и ряд (v) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд (v) сходится. Тогда (см. теорему 2.1.1) последовательность его частичных сумм $\{S_n^{(v)}\}$ ограничена сверху. Поскольку $u_n \leq v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), то для частичных сумм ряда (u) справедлива оценка $S_n^{(u)} \leq S_n^{(v)}$, откуда следует ограниченность $\{S_n^{(u)}\}$, а значит, и сходимость ряда (u) .

Пусть теперь ряд (u) расходится. Если при этом предположить сходимость ряда (v) , то в силу предшествующих рассуждений ряд (u) также должен сходиться, что противоречит рассматриваемой ситуации. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 2.2.1 получена оценка $u_n \leq v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), при этом ряд (v) расходится, нет возможности сказать, сходится ли ряд (u) . Аналогично: в случае сходимости ряда (u) оценка $u_n \leq v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) не информативна.

З а м е ч а н и е 2. Обращение к теореме 2.2.1 предполагает, что сходимость одного из рядов (u) или (v) известна. Часто исследуемый ряд сравнивают с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, порождаемым геометрической прогрессией (см. пример 4 п.1.1) или обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, подробно изученным в п.2.1.

Пример 1. Исследуйте сходимость ряда: 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Решение. 1) Сравним члены данного ряда с соответствующими членами гармонического ряда: $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Гармонический ряд расходится, значит, согласно теореме 2.2.1, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ также расходится.

2) Каждый член данного ряда, начиная со второго, не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$). На основании признака сравнения заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ также сходится.

Пример 2. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

Решение. Поскольку $a_n \leq \max(a_n, b_n)$, теорема 2.2.1 позволяет однозначно ответить⁸: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ расходится. Но про сходимость или расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ в общем случае ничего сказать нельзя.

Действительно, пусть $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. Тогда $\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ – расходящийся. Однако, если положить

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + \dots$$

⁸ Можно также исходить из неравенства $b_n \leq \max(a_n, b_n)$.

т. е. различным образом поместить нули между членами гармонического ряда, не меняя порядка следования остальных его членов (данная процедура не повлияет на характер сходимости гармонического ряда), то $\min(a_n, b_n) = 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ сходится.

Т е о р е м а 2.2.2 (предельный признак сравнения). Пусть дан ряд $(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами и ряд $(v) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с положительными членами. Пусть далее существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = K$, где $K \in [0; +\infty)$. Тогда:

- 1) если $0 < K < +\infty$, то ряды (u) и (v) в смысле сходимости ведут себя одинаково, т.е. оба сходятся или оба расходятся;
- 2) если $K = 0$, то сходимость ряда (v) влечет сходимость ряда (u) ;
- 3) если $K = +\infty$, то расходимость ряда (v) влечет расходимость ряда (u) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осмыслим условия теоремы для каждого из выделенных случаев.

- 1) Если $0 < K < +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = K \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - K \right| < \varepsilon \right). \quad (*)$$

В силу произвольности ε подберем его так, чтобы выполнялось условие $K - \varepsilon > 0$. Тогда из (*) следует оценка $K - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < K + \varepsilon$, откуда

$$(K - \varepsilon)v_n < u_n < (K + \varepsilon)v_n.$$

Применяя теорему 2.2.1 к левой части данного неравенства, получим, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то расходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, так как расходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (K - \varepsilon) v_n$. Рассуждая аналогично в отношении правой части неравенства,

приходим к выводу: из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а значит, и $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon) v_n$ следует

сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Перейдем к случаю $K = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon \right).$$

Поскольку $u_n < \varepsilon \cdot v_n$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$, то сходимость ряда (u) следует из сходимости (v) на основании теоремы 2.2.1.

3) Наконец, если $K = +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} > \varepsilon \right).$$

Имеем: $u_n > \varepsilon \cdot v_n$ для $n > N(\varepsilon)$. Значит, по простому признаку сравнения из расходимости ряда (v) вытекает расходимость ряда (u) . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. На практике предельный признак сравнения, представляющий, очевидно, следствие простого признака сравнения, нередко оказывается более удобным.

Пример 3. Исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \lg \frac{\pi}{4n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}.$$

Решение. 1) Применим теорему 2.2.2, выбрав в качестве ряда (v)

гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{tg \frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$, а гармонический ряд расходится, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} tg \frac{\pi}{4n}$ тоже расходится.

2) Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, в котором $p = 2 > 1$). Будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3n^2 - 1}{n^4 + 1} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2 - 1}{n^4 + 1}}{\frac{1}{n^2}} = 3.$$

В соответствии с предельным признаком сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4 + 3n^2}{n^4 + 1}$ сходится.

3) Вновь выберем в качестве «эталонного» гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = +\infty,$$

то расходимость гармонического ряда повлечет расходимость данного ряда.

4) Сравним заданный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (он сходится, так как знаменатель порождающей его геометрической прогрессии $q = \frac{1}{2} < 1$).

Вычислив предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^{n^2-n}} = 0$, убедимся, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ –

сходящийся.

Проиллюстрируем теперь решение задач, где возможно последовательное применение простого и предельного признаков сравнения.

Пример 4. Исследуйте сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими членами: 1) $u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$; 2) $u_n = \int_{\pi}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Решение. 1) Поскольку $x \leq \frac{1}{n}$, то $\int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{1/n} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$.

Сравнивая ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1.$$

На основании предельного признака сравнения заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ сходится, тогда вследствие простого признака сравнения сходится и заданный ряд.

2) В данном случае

$$\int_{\pi}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\pi}^{\pi(n+1)} \sin^2 x dx = \frac{1}{\pi(n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ расходится, в чем нетрудно убедиться, сравнив его с гармоническим рядом, исследуемый ряд также является расходящимся.

Пример 5. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = k$, где $k \neq 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Решение. Сравнивая исследуемый ряд с гармоническим рядом, в соответствии с теоремой 2.2.2 будем иметь: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = k$. Поскольку $k \neq 0$, заданный ряд – расходящийся.

Пример 6. Рассматривая $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ как частичную сумму соответствующего ряда, покажите, что она сходится.

Решение. Введем в рассмотрение ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором

$$u_1 = S_1 = -1,$$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Сравним⁹ его (см. пример 5 п. 1.1) со сходящимся рядом

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right):$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n-1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = 1,$$

поскольку при $n \rightarrow \infty$ бесконечно малые величины $\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} - 1$ и $\frac{1}{2(n-1)}$

эквивалентны.

⁹ Несмотря на то, что оба рассматриваемых ряда с отрицательными членами, можно умножить каждый на -1 . Таким образом, признак сравнения применим, значение же вычисляемого предела при этом не изменится.

Таким образом, введенный в рассмотрение ряд является сходящимся, следовательно, сходится и последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм.

З а м е ч а н и е 4. Наличие признаков сравнения для исследования сходимости рядов наводит на мысль о поиске такого универсального предельно медленно сходящегося (или расходящегося) ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о сходимости (или расходимости) любого наперед заданного ряда с неотрицательными членами. Это позволило бы четко описать границу между сходящимися и расходящимися рядами. Однако, такого «граничного» ряда, к сожалению, не существует. Доказательство данного факта представлено в Приложении 2.

Таким образом, несмотря на то, что большинство рядов достаточно просто анализируются в результате сравнения их либо с гармоническим (обобщенным гармоническим) рядом, либо с рядом, порожаемым геометрической прогрессией, для эффективного применения признаков сравнения все же требуется достаточно широкий запас рядов, сходимость или расходимость которых известна.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследуйте сходимость данных рядов, применяя признаки сравнения:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}.$$

Ответы: 1) расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится.

2. Докажите, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

3. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; приведите примеры.

4. Докажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

Указание: воспользуйтесь неравенствами $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ и $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

для положительных чисел a и b .

5. Докажите, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами

следует сходимость рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1})$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$.

Указания: 3) следует из неравенства $\max(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) < a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$;

4) следует из неравенства $\min(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}) \leq a_n$.

6. Докажите, что если ряды $(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $(B) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и $a_n \leq c_n \leq b_n$

($n=1, 2, \dots$), то ряд $(C) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ также сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (C) , если ряды (A) и (B) расходятся?

Указание: примените признак сравнения к рядам $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ с неотрицательными членами.

7. Теорема сравнения. Докажите, что если для рядов $(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

и $(B) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами, начиная с некоторого номера n

выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B).

Указание: из условия задачи следует справедливость неравенства

$$a_{n+k} \leq \frac{a_n}{b_n} \cdot b_{n+k} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \text{ начиная с некоторого номера } n.$$

8. Исследуйте сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

$$1) u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx; \quad 2) u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx;$$

$$3) u_n = \int_{\pi}^{\pi(n+1)} \frac{\cos^2 x}{x} dx; \quad 4) u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[3]{1+x^3} dx}.$$

Ответы: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.

9. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\arctg(n+1)}{\arctg n} \right)$?

Указание: покажите, что данный ряд в смысле сходимости ведет себя

так же, как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctg(n+1) - \arctg n)$, сходимость которого трудно установить по определению.

10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами сходится. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}?$$

Ответ: да.

11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ с положительными членами сходится. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{u_1 + u_2 + \dots + u_n}?$$

Ответ: да.

12. Последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}}$, $n = 1, 2, \dots$.

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < 1,025$.

Указание: покажите, что $x_n = \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}$, где $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} x_n < \frac{1}{2} + \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} < 1,025.$$

2.3. Признаки Даламбера и Коши (радикальный)

Используя свойства ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, порождаемого геометрической прогрессией, можно доказать признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов. Заметим, что каждый из названных признаков будет следствием теоремы 2.2.1.

Т е о р е м а 2.3.1 (признак Даламбера). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд с положительными членами. Если при достаточно больших n выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, где q – число, меньшее единицы, то данный ряд сходится; если же $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ для всех номеров n , начиная с некоторого, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала для всех $n > N$ имеем условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \text{ где } q < 1. \text{ Тогда}$$

$$u_{n+1} \leq q \cdot u_n, \quad u_{n+2} \leq q \cdot u_{n+1} \leq q^2 \cdot u_n, \dots, \quad u_{n+k} \leq q^k \cdot u_n, \dots$$

Значит, для $n > N$ все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не превосходят соответствующих

членов сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot u_n$ (он порождается геометрической прогрессией со знаменателем $q < 1$). Следовательно, по теореме 2.2.1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится.}$$

Пусть теперь, начиная с некоторого номера n , выполняется неравен-

$$\text{ство } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1. \text{ Тогда расходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ непосредственно следует из}$$

нарушения необходимого условия сходимости, поскольку u_n не может стремиться к нулю при $u_{n+1} \geq u_n$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. На практике признак Даламбера, в основном, при-
меняют в следующей формулировке: если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положи-

тельны и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то данный ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Это так называемая *предельная форма* признака Даламбера. Обосновать ее можно по схеме, схожей с доказательством теоремы 2.3.1, однако в сравнении с ней условия предельной формы слабее. Продемонстрируем это.

Пример 1. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

Решение. Применяя признак Даламбера в предельной форме, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 1,$$

следовательно, вывод о сходимости (расходимости) данного ряда сделать нельзя. Заметим теперь, что последовательность $\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}$ стремится к e ,

строго возрастающая, в таком случае $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > 1$. На основании теоремы

2.3.1 заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ расходится.

Преимущество предельной формы признака Даламбера состоит в том, что при решении многих задач она оказывается более удобной в применении по сравнению с первоначальной.

Пример 2. Применяя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin \frac{\pi}{2^n}}{n!}.$$

Решение. Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ для каждого из заданных рядов:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{3^{n+1} + n+1} \cdot \frac{3^n + n}{2^n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{(n+1)^2}{2^n}\right) \left(1 + \frac{n}{3^n}\right)}{\left(3 + \frac{n+1}{3^n}\right) \left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)} = \frac{2}{3} < 1,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1,$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{e}{2} > 1.$$

Итак, согласно признаку Даламбера ряды 1) и 2) сходятся, а ряды 3) и 4) – расходятся.

З а м е ч а н и е 2. Применение признака Даламбера в предельной форме не позволяет решить вопрос сходимости ряда в случае, когда

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Действительно, исследуемый ряд может оказаться как сходя-

щимся (см., например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, изученный в примере 2 п.1.1), так

и расходящимся (в частности, гармонический ряд). Отметим также, что и первоначальная форма признака Даламбера при анализе сходимости указанных рядов не информативна, по отношению к ним следует привлекать другие средства.

Т е о р е м а 2.3.2 (радикальный признак Коши). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд с неотрицательными членами. Если при достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, где q – число, меньшее единицы, то данный ряд

сходится; если же $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ для всех номеров n , начиная с некоторого, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство. Неравенства $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ и $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ соответственно равносильны следующим: $u_n \leq q^n$ и $u_n \geq 1$. В первом случае остается применить теорему 2.3.1, сравнивая данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, во втором же достаточно заметить нарушение необходимого условия сходимости ряда. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Как и в случае с признаком Даламбера, на практике зачастую удобнее применять *предельную форму* рассмотренной теоремы, более слабую, однако, в сравнении с ней. Приведем формулировку упоминаемой формы признака Коши (обоснование реализуется по аналогии с доказательством теоремы 2.3.2): если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то данный ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Для демонстрации неравносильности первоначальной формулировки признака Коши и его предельной формы обратимся к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$, рассмотренному ранее в примере 1.

Применяя признак Коши в предельной форме, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} \sqrt[n]{n!} = 1,$$

что непосредственно следует из формулы Стирлинга $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{e}{n}\right)^n} = 1$.

Ясно, что отсюда вывод о сходимости или расходимости данного ряда сделать нельзя. Если же воспользоваться неравенством $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, легко получаемым посредством метода математической индукции, то $\sqrt[n]{u_n} = \frac{e}{n} \sqrt[n]{n!} > 1$.

Следовательно, на основании теоремы 2.3.2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$ расходится.

Приведем еще несколько упражнений на применение радикального признака Коши.

Пример 3. Исследуйте сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n + n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Решение. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{(-1)^n + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = 2 > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} = e^{-2} < 1,$$

то ряд 1) расходится, а ряд 2) – сходится.

З а м е ч а н и е 4. Признак Даламбера удобнее использовать для рядов, в записи общих членов которых присутствуют факториалы, а признак Коши – для рядов, общие члены которых имеют степенно-показательный вид, а в показателе присутствует степень n .

Подчеркнем, что в случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ применение предельной формы признака Коши не позволяет решить вопрос сходимости ряда. Соответ-

ствующими иллюстрациями могут служить ряды, упомянутые в замечании 2 настоящего раздела. Теорема 2.3.2 для исследования сходимости этих рядов также не приложима.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$$

Решение. Представим два способа решения данной задачи.

1) Заметим следующее рекуррентное соотношение для членов данного ряда: $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{u_1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$,

$$u_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{u_2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$$

Теперь для исследования сходимости ряда удобно применить признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}} = \frac{1}{2}.$$

Значение предела меньше единицы¹⁰, значит, исследуемый ряд сходится.

3) Представим заданный ряд в иной форме. Так как $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, то

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right)}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{8} \right)} = 2 \sin \frac{\pi}{16}.$$

¹⁰ Последовательность $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}$ (в записи n двоек) строго возрастает и ограничена сверху, поскольку $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{4}}}} = 2$. Обозначая теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и учитывая, что $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, находим: $A = 2$.

Рассуждая аналогично, найдем, что $u_n = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ (для первого члена ряда соотношение также верно).

Исследуем полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ на сходимость. Применим сначала признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

На основании признака Коши будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Кроме того, можно сравнить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$.

Заметим, что при решении последней задачи значения $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, вычисляемые в ходе обращения к признакам Даламбера и Коши, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ оказались равными. Оказывается, это не случайно.

Из теории последовательностей известен следующий факт¹¹: если последовательность $\{u_n\}$ положительных чисел имеет предел (конечный или нет), то тот же предел имеет и последовательность $\left\{ \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} \right\}$. Применяя данное утверждение к последовательности

$$u_1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \dots, \frac{u_n}{u_{n-1}}, \frac{u_{n+1}}{u_n}, \dots,$$

¹¹ Его можно установить непосредственно по определению предела последовательности или как, например, в [8, с. 183], при помощи теоремы Шварца.

получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \dots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Таким образом, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Это означает, что во всех случаях, когда признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда, ответ может быть получен и с помощью признака Коши¹², причем пределы обоих исследуемых вариантов равны.

Обратное утверждение неверно. Убедимся в этом на примере.

Пример 5. Показать, что вопрос сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ можно решить посредством признака Коши, но не признака Даламбера.

Решение. Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1$, значит, по признаку Коши данный ряд сходится. Однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n} = \begin{cases} 1, n = 2k-1, \\ \frac{1}{4}, n = 2k, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

т.е. признак Даламбера в его предельной форме неприменим. Очевидно, окажется не информативной и его первоначальная форма (теорема 2.3.1):

отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ принимает лишь значения 1 и $\frac{1}{4}$, поэтому ни неравенство

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, где q – число, меньшее единицы, ни условие $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ не может вы-

полняться ни для какого номера n .

¹² Речь, конечно же, идет о предельных формах упоминаемых теорем.

Рассмотренная задача показывает, что признак Коши сильнее признака Даламбера, значит, область его применения шире. Однако исследовать отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ на практике нередко проще, чем радикал с переменным показателем $\sqrt[n]{u_n}$, возникающий при обращении к признаку Коши.

З а м е ч а н и е 5. Вопрос, каким из признаков (Даламбера или Коши) пользоваться при исследовании сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, всякий раз решается в зависимости от вида последовательности $\{u_n\}$. Но поскольку оба признака основаны на сравнении данного ряда с геометрической прогрессией, ни тот, ни другой из них не дают ответа на вопрос о поведении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, если его члены стремятся к нулю медленнее, чем последовательность вида $\{q^n\}$, $0 < q < 1$. Для таких рядов нужна более тонкая эталонная шкала.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследуйте сходимость данных рядов, применяя признак Даламбера:

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{n+1}(2n)!!}{(2n-1)!!}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{5 \cdot 18 \cdot 47 \cdot \dots \cdot (n^3 + 2n^2 + 2)}. \end{array}$$

Ответы: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.

2. Исследуйте сходимость данных рядов, применяя радикальный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot \sqrt[n]{n^2}}.$$

Ответы: 1) расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится.

3. Оцените эффективность применения признака Даламбера при исследовании сходимости рядов в задании 2.

4. Убедитесь, что вопрос сходимости следующих рядов можно решить посредством признака Коши, но не признака Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2 7^n}.$$

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, если:

$$1) a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n};$$

$$2) a_1 = 1, a_2 = 2 - \sqrt{3}, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Указание: в 2) покажите сначала, что $a_{n+1} = a_2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Докажите каждое из соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{n^n} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$$

2.4. Интегральный признак Коши

В настоящем разделе рассмотрим признак сходимости, по своей форме отличающийся от всех предыдущих и построенный на идее сопоставления ряда с интегралом.

Т е о р е м а 2.4.1 (интегральный признак Коши¹³). Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает на полупрямой $x \geq 1$.

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отрезки вида $[k; k+1]$, где $k=1, 2, \dots, n$. В силу монотонности функции $f(x)$ для $x \in [k; k+1]$ будут верны неравенства

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

В результате интегрирования каждого из них на соответствующем отрезке будем иметь:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Суммируем полученные неравенства:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n f(k)}_{S_n} \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \underbrace{\sum_{k=1}^n f(k+1)}_{S_{n+1} - f(1)}, \quad (*)$$

где S_n — n -я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то (см. теорему 2.1.1) последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. В таком случае левая часть (*) влечет ограничен-

¹³ В геометрической форме признак впервые был доказан Маклореном, но позабыт и лишь впоследствии вновь открыт Коши. По этой причине его нередко называют признаком Маклорена – Коши или признаком Коши – Маклорена.

ность $\int_k^{k+1} f(x)dx$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, соответственно, сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Если же сходится $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, он ограничен вследствие неотрицательности функции $f(x)$. Тогда правая часть (*) обеспечивает ограниченность величины $S_{n+1} - f(1)$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$, а значит, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Приведенная формулировка интегрального признака Коши и схема его доказательства подразумевают, что понятие несобственного интеграла и критерий его сходимости для неотрицательной функции изучены ранее. Если это не так, достаточно вместо $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ввести в рассмотрение последовательность $a_n = \int_1^{n+1} f(x)dx$. Тогда неравенство (*) позволяет убедиться, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{a_n\}$.

З а м е ч а н и е 2. Начальным значением номера ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ может быть не только 1, но и любое натуральное число m . В таком случае при использовании интегрального признака Коши функцию $f(x)$ следует рассматривать для $x \geq m$.

Пример 1. Применяя интегральный признак Коши, исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где p – произвольное действительное число¹⁴.

Решение. На основании данного признака критерием сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ является сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

При $p \neq 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-p} - 1) = \begin{cases} 0, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

Если же $p = 1$, получаем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty.$$

Исходя из полученных результатов, заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Рассмотрим еще несколько примеров применения изученного признака.

Пример 2. Исследовать сходимость рядов

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}; \quad 3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4 - 9}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Решение. Применяя интегральный признак Коши, получим:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(b^2 + 1) - \ln 2) = +\infty,$$

¹⁴ Ранее, в примере 2 п. 2.1, исследование сходимости обобщенного гармонического ряда было проведено иначе.

$$2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2 \ln^2 2} - \frac{1}{2 \ln^2 b} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2},$$

$$3) \int_3^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 - 9} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 - 9} = \frac{1}{12} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right) \Big|_3^b =$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b^2 - 3}{b^2 + 3} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \ln 2,$$

$$4) \int_2^{+\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \left(\ln(x+1) - \ln(x-1) - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1) - \ln x \right) \Big|_2^{+\infty} =,$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{(b+1)^{b+1}}{b(b-1)^{b-1}} - \ln \frac{27}{2} \right) = +\infty,$$

поскольку

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)^{b+1}}{b(b-1)^{b-1}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)^2}{b} \cdot \left(\frac{b+1}{b-1} \right)^{b-1} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)^2}{b} \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{b-1} \right)^{\frac{b-1}{2}} \right)^2 = e^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)^2}{b} = +\infty.$$

Таким образом, ряды 1) и 4) расходятся, а ряды 2) и 3) – сходятся.

З а м е ч а н и е 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то аналогично неравенству (*), установленному при доказательстве интегрального признака Коши, можно получить следующую оценку для его n -го остатка:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx.$$

Действительно, записывая для значений $x \in [k; k+1]$, где $k = n, n+1, \dots, n+m-1$, неравенства

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

интегрируя каждое на соответствующем отрезке, а затем суммируя, получим:

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} f(k+1) \leq \int_n^{n+m} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} f(k). \quad (**)$$

Пусть теперь число рассматриваемых отрезков неограниченно возрастает. Тогда (**) запишется в виде

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx \leq R_{n-1},$$

откуда и следуют требуемые оценки.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

Решение. Данный ряд сходится (см. пример 1), поэтому задача корректна. В силу замечания 3 имеем:

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \Big|_b^n = \frac{1}{2n^2}.$$

Поскольку по условию $R_n \leq 0,01$, то $n \geq 8$, значит, для вычисления суммы ряда с заданной степенью точности достаточно взять 8 его членов. Резуль-

тат округляем до сотых долей единицы: $1 + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{8^3} \approx 1,20$.

В заключение рассмотрим задачу, аналогичную той, что была решена ранее, в примере 6 п. 2.2. Позднее мы воспользуемся полученным в ней результатом.

Пример 4. Рассматривая $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ как частичную сумму соответствующего ряда, покажите, что она сходится.

Решение. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором

$$u_1 = S_1 = 1,$$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} \quad (n \geq 2).$$

Поскольку все члены полученного ряда отрицательны, применим интегральный Коши для исследования ряда с членами противоположного знака

(функция $f(x) = \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4.1):

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \left(\ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \left(\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((x-1) \ln \frac{x}{x-1} \right)_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((b-1) \ln \frac{b}{b-1} - \ln 2 \right) = 1 - \ln 2, \end{aligned}$$

поскольку

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (b-1) \ln \frac{b}{b-1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{b-1} \right)^{b-1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln e = 1.$$

Закключаем, что рассматриваемый ряд сходится, значит, сходится и последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследуйте сходимость данных рядов, применяя интегральный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-1)^2}}; \quad 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^q}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

Ответы: 1) расходится; 2) сходится при $q > 1$; 3) сходится.

2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 10^{-5} ?

Ответ: более 100000.

3. Рассматривая $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n}$ как частичную сумму соответствующего ряда, покажите, что она сходится.

2.5. Признаки Раабе и Гаусса

Напомним, что признак Даламбера и радикальный признак Коши ранее были установлены посредством сравнения исследуемого ряда с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, порождаемым геометрической прогрессией. Используя же при сравнении ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, сходимость которого подробно изучена в п.2.1, можно получить признаки Раабе и Гаусса.

Т е о р е м а 2.5.1 (признак Раабе). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд с положительными членами. Если при достаточно больших n выполняется неравенство $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq q$, где q – число, большее единицы, то данный ряд сходится; если же $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ для всех номеров n , начиная с некоторого, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство. Если $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq q > 1$, то $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{q}{n}$. Выбe-

рем $p \in (1; q)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p$, то при достаточно больших n

будет выполняться

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}.$$

Итак, $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$, следовательно, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{n^p}}$. Поскольку при $p > 1$ ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, то по теореме сравнения¹⁵ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть теперь при достаточно больших n выполняется соотношение

$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, из которого вытекает, что $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Так как гармонический

ряд расходится, то по теореме сравнения, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Теорема

доказана.

З а м е ч а н и е 1. На практике признак Раабе тоже преимущественно применяется в *предельной форме*: если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны

¹⁵ См. п. 2.2, задание 7 для самостоятельного решения.

и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = q$, то при $q > 1$ данный ряд сходится, а при $q < 1$ – расходится.

Пример 1. Посредством признака Раабе исследовать сходимость рядов

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^2}{4 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n^2 + n + 1)}.$$

Решение. Воспользовавшись предельной формой признака, найдем:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4) 3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) 3^n \cdot n!} - 1 \right) n &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+3}{3n-1} - 1 \right) n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{3n-1} = \frac{4}{3} > 1, \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2(n+1)^2 + (n+1) + 1)}{4 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n^2 + n + 1) 2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2} - 1 \right) n &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{2(n+1)^2} - 1 \right) n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Делаем вывод, что ряд 1) сходится, а ряд 2) – расходится.

З а м е ч а н и е 2. Сравнивая признаки Даламбера и Раабе, можно видеть, что последний значительно сильнее. Действительно, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

существует и не равен 1, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$ тоже существует, принимая

значения $+\infty$ или $-\infty$. Все остальные значения предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$,

отличные от 1 и дающие таким образом ответ на вопрос о сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, соответствуют ситуации $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, т.е. когда признак Даламбера

оказывается неинформативным.

Т е о р е м а 2.5.2 (признак Гаусса). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором

$u_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), отношение $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ может быть представлено в виде¹⁶

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где λ и μ – постоянные, а θ_n есть ограниченная величина. Тогда ряд сходится, если $\lambda > 1$ или если $\lambda = 1, \mu > 1$, и расходится – если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1, \mu \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случаи, когда $\lambda > 1$ или $\lambda < 1$ описываются признаком Даламбера, поскольку тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\lambda} \neq 1$. Ситуация $\lambda = 1$,

$\mu \neq 1$ влечет условие $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \mu$ и исчерпывается признаком Раабе.

Пусть, наконец, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ и $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$. Рассмотрим выраже-

ние

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln(n+1). \quad (1)$$

Преобразуя (1), получим:

¹⁶ Вид $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ может быть и таким: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$. Схема доказательства

признака Гаусса при этом не изменится.

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln(n+1) &= \left(\frac{n+1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \right) n \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= \theta_n \frac{\ln n}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \leq 0,\end{aligned}$$

по крайней мере, начиная с некоторого n , так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} = 1$, а по-
следовательность $\theta_n \frac{\ln n}{n}$ бесконечно мала. Тогда $\frac{u_n}{u_{n+1}} n \ln n \leq (n+1) \ln(n+1)$,
откуда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}}.$$

В силу теоремы сравнения заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, поскольку
расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Для набора $\lambda = 1$, $\mu = 1$ нередко формулируют са-
мостоятельный признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными члена-
ми — *признак Бертрана*, предельная форма которого такова: ес-
ли $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = q$, то исследуемый ряд сходится при $q > 1$ и рас-
ходится при $q < 1$. Таким образом, признак Гаусса объединяет в себе при-
знаки Даламбера, Раабе и Бертрана.

Перечисленные признаки можно получить также из признака Кум-
мера (см. Приложение 3).

Сопоставляя признаки Даламбера, Раабе и Бертрана, можно сделать вывод, что они образуют цепь все более чувствительных (но и более сложных!) признаков сходимости числовых рядов с положительными членами. Эту цепь можно продолжать неограниченно.

З а м е ч а н и е 4. Известны и другие формулировки признака Гаусса, в которых осмыслиется представление соотношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Приведем одну из них¹⁷: если $u_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) и существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\eta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $\eta < -1$, и расходится, если $\eta \geq -1$.

Данная формулировка подчеркивает связь признаков Даламбера и Гаусса: признак Даламбера рассматривает случай, когда отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ отделено от 1 (снизу или сверху) и сравнивает последовательность $\{u_n\}$ с геометрической прогрессией. В свою очередь признак Гаусса анализирует ситуацию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ и сравнивает последовательность $\{u_n\}$ с последовательностью $\left\{\frac{1}{n^\eta}\right\}$.

На практике применение признака Гаусса нередко требует обращения к формуле Тейлора, проиллюстрируем это на примерах.

¹⁷ См., например, [1, с. 31]; здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = K$, где K – отличное от нуля число.

Пример 2. С помощью признака Гаусса исследовать сходимость ря-

дов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \quad (p > 0);$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\alpha^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\alpha^2 + \frac{9}{4} \right) \cdot \dots \cdot \left(\alpha^2 + \frac{(2n-1)^2}{4} \right)}{(n!)^2}.$

Решение. 1) В силу произвольности n удобнее рассмотреть отношение

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{2!(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

получаемое по формуле Тейлора¹⁸. При этом из условий теоремы 2.5.2 находим, что $\lambda = 1$, $\mu = \frac{p}{2}$, а $\theta_n = \frac{p(p+1)}{8} + n^2 \cdot o\left(\frac{1}{n^2} \right)$ – ограниченная величина. Следовательно, данный ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \leq 2$.

Можно воспользоваться и альтернативной формулировкой признака Гаусса:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^p = 1 - \frac{p}{2n} + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2!(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right)}_{o\left(\frac{1}{n^2} \right)}.$$

Поскольку $\eta < -\frac{p}{2}$, вновь получаем, что ряд сходится при $p > 2$ и расходится при $p \leq 2$.

¹⁸ Напомним, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o\left(\frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = 0$, т. е. $o\left(\frac{1}{n^2} \right)$ бесконечно мала в сравнении с $\frac{1}{n^2}$ при

$n \rightarrow \infty$.

2) В данном случае проще проанализировать отношение $\frac{u_n}{u_{n-1}}$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\alpha^2 + \frac{(2n-1)^2}{4}}{n^2} = \frac{\alpha^2}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\alpha^2 + \frac{1}{4}}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как $\eta = -1$, данный ряд расходится при любых значениях α .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследуйте сходимость данных рядов, применяя признак Гаусса (в некоторых случаях будет информативен и признак Раабе):

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)} \quad (q > 0);$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \sin \frac{\pi}{2^n}}{n^{n+p}} \quad (p > 0);$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (2-q)(2-q^{1/2})(2-q^{1/3})\dots(2-q^{1/n}) \quad (q > 0).$$

Ответы: 1) сходится при $p > 2$; 2) сходится при $p > 3/2$; 3) сходится при $p + q > 1$; 4) сходится; 5) сходится; 6) сходится при $p > 1/2$; 7) сходится при $q = 2$ и $q > e$.

2.6. Иные признаки сходимости

В данном разделе представим ряд менее известных признаков сходимости числовых рядов с неотрицательными членами, которые, однако, могут применяться для исследования рядов.

1. Признак Жамэ. Если признаки Раабе, Бертрана и Гаусса соответствующим образом уточняли признак Даламбера, то признак Жамэ уточняет радикальный признак Коши.

Т е о р е м а 2.6.1 (признак Жамэ). Ряд с неотрицательными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если при достаточно больших n выполняется неравенство

$(1 - \sqrt[q]{u_n}) \frac{n}{\ln n} \geq q > 1$, и расходится, если же $(1 - \sqrt[q]{u_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1$ для всех номеров n , начиная с некоторого.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала ситуацию, когда для членов данного ряда выполняется условие $(1 - \sqrt[q]{u_n}) \frac{n}{\ln n} \geq q > 1$. Преобразуем его к виду

$$0 \leq u_n \leq \left(1 - \frac{q \ln n}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, начиная с некоторого номера $1 - \frac{q \ln n}{n} > 0$. Тогда (1)

можно записать в виде $0 \leq u_n \leq e^{n \ln \left(1 - \frac{q \ln n}{n}\right)}$. Применяя формулу Тейлора

к функции $\ln \left(1 - \frac{q \ln n}{n}\right)$, получим:

$$\ln \left(1 - \frac{q \ln n}{n}\right) = -\frac{q \ln n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{q \ln n}{n}\right)^2 + o \left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Значит,

$$0 \leq u_n \leq e^{-q \ln n - \frac{(q \ln n)^2}{2n} + o \left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)}.$$

Так как

$$e^{-q \ln n - \frac{(q \ln n)^2}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = \frac{1}{n^q} e^{-\frac{(q \ln n)^2}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)},$$

по формуле Тейлора для экспоненты получим:

$$e^{-\frac{(q \ln n)^2}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = 1 - \frac{(q \ln n)^2}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) < 1,$$

откуда заключаем, что $u_n \leq \frac{1}{n^q}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть теперь $\left(1 - \sqrt[n]{u_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leq 1$, или $u_n \geq \left(1 - \frac{q \ln n}{n}\right)^n$. Применяя схему,

изложенную выше, находим: $u_n \geq \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$. Из сравнения

с гармоническим рядом делаем вывод, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Теорема доказана.

Пример 1. Исследуйте вопрос сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Решение. В данном случае непросто подобрать подходящий признак сходимости. Попробуем использовать признак Жамэ. Составим выражение

$$\left(1 - \sqrt[n]{u_n}\right) \frac{n}{\ln n} :$$

$$\left(1 - \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}}\right) \frac{n}{\ln n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}}}{\frac{\ln n}{n}}.$$

Найдем его предел, используя правило Лопиталья–Бернулли (предварительно следует убедиться, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} = 1$). Так как

$$\frac{\left(1 - \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}}\right)'}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)'} = -\frac{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} \left(\frac{1 - \ln n}{n^2} \ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1 - \ln n}{n^2}} = -\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} \frac{(1 - \ln n) \ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) - 1}{1 - \ln n}$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \ln n) \ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) - 1}{1 - \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) - \frac{(1 - \ln n)}{n \ln n}}{-\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) + \frac{1}{\ln n} - 1 \right) = -\infty, \end{aligned}$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} \frac{(1 - \ln n) \ln\left(\frac{1}{\ln n}\right) - 1}{1 - \ln n} \right) = +\infty$, значит, выражение

$\left(1 - \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{n}}\right) \frac{n}{\ln n} \geq q > 1$, начиная с некоторого n . Таким образом, исследуе-

мый ряд сходится.

З а м е ч а н и е 1. Посредством применения признака сравнения доказать сходимость данного ряда гораздо проще, для этого достаточно убедиться, что

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}.$$

Это объясняет, почему признак Жамэ используется довольно редко.

2. Признак Ермакова. Данный признак имеет примерно ту же область применения, что и интегральный признак Коши, однако его формулировка не содержит понятия интегрального исчисления.

Т е о р е м а 2.6.2 (признак Ермакова). Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонно убывает для¹⁹ $x > 1$. Тогда если для достаточно больших x (например, для $x \geq x_0$) выполняется неравенство

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q < 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если же

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \geq 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняется первое неравенство. Тогда для $x \geq x_0$, применяя подстановку $t = e^u$, будем иметь

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(e^u) \cdot e^u du = q \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

отсюда

$$\begin{aligned} (1-q) \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt &\leq q \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \right) \leq \\ &\leq q \left(\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt - \int_x^{e^x} f(t) dt \right) \leq q \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt, \end{aligned}$$

¹⁹ Начальным значением номера n может быть и любое другое натуральное число m . Тогда и функцию $f(x)$ необходимо рассматривать при $x \geq m$.

так как $e^x > x$, и вычитаемое в последних скобках положительно. В таком случае

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{q}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt.$$

Прибавляя к обеим частям интеграл $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt$, получим

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{1}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = L,$$

а учитывая, что $e^x > x$, найдем оценку $\int_{x_0}^x f(t) dt \leq L$ для $x \leq x_0$. С возрастанием x возрастает и интеграл, но благодаря полученной оценке интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t) dt \text{ конечен, следовательно, сходится и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Пусть теперь имеет место второе неравенство. Тогда

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^x f(t) dt. \text{ Прибавляя к обеим частям интеграл } \int_x^{e^{x_0}} f(t) dt, \text{ будем}$$

иметь

$$\int_x^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt = \gamma > 0,$$

поскольку $e^{x_0} > x_0$. Определим последовательность $\{x_n\}$, полагая

$$x_n = e^{x_{n-1}}. \text{ Из доказанного следует } \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \geq \gamma, \text{ значит,}$$

$\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \geq n\gamma$. Ясно, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл $\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt$ рас-

ходится, что влечет расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Функция e^x , фигурирующая в признаке Ермакова, может быть заменена любой другой функцией $\varphi(x)$, монотонно возрастающей, положительной, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющей неравенству $\varphi(x) > x$. В этом случае доказательство может быть скопировано с приведенного выше. Таким образом, признак Ермакова является источником для получения ряда конкретных признаков, отвечающих различному выбору функций $\varphi(x)$.

Пример 2. Проиллюстрируем применение признака Ермакова для исследования обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p > 0$.

Решение. Соотношение $\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)}$ в данном случае принимает вид

$\frac{x}{e^{(p-1)x}}$. При $p > 1$ будем иметь $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{(p-1)x}} = 0$, значит, данный ряд сходится.

Если же $p \leq 1$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{(p-1)x}} = +\infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится. Заметим, что в данном случае не требуется прибегать к вычислению несобственного интеграла или нетривиальной технике оценок, как было сделано ранее (см. п. 2.1 и п. 2.4).

Как видим, известно немало признаков сходимости рядов с положительными членами. Некоторые из них, кроме перечисленных в настоящем разделе, включены в упражнения для самостоятельной работы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Применяя признак Жамэ, покажите расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.
2. Докажите *логарифмический признак* сходимости числовых рядов: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами сходится, если существует $\alpha > 0$ такое,

что $\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ при $n > n_0$, и расходится, если $\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leq 1$ при $n > n_0$.

3. Применяя логарифмический признак, исследуйте сходимость следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln \alpha} \quad (\alpha > 0); \quad 2) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$$

Ответы: 1) сходится при $\alpha < \frac{1}{e}$; 2) сходится; 3) расходится.

4. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln \alpha}$ ($\alpha > 0$), применяя признак Ермакова.

5. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими

членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. *Указа-*

ние: получите оценки снизу и сверху для частичной суммы S_{2^k} ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

и воспользуйтесь простым признаком сравнения.

Примените установленное утверждение для исследования сходимости следующих рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^p} \quad (p > 0); \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n} \quad (p > 0, q > 0).$$

Ответы: 1) *расходится*; 2) *расходится*; 3) *сходится при $p > 1$ и при $p = 1, q > 1$, в остальных случаях расходится.*

6. Докажите *признак Н.А. Сапогова*: если $\{a_n\}$ – положительная монотонно возрастающая последовательность, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$, равно как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$, сходится при условии ограниченности этой последовательности и расходится – в противном случае.

3. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

3.1. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница

О п р е д е л е н и е. Числовой ряд называется *знакопеременным*, если знаки его членов могут меняться с изменением номера члена ряда.

Знакопеременными являются, к примеру, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{n}$.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

О п р е д е л е н и е. *Знакочередующимся* называется ряд, члены с четными номерами которого имеют один знак, а с нечетными номерами – другой.

При анализе знакочередующегося ряда можно рассматривать лишь ситуацию, когда его члены с нечетными номерами положительны, а с четными – отрицательны (если это не так, следует умножить их на -1 , что не повлияет на сходимость данного ряда).

О п р е д е л е н и е. Пусть последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает, при этом $u_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (1)$$

называется *знакочередующимся рядом Лейбница*.

Т е о р е м а 3.1.1 (признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда). В условиях, перечисленных для последовательности $\{u_n\}$, ряд (1) всегда сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1) сходится.

Рассмотрим сначала подпоследовательность $\{S_{2n}\}$. Она возрастает и ограничена сверху, поскольку в силу убывания $\{u_n\}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ верны оценки

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq S_{2n}$$

и

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} < u_1.$$

Можем заключить, что $\{S_{2n}\}$ сходится.

Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Итак, для произвольного $\forall \varepsilon > 0$ имеем:

$$(\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow |S_{2n} - S| < \varepsilon)$$

и

$$(\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow |S_{2n+1} - S| < \varepsilon).$$

Значит, для всех номеров $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ величина $|S_n - S|$ может быть сколь угодно мала, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Последовательность $\{S_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Пример 1. Применяя признак Лейбница, покажите сходимость ряда:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$$

Решение. 1) Ряд порожден последовательностью $\{u_n\}$, где $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Все ее члены, очевидно, положительны. Кроме того, $\{u_n\}$ монотонно убывает.

вает, так как $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ для любого номера n , и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Все

условия теоремы 3.1.1 выполнены, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится.

2) В данном случае $u_n = \frac{1}{n - \ln n} > 0$. Проверим выполнение остальных условий признака Лейбница. Убывание последовательности $\{u_n\}$ равносильно выполнению соотношения $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{(n+1) - \ln(n+1)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, которое немедленно вытекает из неравенства $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \ln 2 < 1$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} = 0,$$

поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ сходится.

З а м е ч а н и е 1. Требование монотонного убывания последовательности $\{u_n\}$ в теореме 3.1.1 существенно. Рассмотрим, например, знако-

чередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$, общий член которого стремится к нулю.

Он расходится как сумма сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (см. пример 1 текущего пункта) и расходящегося гармонического ряда. При этом разность

$$u_n - u_{n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + 1}{n(n+1)}$$

меняет знак в зависимости от четности n , т.е. монотонность убывания $\{u_n\}$ нарушается всякий раз при переходе от u_n к u_{n+1} .

З а м е ч а н и е 2. В ходе доказательства теоремы 3.1.1 было показано, что последовательность $\{S_{2n}\}$ является неубывающей. Аналогично можно установить, что последовательность $\{S_{2n+1}\}$ не возрастает:

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} \leq S_{2n-1}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, для знакочередующегося ряда Лейбница справедливы неравенства

$$S_{2n} \leq S \quad \text{и} \quad S \leq S_{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

З а м е ч а н и е 3. Из признака Лейбница вытекает следующая оценка для сходящегося знакочередующегося ряда:

$$|R_n| \leq u_{n+1}, \tag{2}$$

т.е. абсолютная величина n -го остатка ряда не превосходит $n+1$ -го его члена.

Действительно, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S$. Тогда в силу замечания 2 будем иметь оценки

$$|R_{2n}| = S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$$

и

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S_{2n+1} - S \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2},$$

откуда и следует (2).

Данный факт нередко используется для оценки погрешности при приближенном вычислении суммы ряда.

Пример 2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$ следует взять, чтобы вы-

числить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$?

Решение. Заданный ряд сходится, в чем нетрудно убедиться с помощью признака Лейбница, так что задача корректна. На основании (2) заключаем:

$$|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{10^3},$$

откуда находим, что $n \geq 999$. Итак, для обеспечения требуемой точности при вычислении суммы ряда достаточно взять 999 его членов.

З а м е ч а н и е 4. Использование в выкладках расходящихся рядов и действий над бесконечными суммами может приводить к парадоксам. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0, \end{aligned}$$

таким образом, заведомо положительная начальная сумма $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ «превратилась» в 0. Полученный результат объясняется тем, что в вычислениях фигурирует расходящийся гармонический ряд.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Применяя признак Лейбница, покажите сходимость данных рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n}}{n+20}.$$

2. Сколько членов ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ в следующем ряде:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} ?$$

Ответы: 1) 9; 2) 31; 3) 6.

3. Покажите расходимость рядов

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right).$$

Определите, какие условия признака Лейбница для них выполнены, а какие нарушены?

Ответ: в обоих случаях нарушено требование монотонного убывания порождающей ряд последовательности.

4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, то можно ли утверждать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ также сходится?}$$

Указание: рассмотрите примеры: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$.

Сделайте вывод, будет ли справедлив ли предельный признак сравнения для рядов с членами произвольного знака.

5. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Указание: воспользуйтесь равенством $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

3.2. Признаки Абеля и Дирихле

В данном разделе рассмотрим признаки сходимости, являющиеся более общими, чем установленный ранее признак Лейбница.

Нередко приходится иметь дело с суммами парных произведений вида

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Во многих случаях при этом оказывается полезным элементарное преобразование, называемое *преобразованием Абеля*²⁰.

Введем в рассмотрение суммы

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \dots, \quad B_m = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m.$$

Тогда, выражая множители β_i через эти суммы, будем иметь:

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \quad \dots, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Сумму S можно записать в виде

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \dots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}).$$

Если раскрыть скобки и перегруппировать члены, получим окончательную формулу:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а. Если множители α_i не возрастают (или не убывают), а все суммы B_i ограничены по абсолютной величине числом L :

$$|B_i| \leq L \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

то

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

²⁰ По имени норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802 – 1829 гг.).

Доказательство. Поскольку все разности в (1) одного знака, то

$$|S| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L + |\alpha_m| \cdot L = L \cdot (|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leq L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Лемма установлена.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно видеть, что если множители α_i не возрастают и положительны, то оценку можно упростить:

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L \cdot \alpha_1.$$

Применим полученные оценки для вывода признаков Абеля и Дирихле.

Т е о р е м а 3.2.1 (признак Абеля). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а числа a_n образуют монотонную ограниченную последовательность, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Пусть $|a_n| \leq K$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Согласно критерию сходимости числового ряда (см. теорему 1.2.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \right).$$

Оценим сумму $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^p a_{n+i} b_{n+i}$ с помощью леммы. В силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_1(\varepsilon)$, что для $n > N_1(\varepsilon)$ и всякого p будет выполняться неравенство

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Следовательно, в качестве L , упоминаемого в лемме, можно принять $\frac{\varepsilon}{3K}$.

Тогда при $n > N_1(\varepsilon)$ имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3K} (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq \frac{\varepsilon}{3K} \cdot 3K = \varepsilon,$$

значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2.2 (признак Дирихле²¹). Если частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, а числа a_n образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через B_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. По условию найдется такое $M > 0$, что $|B_n| \leq M$ для всякого номера n . Тогда справедлива оценка

$$|b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq 2M,$$

и в лемме можно положить $L = 2M$.

Кроме того, сходимость последовательности $\{a_n\}$ к нулю означает, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $\tilde{N}(\varepsilon)$, что для $n > \tilde{N}(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $|a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$.

Следовательно, при $n > \tilde{N}(\varepsilon)$ и $p = 1, 2, 3, \dots$,

²¹ По имени Иоганна Петера Густава Лежёна Дирихле (1805 – 1859 гг.), немецкого математика.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2M \left(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}| \right) \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Признак Абеля вытекает из признака Дирихле. В самом деле, из предположений Абеля следует, что последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a . Если переписать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ в виде суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то второй из них сходится по предположению, а к первому применим уже признак Дирихле.

З а м е ч а н и е 3. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда может быть получен как следствие признака Дирихле. Если числа a_n , монотонно убывая, стремятся к нулю, а $b_n = (-1)^{n-1}$, то условия теоремы 3.2.2, очевидно, выполнены. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

сходится.

Обратимся к примерам использования признаков Абеля и Дирихле.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Положим $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \cos n$. Тогда

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n \cos k \right| = \left| \frac{2 \sin \frac{1}{2} \cos 1 + \dots + 2 \sin \frac{1}{2} \cos n}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\left(\sin \frac{3}{2} - \sin \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) - \sin \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}},$$

а последовательность $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ монотонно стремится к нулю. В силу призна-

ка Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ сходится.

Пример 2. Выясним, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Последовательность $\left\{ \arccos \frac{1}{n} \right\}$ монотонна и ограничена,

так как $0 \leq \arccos \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, а сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ установлена в примере

1. На основании признака Абеля заключаем, что исследуемый ряд сходится.

З а м е ч а н и е 4. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$ можно доказать

и с помощью признака Дирихле. В таком случае ограниченность последо-

вательности $B_n = \sum_{k=1}^n \cos k$ и условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = 0$ видны непосредствен-

но, однако проверка монотонности последовательности $\left\{ \frac{\arccos \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \right\}$ доста-

точно громоздка. Проверка условий выполнения признака Абеля существенно проще.

В отличие от признака Лейбница в формулировках признаков Абеля и Дирихле формально не указано, что рассматриваемые ряды имеют члены разных знаков, однако область их применения – именно такие ряды. Действительно, в силу условия монотонности члены последовательности $\{a_n\}$ в обоих этих признаках могут без ограничения общности считаться положительными. Если и члены последовательности $\{b_n\}$ неотрицательны, то ограниченность последовательности $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентны. Поскольку тогда

$a_n b_n = O(b_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ обеспечивается про-

сто признаком сравнения. Если же в основе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ или ограниченности последовательности $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ лежит взаимное погашение положительных и отрицательных членов последовательности $\{b_n\}$, то именно признаки Абеля и Дирихле позволяют установить сходимость соответствующих рядов.

На практике при обращении к признакам Абеля и Дирихле в качестве последовательности $\{b_n\}$ чаще всего выбирают или последовательность $\{(-1)^{\varphi(n)}\}$, или одну из последовательностей $\{\cos n\alpha\}$ и $\{\sin n\alpha\}$.

Ограниченность последовательности $\left\{ \sum_{q=1}^n (-1)^{\varphi(q)} \right\}$ при заданной функции

$\varphi(n)$ устанавливается непосредственно.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Применяя признаки Абеля или Дирихле, покажите, что данные ряды сходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2};$$

$$2) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{\pi}{3}\right)}{n - \ln^2(n+2)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$6) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n};$$

$$7) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n+2) \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n^2 - n + 1};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$

2. Установите расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \sin n) \sin n}{n}$. Какие условия признака Дирихле для него не выполнены?

Указание: представьте заданный ряд в виде разности рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$. Покажите, применяя признак Дирихле, что

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ сходятся. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$, а значит, и исследуемый ряд – расходящиеся.

3.3. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов

О п р е д е л е н и е. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. В противном случае говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *абсолютно расходится*.

Таким образом, исследование ряда на абсолютную сходимость сводится к анализу соответствующего ряда с неотрицательными членами. К последнему можно применять все признаки сходимости, рассмотренные ранее.

О п р е д е л е н и е. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, но расходится абсолютно, его называют *условно сходящимся*.

Пример 1. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ сходится абсолютно, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – условно.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения: $\left| \frac{\sin n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ сходится абсолютно.

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ абсолютно расходится.

Но как знакочередующийся ряд, он сходится по признаку Лейбница. Значит, это условно сходящийся ряд.

Т е о р е м а 3.3.1 (критерий абсолютной сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда для любого положитель-

ного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любых натуральных чисел p и n , $n > N(\varepsilon)$, справедливо неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon$.

Приведем формальную запись критерия:

$$\begin{aligned} & \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится абсолютно} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о немедленно следует из критерия Коши сходимости числового ряда и определения абсолютной сходимости ряда.

Т е о р е м а 3.3.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то он является сходящимся и в обычном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то на основании теоремы 3.3.1 заключаем:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \right).$$

Но по свойству модуля $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|$, следовательно,

$$\left(\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \right),$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по критерию Коши. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Обратное утверждение неверно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится, но расходится абсолютно (см. пример 1 текущего пункта).

З а м е ч а н и е 2. На абсолютно сходящиеся ряды можно перенести и другие утверждения, ранее сформулированные для сходящихся рядов.

К примеру, если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно, то для любых чи-

сел μ и λ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu u_n + \lambda v_n)$ тоже будет абсолютно сходящимся.

Пример 2. Выясните, сходятся данные ряды абсолютно, условно или же расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+5(-1)^n}{10}\right)^n; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Решение. 1) Сначала узнаем, сходится ли данный ряд абсолютно.

Так как $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{2}}$. Сравнивая его с гармоническим рядом, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{2}} : \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, заданный ряд абсолютно расходится.

Проверим теперь выполнение требований признака Лейбница: последовательность $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$ монотонно убывает, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$, значит, ряд сходится. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin \frac{1}{n}$ – условно сходящийся.

2) Будем действовать по аналогии с предыдущей задачей. Рассмотрим

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4+5(-1)^n}{10} \right|^n$ и применим к нему радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{4+5(-1)^n}{10}\right|^n} = \left|\frac{4+5(-1)^n}{10}\right| \leq \frac{9}{10} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+5(-1)^n}{10}\right)^n$ сходится абсолютно.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$ расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости.

Пример 3. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – условно сходящийся ряд и $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| + a_k}{2}$, $N_n = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k| - a_k}{2}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

Решение. Заметим, что $\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{\bar{S}_n - S_n}{\bar{S}_n + S_n}$, где S_n и $\bar{S}_n$ –

n -е частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ соответственно. По условию

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится не абсолютно, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = +\infty$. Исходя

из свойств пределов, заключаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n - S_n}{\bar{S}_n + S_n} = 1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Выясните, сходятся данные ряды абсолютно, условно или же расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln^2(n+1)}{2^n + 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + n});$$

$$\begin{aligned}
3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}; & \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{arccctg} n}{\sqrt{n}}; \\
5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; & \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-3n+1} \right).
\end{aligned}$$

Ответы: 1) сходится абсолютно; 2) расходится; 3) сходится условно; 4) сходится абсолютно; 5) сходится условно; 6) расходится.

2. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость при различных значениях x ряды $(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ и $(B) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

Ответ: ряд (A) сходится условно при любом x , не равном целому отрицательному числу; (B) сходится абсолютно при $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k — целое), сходится условно при $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$.

3. Покажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

4. Покажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ также абсолютно сходится.

5. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Указание: из неравенства $\frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2} \geq \frac{|a_n|}{n}$ вытекает абсолютная сходимость исследуемого ряда.

3.4. Теоремы о перестановке членов числового ряда

Рассмотрим сначала абсолютно сходящиеся ряды и представим некоторые их свойства, связанные с перестановкой членов ряда.

Т е о р е м а 3.4.1 (о представлении суммы абсолютно сходящегося ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то его сумма S есть разность суммы ряда, получающегося из $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием отрицательных членов, и суммы ряда, получающегося из $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием положительных членов, при этом оставшиеся члены берутся по модулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряды $(\tilde{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ и $(\bar{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$. Заметим, что $(\tilde{u})$ получен из $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ заменой отрицательных членов нулями. В свою очередь ряд $(\bar{u})$ составляют взятые по модулю отрицательные члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а его положительные члены обнуляются.

При этом $\left| \frac{|u_n| \pm u_n}{2} \right| \leq |u_n|$, следовательно, ряды $(\tilde{u})$ и $(\bar{u})$ абсолютно сходятся. Так как $u_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} - \frac{|u_n| - u_n}{2}$, немедленно получаем необходимое. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. На основании теоремы 3.4.1 можем утверждать следующее: абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равносильна одновременной сходимости рядов $(\tilde{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ и $(\bar{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$. Необходимые условия этого показаны выше, достаточные же следуют из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|u_n| + u_n}{2} + \frac{|u_n| - u_n}{2} \right),$$

откуда ясно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ есть сумма сходящихся рядов $(\tilde{u})$ и $(\bar{u})$.

Отметим здесь же, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то оба ряда $(\tilde{u})$ и $(\bar{u})$ расходятся. Действительно, одновременно сходиться они не могут, иначе ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно (см. выше). Если же сходится только один из этих рядов, то в силу равенства $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|u_n| + u_n}{2} - \frac{|u_n| - u_n}{2} \right)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.

Таким образом, исследование абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого имеют произвольные знаки, можно свести к исследованию сходимости рядов $(\tilde{u})$ и $(\bar{u})$ с неотрицательными членами.

Пример 1. Докажите сходимость ряда $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ и найдите его сумму.

Решение. Данный ряд, очевидно, абсолютно сходится, поскольку его члены, взятые по модулю, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Для вычисления суммы ряда применим теорему 3.3.1. Суммируя сначала только положительные члены данного ряда, будем иметь:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^6} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots$$

Это сумма геометрической прогрессии, для которой $b_1 = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2^3}$, ее значение

$S_1 = \frac{12}{7}$. Найдем теперь сумму модулей отрицательных членов ряда:

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots$. Это вновь геометрическая прогрессия с суммой $S_2 = \frac{2}{7}$.

Итак, сумма данного ряда равна $S_1 - S_2 = \frac{12}{7} - \frac{2}{7} = \frac{10}{7}$.

Пример 2. Выясните, сходится ли ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$.

Решение. Воспользуемся утверждением, содержащимся в замечании 1. Рассмотрим ряды $(\tilde{u}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$ и $(\bar{u}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$. Сравнивая их с гармоническим рядом, нетрудно убедиться в расходимости обоих. Значит, заданный ряд сходится, причем условно²².

З а м е ч а н и е 2. В примере 2 мы лишь показали, что заданный ряд сходится. Если требуется вычислить его сумму, можно действовать так. Применим сочетательное свойство сходящегося ряда (см. теорему 1.3.3):

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Представим частичные суммы ряда в виде $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ и воспользуем-

ся результатами примера 4, рассмотренного в п. 2.4, где было показано, что

последовательность $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ сходится. Обозначив ее предел

через A , будем иметь: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = A + \ln n$. В таком слу-

чае сумма исследуемого ряда есть

²² Доказать условную сходимость данного ряда можно иначе, используя схему, рассмотренную в п. 3.2.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \ln 2n + A - \ln n - A = \ln 2.$$

Итак, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$.

Т е о р е м а 3.4.2 (о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то ряд, получаемый из него произвольной перестановкой членов, также будет абсолютно сходящимся, при этом его сумма S останется такой же, как у исходного ряда.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть сначала все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны. Обозначим ряд, полученный в результате перестановки его членов, через $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n$ и рассмотрим его k -ю частичную сумму:

$$\bar{S}_k = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_k = u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_k}.$$

Выберем номер n_0 превышающим все номера n_1, n_2, n_k . Тогда $\bar{S}_k \leq S_{n_0}$,

где S_{n_0} — соответствующая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Поскольку ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $S_{n_0} \leq S$, значит, $\bar{S}_k \leq S$. Последовательность частичных

сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n$ ограничена сверху, следовательно, он сходится и имеет

сумму $\bar{S} \leq S$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также получается из $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n$ перестановкой членов,

поэтому, повторив рассуждения, придем к соотношению $S \leq \bar{S}$.

Итак, $\bar{S} = S$.

2) Пусть теперь $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд с произвольными членами. Так как он абсолютно сходится, то из 1) следует, что $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ при любой перестановке членов сохранит сходимость. Значит, ряд, полученный в результате перестановки членов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, останется абсолютно сходящимся. При этом по теореме 3.3.1 его сумма S будет равна разности сумм S' и S'' соответственно рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ с неотрицательными членами. Перестановка членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ вызовет в них перестановку членов, но не отразится, как было показано в 1), на значениях S' и S'' . Таким образом, значение S останется прежним. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 3.3.2 означает, что абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.

Пример 3. Докажите сходимость ряда $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - \frac{11}{32} + \dots$ и найдите его сумму.

Решение. Найдя общий член данного ряда, перепишем его в виде $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$. Он абсолютно сходится, поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ является сходящимся (это можно показать, например, с помощью радикального признака Коши). Для вычисления суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$, представим его в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Сумму S_1 ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ найдем как сумму геометрической прогрессии, для которой $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$. Получим, что $S_1 = \frac{2}{3}$. Сумму же ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ вычислим, переставив его члены соответствующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} - \frac{5}{2^5} + \dots = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots \right) + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots \right) + \dots = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2^2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{2^3}}{1 + \frac{1}{2}} + \dots = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Представленные вычисления основаны на применении теоремы 3.3.2. В остальном использовалась лишь формула суммы геометрической прогрессии.

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) + \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$

то сумма данного ряда равна $\frac{2}{9}$.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 3.4.2 оправдывает появление термина «условная сходимость» для рядов, которые не являются сходящимися абсолютно. Подробная информация по данному вопросу включена в Приложение 4.

Т е о р е м а 3.4.3 (Римана²³). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то для любой точки B расширенной числовой прямой найдется такая перестановка его членов, что вновь образованный ряд будет сходиться к B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем, когда B – положительное число, поскольку остальные случаи рассматриваются аналогично.

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$, содержащие соответственно только положительные или только отрицательные его члены, расходятся (см. замечание 1). Найдем номер N_1 , при котором частичная сумма $u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1}^+ > B$. Это всегда возможно, так как расходуется последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$. Условимся также, что такое N_1 – наименьшее, т.е. $u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1-1}^+ < B$. Таким образом,

$$0 < B - (u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1-1}^+) < u_{N_1}^+.$$

Теперь будем последовательно добавлять слагаемые $u_1^-, u_2^-, \dots, u_{N_2}^-$ к сумме $u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1}^+$ до тех пор, пока не выполнится неравенство $u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1}^+ + u_1^- + u_2^- + \dots + u_{N_2}^-$. При этом

$$0 > B - (u_1^+ + u_2^+ + \dots + u_{N_1}^+ + u_1^- + u_2^- + \dots + u_{N_2-1}^-) > u_{N_2}^-.$$

Продолжаем этот процесс, поочередно добавляя к частичной сумме члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ так, чтобы получающиеся в результате суммы становились то больше, то меньше B , причем разность этих сумм и B по абсолютной величине не превосходила бы модуля последнего из добавляемых чи-

²³ По имени Георга Фридриха Бернхарда Римана (1826 – 1866 гг.), немецкого математика, механика и физика.

сел. Поскольку члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ берутся подряд, каждый из них на некотором шаге окажется добавлен, т.е. все члены исходного ряда будут учтены. Получается, что при формировании суммы мы произвели перестановку членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, который сходится, значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Следовательно, формируемая сумма на определенном шаге будет сколь угодно мало отличаться от B , и получаемый ряд будет сходиться к B . Теорема доказана.

Пример 4. Проиллюстрируем теорему Римана, переставив члены условно сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$, рассмотренного ранее в примере 2, следующим образом: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ (за двумя положительными членами – один отрицательный). Найдём сумму полученного ряда.

Решение. Ряд $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ сходится условно в силу замечания 1, поскольку ряды

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся.

Применим к заданному ряду сочетательное свойство:

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \dots$$

В таком случае

$$S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Следовательно²⁴,

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, перестановка членов ряда привела к увеличению его первоначальной суммы в полтора раза.

З а м е ч а н и е 4. Теоремы, рассмотренные в данном разделе, подчеркивают тот факт, что условная сходимость ряда осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных его членов и потому существенно зависит от их порядка, в то время как абсолютная сходимость основана на быстроте убывания членов ряда и от порядка их следования не зависит.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите суммы следующих рядов (убедившись предварительно в их сходимости):

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right); \quad (\text{ответ: } \frac{2}{3})$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right); \quad (\text{ответ: } \frac{3}{4})$$

²⁴ В замечании 2 текущего пункта было показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \ln 2$.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{2^n}; \quad (\text{ответ: } -\frac{2}{7})$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (|xy| < 1). \quad (\text{ответ: } \frac{1+y}{1-xy})$$

2. Докажите сходимость заданных рядов и найдите их суммы:

$$1) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$2) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots;$$

$$3) \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$4) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots$$

Ответы, указания: 1) $S = \frac{1}{2} \ln 2$, $S_{3n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$;

$$2) S = \frac{1}{2} \ln 6, \quad S_{5n} = \sum_{k=1}^{6n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k},$$

$$3) S = 1 + \frac{1}{2} \ln 2, \quad S_{3n} = 1 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{4n+4} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k};$$

$$4) S = 0, \quad S_{5n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k}.$$

3. Докажите, что сумма сходящегося ряда не изменится, если его члены переставить таким образом, что номер каждого члена изменится не больше, чем на m , где m – некоторое заданное число.

3.5. Умножение числовых рядов

Т е о р е м а 3.5.1 (об умножении абсолютно сходящихся рядов²⁵).

Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно. Тогда числовой ряд, составленный из всевозможных попарных произведений вида $u_i v_j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) членов данных рядов, также будет абсолютно сходящимся, при этом его сумма будет равна произведению сумм данных рядов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (U^*)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + \dots \quad (V^*)$$

сходятся, т.е. имеют конечные суммы, скажем, U^* и V^* .

Расположив произведения $u_i v_j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) произвольным образом в виде последовательности, составим из них ряд:

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_{i_s} v_{j_s} = u_{i_1} v_{j_1} + u_{i_2} v_{j_2} + \dots + u_{i_s} v_{j_s} + \dots$$

Чтобы доказать сходимостъ соответствующего ряда из абсолютных величин:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |u_{i_s} v_{j_s}| = |u_{i_1} v_{j_1}| + |u_{i_2} v_{j_2}| + \dots + |u_{i_s} v_{j_s}| + \dots,$$

рассмотрим его s -ю частичную сумму. Если через k обозначить наибольший из индексов $i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_s, j_s$, то, очевидно,

$$|u_{i_1} v_{j_1}| + |u_{i_2} v_{j_2}| + \dots + |u_{i_s} v_{j_s}| \leq$$

²⁵ Данная теорема открыта Коши.

$$\leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_k|) \cdot (|v_1| + |v_2| + \dots + |v_k|) \leq U^* \cdot V^*.$$

Отсюда по теореме 2.1.1 вытекает сходимость ряда $\sum_{s=1}^{\infty} |u_{i_s} v_{j_s}|$, а следовательно, и абсолютная сходимость ряда $\sum_{s=1}^{\infty} u_{i_s} v_{j_s}$.

Остается определить его сумму. Поскольку ряд $\sum_{s=1}^{\infty} u_{i_s} v_{j_s}$ абсолютно сходится и обладает переместительным свойством, мы вправе придать его членам наиболее удобное расположение. Объединим члены ряда в последовательные группы:

$$(u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_3 + u_3 v_2 + u_3 v_1) + \dots \quad (UV)$$

Если через S_n и $\bar{S}_n$ обозначить соответственно n -е частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то для ряда (UV) частичные суммы будут равны

$$S_1 \bar{S}_1, S_2 \bar{S}_2, S_3 \bar{S}_3, \dots, S_n \bar{S}_n, \dots;$$

они стремятся к произведению сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, которое, таким образом, является суммой ряда (UV) , а также ряда $\sum_{s=1}^{\infty} u_{i_s} v_{j_s}$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, где $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$ называют *произведением* этих рядов в *форме Коши*.

В силу теоремы Коши из абсолютной сходимости двух рядов следует и сходимость их произведения в форме Коши. Однако произведение рядов в форме Коши сходится и при более слабых условиях на сомножители.

Т е о р е м а 3.5.2 (Мертенса). Если из двух сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ хотя бы один сходится абсолютно, то их произведение в форме Коши сходится и его сумма равна произведению сумм сомножителей.

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы можно найти, например, в [9, с. 357].

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие обращение к теоремам Коши и Мертенса.

Пример 1. Найти произведение (по Коши) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ на себя, если $|a| < 1$, и указать сумму получившегося ряда.

Решение. Данный ряд сходится абсолютно, поскольку $|a| < 1$, а его сумма равна $\frac{1}{1-a}$ как сумма соответствующей геометрической прогрессии. Исходя из определения, общий член ряда, получающегося в результате умножения, равен $w_n = 1 \cdot a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + \dots + a^{n-1} \cdot 1 = na^{n-1}$. Таким образом, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$, при этом $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$.

Пример 2. Найти произведение (по Коши) рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$, где $|a| < 1$, и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, а также указать сумму получившегося ряда.

Решение. Оба данных ряда сходятся, причем $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ — абсолютно,

значит, теорема Мертенса применима. Общий член ряда, полученного в результате умножения, равен

$$w_n = 1 \cdot \frac{(-1)^n}{n} + a \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \dots + a^{n-1} \cdot 1 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} a^{n-k}}{k},$$

следовательно, будем иметь: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} a^{n-k}}{k} \right) = \frac{\ln 2}{1-a}.$

З а м е ч а н и е 1. Теорема Коши дает только достаточное условие абсолютной сходимости произведения рядов в форме Коши. Для иллюстрации этого найдем произведение расходящихся рядов $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n$

и $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right).$ Общий член получающегося в результате ряда есть

$$\begin{aligned} w_n &= \left(\frac{3}{2} \right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-3} \left(2^{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \dots - \left(\frac{3}{2} \right)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^{n-2} \left(\left(2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 1 \right) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \dots - \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

так как

$$2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 1 = 2^{n-2} (2-1) - 2^{n-3} - \dots - 1 = 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 1 = \dots = 1,$$

и

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \dots - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поскольку $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{2^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится, причем абсолютно.

Точно так же и теорема Мертенса дает только достаточное, но не необходимое условие сходимости произведения рядов в форме Коши даже при условии сходимости каждого из сомножителей.

Пример 3. Покажем, что результатом умножения на себя неабсолютно сходящегося ряда может быть как сходящийся, так и расходящийся ряд.

Решение. 1) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, сходящегося условно, его произведение на себя в форме Коши есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, где

$$\begin{aligned} w_n &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{q(n-q+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right) = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n-q+1}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^n \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ – знакочередующийся, причем при возрастании n величина $|w_n|$ стремится к нулю²⁶, монотонно убывая, так что по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится.

²⁶ Легко обосновывается обращением к формуле Эйлера: $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$, в которой $\gamma = 0,5772\dots$ есть постоянная Эйлера – Маскерони.

2) Рассмотрим теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, также сходящийся условно. Его

произведение на себя в форме Коши – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, в котором

$$w_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{q}\sqrt{n-q+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{q}\sqrt{n-q+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1,$$

то $|w_n| \geq 1$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ расходится.

З а м е ч а н и е 2. В приведенном примере было показано, что произведение по Коши ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ на себя сходится. Зная, что сумма ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ равна $-\ln 2$ (см. замечание 2 п. 3.3), можно ли, не прибегая к до-

полнительным вычислениям, найти сумму ряда, полученного в результате умножения? Теорема Мертенса в данном случае неприменима, однако соответствующий вывод позволяет сделать следующая теорема:

Т е о р е м а А б е л я. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и их произведение в форме Коши $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Таким образом, умножая по Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ на себя, получим ряд с суммой $\ln^2 2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

(произведения рядов предполагаются вычисленными в форме Коши)

1. Найдите сумму ряда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \right)$. Ответ: $-\frac{1}{2} \ln 2$.

2. Покажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

Указание: покажите, что для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ его общий

член имеет вид $w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!}$. Убедитесь, что $w_1 = 1$, а $w_n = 0$

($n \geq 2$). Последнее можно сделать на основании формулы бинома Ньютона, применяемой к выражению $(1-1)^n$:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0.$$

3. Покажите, что $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ ($|q| < 1$). Используя полученный

результат, найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$. Ответ: $\frac{9}{4}$.

4. Покажите, что $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}$.

5. Докажите, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \quad (\beta > 0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha + \beta > 1$, и расходящийся, если $\alpha + \beta < 1$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Виноградова И. А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для ун-тов, пед. вузов: В 2 ч. / Под ред. В.А. Садовничего. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2001. – Ч. 2. – 712 с.
2. *Горячев А. П.* Специальные главы функционального анализа. Числовые и функциональные ряды: Учеб. пособие. – М.: МИФИ, 2013. – 272 с.
3. *Грачев Д. А.* Числовые ряды в вопросах и задачах: Учеб. пособие. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2013. – 50 с.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 558[2] с.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. Часть I: Учеб. для вузов. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.
6. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу: в 3 т. Т. 2. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 504 с.
7. *Попов И. Ю.* Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: Учеб. пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. – 680 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 2. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. – 864 с.
10. *Шварц Л.* Анализ. Том I. М.: Мир, 1972. – 824 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБ ИНЫХ СПОСОБАХ СУММИРОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Ранее (см. п. 1.1) мы определили сумму S ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ как значение предела последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм (при условии, что этот предел существует).

В ряде задач математического анализа, представляющих как теоретический, так и практический интерес, приходится оперировать с рядами, последовательность частичных сумм которых расходится, т.е. сумма в обычном смысле не существует. Естественно, возникает вопрос об обобщении понятия суммы ряда и о суммировании расходящегося в обычном смысле ряда с помощью каких-либо обобщенных методов. В настоящем приложении рассмотрим некоторые из таких методов.

Прежде всего дадим общую характеристику тем методам суммирования, которые будут рассматриваться. Разумно требовать, чтобы обобщенное понятие суммы включало в себя понятие суммы в обычном смысле. Это означает, что ряд, сходящийся к сумме S , должен иметь и обобщенную сумму, также равную S . Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется *регулярным*.

Далее естественно подчинить понятие обобщенной суммы следующему условию: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет обобщенную сумму S , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — обобщенную сумму S' , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, имеет обоб-

ценную сумму $\alpha S + \beta S'$. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется *линейным*.

В анализе и его приложениях, как правило, имеют дело лишь с регулярными и линейными методами суммирования. Представим один из них.

Метод Чезаро (метод средних арифметических). Говорят, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируем методом Чезаро, если существует предел средних арифметических сумм этого ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}. \quad (1)$$

При этом значение предела (1) называется *обобщенной в смысле Чезаро суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Линейность метода Чезаро очевидна. Его регулярность вытекает из факта, уже использованного нами ранее (см. п. 2.3): если некоторая последовательность $\{a_n\}$ сходится и имеет предел A , то такой же предел имеет и последовательность $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\}$.

Приведем примеры рядов, расходящихся в обычном смысле, но суммируемых методом Чезаро.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$. Поскольку

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n - \text{четное}, \\ \frac{n-1}{2} + 1, & n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2}$. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ суммируем методом Чезаро, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Считая, что x – любое фиксированное вещественное число из интервала $(0; 2\pi)$, покажем суммируемость методом Чезаро ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots$$

Найдем выражение для частичной суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$:

$$S_1 = \cos x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

$$S_2 = \cos x + \cos 2x = \frac{\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

$$\dots$$

$$S_n = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Заметим, что из выражения для n -й частичной суммы без труда усматривается факт расходимости исследуемого ряда. Подсчитаем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2n \sin \frac{x}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \frac{1}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (\cos kx - \cos (k+1)x) \right) - \frac{1}{2} = \\
&= \frac{\cos x - \cos (n+1)x}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, для ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$, расходящегося в обычном смысле, сумма по Чезаро равна $-\frac{1}{2}$.

Разумеется, существуют ряды, не суммируемые данным методом.

Пример 3. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

не суммируем методом Чезаро. Действительно,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & n - \text{четное}, \\ \frac{n+1}{2}, & n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

следовательно, предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ не существует.

З а м е ч а н и е 1. Определение метода средних арифметических, называемого также методом $(H, 1)$, дает возможность получить на его основе другие методы суммирования. Например, применяя метод $(H, 1)$

к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, в котором $\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$, т.е. находя средние арифмети-

ческие для средних арифметических, придем к исследованию ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n$,

где $\tau_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n}{n}$ и поиску предела $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$.

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируем методом $(H, 2)$, если существует предел $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$, при этом значение предела называется *обобщенной суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, найденной методом $(H, 2)$.

Рассуждая аналогично, можно получить метод $(H, 3)$ и так далее. Обычную сходимостъ тогда можно назвать методом $(H, 0)$. Отметим здесь же, что в понятии метода (H, α) значение α может не обязательно быть натуральным.

З а м е ч а н и е 2. Ряд, рассмотренный в примере 3, не суммируем методом $(H, 1)$, но суммируем методом $(H, 2)$, причем его сумма в данном случае равна $\frac{1}{4}$. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

является примером того, что не всякий линейный регулярный метод суммирует к ∞ ряды, для которых предел частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Видим, что методом $(H, 1)$ ряд вообще не суммируется, а методом $(H, 2)$ суммируется к конечному числу.

Существуют и другие методы обобщенного суммирования. Их детальное изложение можно найти, например, в следующей монографии: Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2010. – 504 с.

З а м е ч а н и е 3. Не все свойства сходящихся рядов сохраняются при обобщенном суммировании. Так, если в сходящийся ряд добавить нули, то ряд останется сходящимся, притом к той же сумме. Иначе может обстоять дело для расходящихся, пусть и суммируемых рядов. Действитель-

но, добавим в ряд, рассмотренный в примере 1, нули, поставив их после каждой пары слагаемых $+1-1$:

$$1-1+0+1-1+0+1-1+0+\dots$$

Нетрудно проверить, что для этого ряда

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \begin{cases} \frac{n}{3}, n = 3k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n-1}{3} + 1, n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n-2}{3} + 1, n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

Также отметим, что в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ можно добавить нули так, что полученный ряд вообще перестанет суммироваться методом средних арифметических.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТСУТСТВИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО РЯДА ДЛЯ СРАВНЕНИЯ

Докажем сначала, что не существует универсального сходящегося ряда. Пусть даны два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ с положительными членами; обозначим R_n и R'_n соответственно их n -е остатки. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ сходится медленнее, чем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{R'_n} = 0$.

Докажем, что для каждого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, сходящийся медленнее ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Положим $u'_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$ для $n \geq 2$ и $u'_1 = 0$, тогда при $n \geq 2$ будет верно равенство $R'_n = \sqrt{R_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{R'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\sqrt{R_n}} = 0$.

Докажем теперь отсутствие универсального сходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о сходимости произвольного ряда с неотрицательными членами. В самом деле, если бы такой универсальный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существовал, то, взяв для него построенный выше сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, мы получили бы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}) = 0.$$

Таким образом, из сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ нельзя сделать вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$.

Аналогично доказывается отсутствие универсального расходящегося ряда, сравнение с которым позволило бы сделать вывод о расходимости произвольного ряда с неотрицательными членами.

Это означает, что мы не можем провести четкую границу между сходящимися и расходящимися рядами.

ПРИЗНАК КУММЕРА

СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Данный признак носит имя немецкого математика Эрнста Эдуарда Куммера (1810–1893гг.), внесшего большой вклад в развитие теории чисел, геометрии, теоретической механики. В математическом анализе Э. Куммер продолжал, вслед за К. Гауссом, исследования гипергеометрических рядов.

Т е о р е м а (признак Куммера). Пусть $\{c_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Составим для исследуемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ последовательность

$$K_n = c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Если для всех номеров n , начиная с некоторого, выполняется неравенство $K_n \geq \delta$, где δ – постоянное положительное число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Если же $K_n \leq 0$ (для $n > N$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для всех номеров $n > N$

$$K_n = c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta > 0.$$

Умножением на u_{n+1} получим, что

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \geq \delta u_{n+1}. \quad (1)$$

Тогда $c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} > 0$ или $c_n u_n > c_{n+1} u_{n+1}$. Отсюда следует, что положительная последовательность $\{c_n u_n\}$ монотонно убывает и, значит, имеет конечный предел. В таком случае сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1})$, поскольку последовательность его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n (c_k u_k - c_{k+1} u_{k+1}) = c_1 u_1 - c_{n+1} u_{n+1} \text{ имеет конечный предел.}$$

Применяя простой признак сравнения, на основании (1) заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta u_{n+1}$, а с ним и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же для $n > N$

$$K_n = c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0,$$

то будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ по условию теоремы является расходящимся, то по теореме сравнения (см. п.2.2, задание 7 для самостоятельного решения) расходится и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В *предельной форме* признак Куммера выглядит так (условия, предполагаемые для $\{c_n\}$ остаются прежними): если после-

довательность $K_n = c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1}$ имеет предел K (конечный или нет), то

при $K > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $K < 0$ – расходится.

Продemonстрируем теперь, как при помощи признака Куммера получаются некоторые важные признаки сходимости.

1) П р и з н а к Д а л а м б е р а. Положим $c_n = 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ в этом случае расходится, а $K_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \frac{1}{q} - 1$ (отдельно заметим, что $K = +\infty$, если $q = 0$ и $K = -1$, если $q = +\infty$). При $q > 1$, очевидно, $K < 0$, и по признаку Куммера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; если же $q < 1$, то $K > 0$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) П р и з н а к Р а а б е. Если положить $c_n = n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а выражение $K_n = n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) = n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1$. В случае, когда при достаточно больших n выполняется неравенство $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq q > 1$, имеем: $K_n \geq q - 1 > 0$, и по признаку Куммера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Если же $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ для всех номеров n , начиная с некоторого, то $K_n \leq 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

3) П р и з н а к Б е р т р а н а (см. замечание 3 п.2.5). Пусть наконец, $c_n = n \ln n$ ($n \geq 2$), такой выбор допустим, поскольку ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходуется. В этом случае имеем:

$$K_n = n \ln n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1),$$

что можно также представить в виде:

$$K_n = \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = q > 1$, то $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = q - 1 > 0$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по признаку Куммера. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = q < 1$, то на основании аналогичных рассуждений заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Таким образом, подбирая соответствующие выражения для c_n , можно получать новые признаки сходимости рядов с положительными членами. В данном ключе признак Куммера следует рассматривать как общую схему получения конкретных признаков сходимости.

О СУЩНОСТИ ТЕРМИНОЛОГИИ, ИСПОЛЪЗУЕМОЙ ДЛЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Сходящийся знакопеременный ряд, как известно, может сходиться абсолютно или условно. И если понятие абсолютной сходимости ряда воспринимается естественно, поскольку в его определении присутствует модуль (т.е. абсолютная величина) общего члена ряда, то почему ряд, сходящийся неабсолютно, принято называть условно сходящимся? Попробуем пояснить это ниже.

Начнем с определений, подобные которым можно найти в ряде учебников и учебных пособий (см., например, [1, с. 18–19]).

О п р е д е л е н и е. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится неабсолютно*.

О п р е д е л е н и е. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *безусловно сходящимся*, если для любой перестановки $\varphi(n)$ натурального ряда $\mathbb{N}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ сходится.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится безусловно. Будем предполагать, что среди его членов есть как положительные, так и отрицательные. Выпишем сначала все положительные члены ряда до тех пор, по-

ка их сумма не превзойдет 1. Затем возьмем первый отрицательный член ряда. После этого из оставшихся положительных членов выберем подряд столько, чтобы получить сумму, большую 2. Затем снова добавим второй отрицательный член ряда (если он есть) и продолжим добавлять положительные числа, пока сумма не превзойдет 3 и т.д.

Если последовательность, составленная из положительных членов ряда, расходится, то проводимое нами построение можно продолжать неограниченно. Получаемый такой перестановкой ряд расходится, так как при любом $n \geq 0$ существуют его частичные суммы, превосходящие n . Поэтому, если ряд, составленный из положительных членов, расходится, то данный ряд безусловно сходить не может. Точно такие же рассуждения можно провести и в том случае, когда расходится подпоследовательность, составленная из отрицательных членов ряда. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может безусловно сходить только тогда, когда сходятся подпоследовательности положительных и отрицательных членов ряда, т.е. когда данный ряд сходится абсолютно, что было установлено в замечании 1 п. 3.4. Теорема доказана.

Итак, понятия абсолютной и безусловной сходимости ряда эквивалентны. Кроме того, из теоремы 3.4.2 нам известно, что сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка следования его членов. Такая формулировка удобна, если речь идет о сумме счетного множества чисел, нумерация которого еще не установлена или устанавливается произвольно.

В силу сказанного, для числовых рядов принято вместо термина «неабсолютная сходимость» использовать термин «условная сходимость». Для таких рядов справедлива теорема Римана, значит, их сходимость или расходимость всякий раз определяется условиями выбора положительных и отрицательных членов при суммировании.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В курсе математического анализа ряды являются эффективным средством изучения функций и мощным вычислительным аппаратом, позволяющим находить их значения, вычислять их интегралы и решать различные прикладные задачи. Поэтому знакомство студентов с теорией рядов – обязательная часть высшего математического образования.

Понятие бесконечных сумм было известно еще ученым Древней Греции. Они применяли «метод исчерпывания» при вычислении площадей фигур и поверхностей, объемов тел, длин кривых и т. д. Составной частью данного метода являлось нахождение суммы бесконечного множества слагаемых. Так, Архимед для вычисления площади сегмента параболы находил сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$.

Дальнейшее развитие теория рядов получила в XVII – XVIII вв. в связи с теорией приближенного представления функций в виде многочленов. Однако функция, представляемая рядом, тогда не называлась его суммой, и вообще в то время не было еще определено, что такое сумма ряда, были только попытки ввести это понятие.

То, что расходящийся ряд не имеет суммы, ученые стали предполагать только в XIX в., хотя в XVIII в. многие, и прежде всего Л. Эйлер, много работали над понятиями сходимости и расходимости. Он называл ряд сходящимся, если его общий член u_n стремился к нулю с возрастанием номера n . Однако это условие, как нам теперь известно, является лишь необходимым для сходимости ряда.

Л. Эйлер одним из первых начал развивать теорию расходящихся рядов и получил в ней немало существенных результатов. Однако эти результаты долго не находили применения. К слову, в 1826 году Нильс

Абель скептически называл расходящиеся ряды «дьявольским измышлением». Результаты Эйлера нашли обоснование лишь в конце XIX в. В современной же математике расходящиеся ряды занимают важное место.

В формировании понятия суммы сходящегося ряда большую роль сыграл французский ученый О.Л. Коши (1789–1857). Именно он заявил в 1826 г., что расходящийся ряд не имеет суммы. Он же сформулировал критерий сходимости числового ряда.

В 1768 г. французский математик Ж. Л. Даламбер исследовал отношение последующего члена к предыдущему в биномиальном ряде и показал, что если это отношение по абсолютной величине меньше единицы, то ряд сходится. В общем виде соответствующее утверждение было установлено в 1821 г. и известно сегодня как признак Даламбера. Затем были доказаны и другие признаки сходимости: Коши (радикальный и интегральный), Раабе, Куммера, Бертрана, Гаусса, образующие цепь усиливающихся, но при этом усложняющихся признаков сходимости рядов.

Названные признаки позволяли исследовать знакопостоянные ряды, однако не менее важны для практики знакочередующиеся ряды, сходимость которых изучается посредством признака Лейбница.

В современной теории рядов основными задачами являются:

- определение понятия суммы бесконечной последовательности слагаемых;
- установление признаков, по которым можно судить, имеет ли данный ряд сумму;
- выделение классов рядов, с которыми можно обращаться как с конечными суммами;
- приложения рядов.

И хотя в математическом анализе и физике функциональные, а не числовые ряды играют ключевую роль, именно числовые ряды служат

необходимой базой. В процессе их освоения приобретаются не только знания теоретических вопросов, связанных с классифицированием рядов различных типов и их исследованием, но и развиваются навыки творческого применения рядов к решению разнообразных задач математического анализа.

Учебное издание

Лариса Валерьевна Панкратова

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Компьютерная верстка, обложка *Р.В. Орлов*

ISBN 978-5-907208-35-3

Подписано в печать 09.10.2020.

Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 8,98.

Бумага типографская. Заказ №0910ЧР

Тираж 500 экз.

По вопросам приобретения
и издания литературы обращаться по адресу:
Издательство «Научно-инновационный центр»

ул. 9 Мая, 5/192, г. Красноярск, 660127 Россия

тел. +7 (923) 358-10-20

Электронная почта: monography@nkras.ru

Дополнительная информация на сайте: www.nkras.ru