ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

С. И. КАЛИНИН, Л. В. ПАНКРАТОВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

НАУЧНО-ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР
КРАСНОЯРСК, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

С. И. Калинин, Л. В. Панкратова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебное пособие

Научно-инновационный центр
Красноярск, 2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6
К17

Рецензенты:

Кафедра фундаментальной математики,
заведующий кафедрой **Вечтомов Е. М.,** д-р физ.-мат. наук, проф.,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вятский государственный университет»;
О.В. Чермных, канд. физ.-мат. наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вятский государственный университет»;
А. В. Ястребов, д-р пед. наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Калинин, С.И.
К17 **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**: учебное пособие / С.И. Калинин, Л.В. Панкратова. – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2020. – 114 с.

ISBN 978-5-907208-23-0
DOI: 10.12731/978-5-907208-23-0

В настоящем учебном пособии содержатся необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также достаточно подробные образцы решения различных типов таких уравнений. Кроме того, в нем формулируются задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профили Математика, Информатика).

ISBN 978-5-907208-23-0

© Калинин С. И.,
Панкратова Л. В., 2020
© Оформление.
Научно-инновационный центр, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

По замыслу авторов представляемое учебное пособие призвано способствовать усвоению изучающими курс «Дифференциальные уравнения» методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пособие состоит из нескольких разделов, традиционно рассматриваемых при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Каждый раздел пособия снабжен необходимым минимумом теоретических сведений, используемых в дальнейшем при рассмотрении соответствующих примеров и задач. Решения упражнений изложены исключительно подробно. Отдельное внимание уделяется развитию навыков обучающихся исследовать прикладные задачи с помощью дифференциальных уравнений.

Структура пособия предусматривает самостоятельную работу студентов по изучению данного курса, а также возможность контроля полученных знаний. Приложения содержат изрядную информацию по истории становления и развития теории дифференциальных уравнений, а также ряд небезынтересных фактов, связанных с ее творцами.

Данное учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (профили Математика, Информатика), однако оно может использоваться и другими категориями студентов-математиков.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением (о.д.у.) первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1. 1}$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция этой переменной, y' – производная от y по x, F – заданная функция трех независимых переменных.

Непрерывно дифференцируемая на некотором интервале $(a;b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение (1. 1) обращает его в тождество по x на $(a;b)$, называется *решением* этого уравнения.

График решения $y = y(x)$ о.д.у. (1. 1) есть его *интегральная кривая*.

Если уравнение (1. 1) удается записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

то последнее называют о.д.у., *разрешенным* относительно производной. Далее будем рассматривать именно такие уравнения.

Часть D плоскости Oxy, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна, называется *областью задания* о.д.у. (1.2).

Задачей Коши для уравнения (1.2) называется задача отыскания решения $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \qquad (x_0, y_0) \in D. \tag{1.3}$$

Условия (1.3) – *начальные условия*, а числа (x_0, y_0) – *начальные данные* задачи Коши (1.2) – (1.3).

Геометрическая трактовка задачи Коши – найти интегральную кривую о.д.у. (1.2), проходящую через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Говорят, что решение задачи Коши для уравнения (1.2) с начальными условиями (1.3) *единственно*, если существует такая окрестность точки x_0, что

1) в этой окрестности определено решение с начальными данными x_0, y_0;

2) не существует другого решения с начальными данными x_0, y_0, определенного в той же окрестности.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши (1.2) – (1.3).

ТЕОРЕМА. Если в области D плоскости Oxy функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны по совокупности аргументов, то существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$.

Пусть D есть область в плоскости Oxy, через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая о.д.у. (1.2). В дальнейшем такую область условимся называть областью существования и единственности решения задачи Коши или, более кратко, *областью существования и единственности* рассматриваемого уравнения.

Функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.4}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и непрерывно дифференцируемая по x, называется *общим решением* уравнения (1.2) в области D, если

1) равенство (1.4) разрешимо в D относительно C:

$$C = \psi(x, y); \tag{1.5}$$

2) функция (1.4) является решением о.д.у. (1.2) при всех значениях C, определяемых формулой (1.5), когда точка (x, y) пробегает область D.

Переменная C в (1.4) называется *произвольной постоянной (произвольной константой).*

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* о.д.у. (1.2).

Решение $y = y(x)$ уравнения (1.2) называется *частным*, если в каждой точке соответствующей ему интегральной кривой сохраняется единственность решения задачи Коши. Через каждую точку (x_0, y_0) такой кривой проходит единственная интегральная кривая уравнения (1.2). Решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения (1.4) фиксированием произвольной константы C, есть частное решение.

Говорят, что решение $y = y(x)$ уравнения (1.2) *особое*, если в каждой точке соответствующей ему интегральной кривой нарушается единственность решения задачи Коши.

Если функция $f(x, y)$ в правой части о.д.у. (1.2) непрерывна по x, y и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$.

Если в некоторых точках плоскости Oxy функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность, то в окрестности таких точек рассматривают «перевернутое» по отношению к (1.2) уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{1.6}$$

в котором считают x функцией от y. Совокупность таких точек присоединяют к области задания уравнения (1.2), а решения $x = x(y)$ уравнения (1.6) – к решениям о.д.у. (1.2).

Уравнениям (1.2) и (1.6) равносильно о.д.у. первого порядка в *дифференциальной форме*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1.7)$$

Оно не задано в тех точках (x,y), где непрерывные функции M и N обращаются в нуль одновременно. В уравнение (1.7) переменные x и y входят равноправно. При решении конкретных уравнений вида (1.7) часто бывает удобно в отличие от традиционных обозначений рассматривать переменную величину x как функцию от y.

Ниже в разделах 2–9 мы рассмотрим различные типы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, а также методы их решения.

2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение *с разделенными переменными* – это уравнение вида

$$M(x)dx = N(y)dy, \qquad (2.1)$$

где $M(x)$ и $N(y)$ – функции, зависящие только от x и y соответственно, являющиеся непрерывными при рассматриваемых значениях x и y. Общим интегралом такого уравнения является равенство

$$\int M(x)dx = \int N(y)dy + C,$$

в котором под выражениями $\int M(x)dx$, $\int N(y)dy$ понимаются произвольные первообразные функций M и N соответственно, C – произвольная постоянная.

П р и м е р 1. Общим интегралом о.д.у.

$$xdx + ydy = 0$$

в области $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$ является равенство

$$x^2 + y^2 = C. \qquad (2.2)$$

Действительно, $\int xdx + \int ydy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, следовательно, общим интегралом рассматриваемого уравнения является соотношение $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$, откуда, в силу произвольности константы C_1, следует (2.2).

П р и м е р 2. Уравнение

$$e^{-x^2} dx = \frac{dy}{y}$$

при $y \neq 0$ имеет общий интеграл

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \ln|y| + C.$$

Здесь в качестве первообразной функции e^{-x^2} взят интеграл с переменным верхним пределом $\int_0^x e^{-t^2} dt$, поскольку неопределенный интеграл от e^{-x^2} не выражается через элементарные функции.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (2.3)$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называется уравнением *с разделяющимися переменными*.

Умножением обеих частей этого уравнения на функцию

$$\frac{1}{M_2(x)N_1(y)} \qquad \left(M_2(x)N_1(y) \neq 0\right)$$

оно приводится к уравнению (2.1) с разделенными переменными. Поэтому общий интеграл уравнения (2.3) есть

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \qquad (2.4)$$

Если уравнения $M_2(x)=0$, $N_1(y)=0$ имеют действительные решения $x=a$ и $y=b$, то функции $x=x(y)=a \quad (y\neq b)$, $y=y(x)=b \quad (x\neq a)$, являясь решениями (2.3), могут не входить в общий интеграл (2.4) ни при каком конечном значении C, хотя при этом среди них могут быть частные решения (2.3). То есть последние при интегрировании оказываются потерянными. Точки вида $x=a$, $y=b$ исключаются на интегральных кривых, соответствующих решениям $x=x(y)=a$ и $y=y(x)=b$, так как в этих точках уравнение (2.3) не задано.

Необходимо отметить также, что среди решений $x=x(y)=a$ $(y\neq b)$, $y=y(x)=b$ $(x\neq a)$ могут быть и особые решения о.д.у. (2.3).

П р и м е р 3. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}. \tag{2.5}$$

Р е ш е н и е. Обе части уравнения умножим на функцию $\frac{1}{y}$ $(y\neq 0)$, тогда его можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0. \tag{2.6}$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл при $x\neq 0$, $y\neq 0$ есть соотношение

$$\ln|x|+\ln|y|=C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Константу C_1 представим в виде $C_1=\ln|C|$ $(C\neq 0)$, тогда

$$\ln|x|+\ln|y|=\ln|C|,$$

откуда имеем

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|, \text{ или } |y|=\left|\frac{C}{x}\right|.$$

В последнем соотношении, в силу произвольности C, знаки модуля можно опустить. Следовательно,

$$y = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0. \tag{2.7}$$

Очевидно, решение $y = y(x) = 0 \quad (x \neq 0)$ уравнения (2.5) не входит в последнюю формулу ни при каком значении $C \neq 0$, хотя соответствующая ему интегральная кривая лежит в областях существования и единственности решения задачи Коши этого уравнения. То есть решение $y = y(x) = 0 \quad (x \neq 0)$ оказалось потерянным. Однако оно входит в формулу (2.7) при $C = 0$. Поэтому, допуская в (2.7) и $C = 0$, получаем, что общее решение уравнения (2.5) имеет вид $y = \frac{C}{x}$,где C – произвольная постоянная.

Заметим, что функция $x = x(y) = 0 \quad (y \neq 0)$ является решением «перевернутого» по отношению к (2.5) уравнения

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}.$$

П р и м е р 4. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = 2\sqrt{y},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$.

Р е ш е н и е. Разделяем переменные умножением обеих частей рассматриваемого уравнения на величину $\frac{dx}{2\sqrt{y}} \quad (y \neq 0)$. Будем иметь:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx + C,$$

или

$$\sqrt{y} = x + C.$$

Так как $\sqrt{y} > 0$, то в получившемся соотношении $x + C > 0$. Отсюда находим общее решение данного уравнения в области $|x| < +\infty$, $y > 0$:

$$y = (x + C)^2, \quad x > -C.$$

Выделим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$. Для этого в формуле общего решения положим $x = 1$, $y = 2$. Получим уравнение для определения значения константы C:

$$2 = (1 + C)^2.$$

Из него находим $C = \pm\sqrt{2} - 1$. Из двух значений $\sqrt{2} - 1$ и $-\sqrt{2} - 1$ выбираем $C = \sqrt{2} - 1$, так как точка (1, 2) на кривой $y = \left(x - \sqrt{2} - 1\right)^2$, $x > \sqrt{2} + 1$ не лежит.

Итак, искомое решение есть $y = \left(x + \sqrt{2} - 1\right)^2$, $x > 1 - \sqrt{2}$.

П р и м е р 5. Найти общий интеграл уравнения

$$2y\sqrt{x}dy + \left(1 - y^2\right)dx = 0. \tag{2.8}$$

Р е ш е н и е. О.д.у. (2.8) есть уравнение с разделяющимися переменными. Умножим обе его части на функцию

$$\frac{1}{\left(1 - y^2\right)\sqrt{x}} \qquad \left(x \neq 0, y \neq \pm 1\right),$$

получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{2y}{1 - y^2}dy = 0. \tag{2.9}$$

Общим интегралом последнего является соотношение

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{2y}{1 - y^2}dy = C,$$

или

$$2\sqrt{x} - \ln\left|1 - y^2\right| = C. \qquad (2.10)$$

Следовательно, (2.10) есть общий интеграл о.д.у. (2.8).

Заметим, что формула (2.10) получена в предположении $x \neq 0, y \neq \pm 1$. Функции $y = y(x) = \pm 1 \ (x \neq 0)$ и $x = x(y) = 0 \ (y \neq \pm 1)$ являются, очевидно, решениями (2.8) и они не входят в (2.10) ни при каком значении константы *C*. Покажем, что функции $y = y(x) = \pm 1 \ (x \neq 0)$ являются частными решениями, а функция $x = x(y) = 0 \ (y \neq \pm 1)$ – особым решением уравнения (2.8).

Действительно, полупрямые $y = y(x) = \pm 1 \ (x \neq 0)$ лежат в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2y\sqrt{x}}, \qquad (2.11)$$

получающегося из (2.8) разрешением относительно $\frac{dy}{dx}$. Значит, эти полупрямые есть частные решения о.д.у. (2.11), а, следовательно, и (2.8).

Записав общий интеграл (2.10) в иной форме, выделим из него данные частные решения. Для этого положим в (2.10) $C = -\ln\left|\tilde{C}\right|$, где $\tilde{C} \neq 0$ – произвольная константа. Тогда (2.10) перепишется так:

$$\ln\left|1 - y^2\right| = 2\sqrt{x} + \ln\left|\tilde{C}\right|,$$

или

$$\ln\left|1 - y^2\right| = \ln\left|\tilde{C}\right| + \ln e^{2\sqrt{x}}.$$

Отсюда имеем $\left|1 - y^2\right| = \left|\tilde{C}\right| e^{2\sqrt{x}}$ и, в силу произвольности $\tilde{C}$,

$$1 - y^2 = \tilde{C} e^{2\sqrt{x}}. \qquad (2.12)$$

Соотношение (2.12) – также общий интеграл о.д.у. (2.8). Оно получено в предположении $\tilde{C} \neq 0$. Очевидно, решения $y = y(x) = \pm 1 \ (x \neq 0)$

уравнения (2.8) получаются из (2.12) при $\tilde{C}=0$. Но, как мы показали, эти решения – частные, следовательно, в (2.12) можно допускать и $\tilde{C}=0$.

Таким образом, частные решения $y=y(x)=\pm 1$ уравнения (2.8) получаются из общего интеграла (2.12) этого уравнения при $\tilde{C}=0$.

Покажем сейчас, что функция $x=x(y)=0$ $(y\neq\pm 1)$ является особым решением уравнения (2.8). Отметим, во-первых, что соответствующая ей интегральная кривая не лежит в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y\sqrt{x}}{y^2-1},$$

перевернутого по отношению к (2.11), так как частная производная по x функции $\frac{2y\sqrt{x}}{y^2-1}$ в точках прямой $x=0$ обращается в бесконечность.

Убедимся теперь в том, что через каждую точку интегральной кривой $x=x(y)=0$ $(y\neq\pm 1)$ проходит по крайней мере две интегральные кривые уравнения (2.8). Выберем произвольно точку $(0,y_0)$ $(y_0\neq\pm 1)$ на этой кривой и ее координаты подставим в общий интеграл (2.12). Будем иметь соотношение для определения $\tilde{C}$:

$$1-y_0^2=\tilde{C}e^{2\sqrt{0}}.$$

Отсюда находим $\tilde{C}=1-y_0^2$. Таким образом, интегральная кривая $1-y^2=\left(1-y_0^2\right)e^{2\sqrt{x}}$ также проходит через точку $(0,y_0)$. То есть функция $x=x(y)=0$ $(y\neq\pm 1)$ – особое решение о.д.у. (2.8).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения

1. $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$,

2. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$,

3. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$,

4. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$,

5. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$,

6. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$.

7. $x^2\left(2yy'-1\right)=1$.

Решить задачу Коши:

1. $xy'+y=y^2$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$;

2. $y'ctgx+y=2$, $y(0)=-1$;

3. $2\left(1+e^x\right)yy'=e^x$, $y(0)=0$;

4. $\left(1+x^2\right)y^3dx-\left(y^2-1\right)x^3dy=0$, $y(1)=-1$.

3. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

К уравнениям с разделяющимися переменными могут быть приведены уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(ax+by\right), \tag{3.1}$$

где a и b – постоянные величины.

Введем переменную $z=ax+by$. Тогда $\dfrac{dz}{dx}=a+b\dfrac{dy}{dx}$, следовательно, уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dx}=a+bf\left(z\right),$$

или

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) есть уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, получим

$$x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

П р и м е р 1. Пронтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=2x+y$.

Р е ш е н и е. Полагая $z=2x+y$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx}-2=z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z+2}=dx,$$

$$\ln|z+2|=x+\ln|C|,$$

откуда следует

$$2x+y=-2+Ce^{x} \quad \text{и} \quad y=Ce^{x}-2x-2.$$

П р и м е р 2. Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$.

Р е ш е н и е. Полагая $z=x-y$, получим

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}, \qquad 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1, \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z},$$

или

$$zdz=-dx. \qquad (3.3)$$

Интегрируя (3.3), будем иметь $z^2=-2x+C$, откуда получаем следующий общий интеграл: $(x-y)^2=-2x+C$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения

1. $\dfrac{dy}{dx} = \cos\left(y - x\right)$.

2. $y' - y = 2x - 3$.

3. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Решить задачу Коши: $\left(x + 2y\right)y' = 1$, $y\left(0\right) = -1$.

4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Напомним сначала понятие однородной функции двух переменных.

Функция $F\left(x, y\right)$ называется *однородной функцией k-го порядка* (степени *k*), если для всех *t* выполняется соотношение

$$F\left(tx, ty\right) = t^k F\left(x, y\right).$$

Например, функция $\sqrt{x^4 + y^4}$ – однородная функция 2-го порядка, так как

$$\sqrt{\left(tx\right)^4 + \left(ty\right)^4} = t^2\sqrt{x^4 + y^4}.$$

Функция же $\dfrac{x + y}{x - y}$ – однородная функция нулевого порядка, поскольку

$$\frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Уравнение

$$M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0, \tag{4.1}$$

где $M\left(x, y\right)$ и $N\left(x, y\right)$– однородные функции одного и того же порядка, называется *однородным*.

Однородное уравнение приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4.2}$$

где f – функция одной переменной (т.е. правая часть (4.2) есть однородная функция нулевого порядка).

Однородное уравнение интегрируется посредством подстановки

$$y = u\ x,$$

где u – новая неизвестная функция переменной x. Очевидно, что в таком случае $dy = xdu + udx$.

П р и м е р 1. Проинтегрировать уравнение

$$(x + 2y)dx - 2xdy = 0. \tag{4.3}$$

Р е ш е н и е. Здесь функции $M(x, y) = x + 2y$ и $N(x, y) = -2x$ – однородные функции первого порядка, так как

$$M(tx, ty) = tx + 2ty = t(x + 2y) = tM(x, y),$$

$$N(tx, ty) = -2tx = t(-2x) = tN(x, y).$$

Следовательно, (4.3) – однородное о.д.у.

Подставив $y = u\ x$, $dy = xdu + udx$ в (4.3), будем иметь

$$(x + 2ux)dx - 2x(xdu + udx) = 0,$$

$$xdx + 2uxdx - 2x^2du - 2uxdx = 0,$$

$$xdx - 2x^2du = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) есть уравнение с разделяющимися переменными. Умножением обеих частей на $-\frac{1}{2x^2}$ $(x \neq 0)$ приведем его к уравнению с разделенными переменными

$$-\frac{dx}{2x} + du = 0.$$

Последнее имеет общее решение

$$u = \frac{1}{2}\ln|x| + C,$$

следовательно, при $x \neq 0$ общее решение уравнения (4.3) есть

$$y = \frac{1}{2}x\ln|x| + Cx. \qquad (4.5)$$

Заметим, что функция $x = x(y) = 0 \quad (y \neq 0)$ является решением (4.3). Она является частным решением рассматриваемого уравнения, так как соответствующие ей полупрямые лежат в областях существования и единственности уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{x+2y},$$

получающегося из (4.3) разрешением относительно $\frac{dx}{dy}$. Рассматриваемое решение $x = x(y) = 0 \quad (y \neq 0)$ не входит в формулу (4.5) ни при каком конечном значении произвольной константы *C*, то есть оно оказалось потерянным.

П р и м е р 2. Проинтегрировать уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x-y}. \qquad (4.6)$$

Р е ш е н и е. Уравнение (4.6) – однородное уравнение, так как его правая часть является однородной функцией нулевого порядка. Полагая $y = u\ x$, где *u* – новая неизвестная функция от *x*, найдем y':

$$y' = \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u\ .$$

Подставим y и y' в уравнение (4.6), получим

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{x+ux}{x-ux},$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} - u,$$

$$xdu = \frac{1+u^2}{1-u}dx. \qquad (4.7)$$

Уравнение (4.7) – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, приведем его к уравнению

$$\frac{1-u}{1+u^2}du - \frac{dx}{x} = 0 \quad (x \neq 0).$$

Общим интегралом последнего уравнения является соотношение

$$arctg\ u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) - \ln|x| = C,$$

следовательно, общим интегралом уравнения (4.6) будет соотношение

$$arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C. \qquad (4.8)$$

Поскольку при интегрировании (4.7) мы считали $x \neq 0$, то остается лишь проверить, не задают ли полупрямые $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ интегральную кривую уравнения (4.6). Подставляя $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ в (4.6), убеждаемся в том, что данная функция рассматриваемому уравнению не удовлетворяет.

Итак, все решения уравнения (4.6) описываются его общим интегралом (4.8).

П р и м е р 3. Найти частный интеграл уравнения $xdy - ydx = ydy$ при условии $y(-1) = 1$.

Р е ш е н и е. Убедимся, воспользовавшись условием (4.2), что данное уравнение – однородное:

$$y' = \frac{y}{x-y} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4.9)$$

Полагая в (4.9) $y = u\ x$, $y' = x\frac{du}{dx} + u$, получим уравнение

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}, \qquad -\frac{1}{u}-\ln|u|+C=\ln|x|$$

или

$$\ln|u\ x|+\frac{1}{u}=C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общий интеграл данного уравнения:

$$x=y\left(C-\ln|y|\right).$$

Используя начальные условия задачи $y(-1)=1$, находим $C=-1$. Следовательно, искомый частный интеграл уравнения будет

$$x=-y\left(1+\ln|y|\right).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти общие интегралы дифференциальных уравнений

1. $y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$,

2. $xy'=\frac{3y^3-2x^2y}{2y^2+x^2}$,

3. $\left(2x^2+6xy\right)dy=\left(x^2+2xy-5y^2\right)dx$,

4. $xdy-\left(4\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx=0$,

5. $ydx-\left(2\sqrt{x^2+y^2}+x\right)dy=0$,

6. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$,

7. $xy'=y\cos\ \ln\frac{y}{x}$.

Решить задачу Коши:

1. $(xy' - y)arctg\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$,

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$,

3. $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y(1) = -1$.

5. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{5.1}$$

преобразуются к однородным уравнениям путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, в новых координатах $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$ свободный член в уравнениях этих прямых будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах останутся неизменными, а $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$.

Уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right),$$

или

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2\dfrac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2), очевидно, является однородным дифференциальным уравнением.

Описанный метод нельзя применять лишь в случае параллельности прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Но при таком условии коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$, и уравнение (5.1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k\left(a_1x+b_1y\right)+c_2}\right)=F\left(a_1x+b_1y\right),$$

и, следовательно, как показано в п. 3, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными путем введения переменной $z=a_1x+b_1y$.

П р и м е р 1. Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

Р е ш е н и е. Из системы уравнений $\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$ находим точку (1; 2) пересечения прямых $x-y+1=0$ и $x+y-3=0$. Полагая $X=x-1$, $Y=y-2$, будем иметь

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\left(X+1\right)-\left(Y+2\right)+1}{\left(X+1\right)+\left(Y+2\right)-3},$$

или

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}. \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) – однородное, замена переменных $z=\frac{Y}{X}$, или $Y=zX$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z}.$$

Разделяем в последнем уравнении переменные

$$\frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2}=\frac{dX}{X}$$

и интегрируем:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2z-z^2\right|=\ln|X|-\ln|C|.$$

Будем иметь

$$\left(1-2z-z^2\right)X^2=C,$$

откуда ввиду подстановки $z=\dfrac{Y}{X}$ получим $X^2-2XY-Y^2=C$. Это общий интеграл уравнения (5.3).

Поскольку $X=x-1,\ Y=y-2$, то общий интеграл исходного уравнения имеет вид $x^2-2xy-y^2+2x+6y=\tilde{C}$, где $\tilde{C}=C+7$.

З а м е ч а н и е. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y=z^m$. Число m заранее обычно неизвестно. Чтобы его найти, нужно сделать указанную подстановку $y=z^m$. Далее, исходя из требования однородности получаемого уравнения, находится m, если это возможно.

П р и м е р 2. Рассмотрим уравнение $2x^4yy'+y^4=4x^6$. После замены $y=z^m$ оно примет вид

$$2mx^4z^{2m-1}z'+z^{4m}=4x^6.$$

Полученное уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов окажутся равными, т. е. при условии

$$4+(2m-1)=4m=6.$$

Одновременное выполнение этих равенств возможно при $m=\frac{3}{2}$. Следовательно, данное уравнение можно привести к однородному уравнению заменой $y=z^{\frac{3}{2}}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x+y-1}$,

2. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$,

3. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$,

4. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3}$,

5. $x^3(y'-x)=y^2$. *Указание: воспользоваться подстановкой* $y=z^2$.

6. $2x^2y'=y^3+xy$. *Указание: воспользоваться подстановкой* $y=z^{\frac{1}{2}}$.

6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{6.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – функции, непрерывные на некотором интервале $(a;b)$ $(-\infty\le a<b\le+\infty)$.

По теореме существования и единственности решения задачи Коши (см. п. 1) через каждую точку полосы

$$\{(x, y): a < x < b, |y| < +\infty\}$$

проходит одна и только одна интегральная кривая рассматриваемого уравнения.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (6.1) называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением. Это будет уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение есть

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{6.2}$$

где C – произвольная постоянная, а выражение $\int p(x)dx$ обозначает первообразную функцию $p(x)$.

При $q(x) \neq 0$ уравнение (6.1) называется *неоднородным линейным* дифференциальным уравнением.

При интегрировании неоднородного линейного дифференциального уравнения (6.1) применяют так называемый *метод вариации произвольной постоянной*, или *метод Лагранжа*. Этот метод состоит в том, что общее решение о.д.у. (6.1) ищут в таком же виде, что и общее решение соответствующего ему однородного уравнения, т.е. в виде (6.2), но при этом считают произвольную постоянную C непрерывно дифференцируемой функцией от x. В таком случае

$$y' = C'e^{-\int p(x)dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx},$$

и тогда подставляя выражения для y и y' в (6.1), имеем

$$C'e^{-\int p(x)dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx} + Cp(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C' = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

В таком случае общее решение уравнения (6.1) имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

где C_1 – произвольная постоянная.

З а м е ч а н и е 1. Общее решение о.д.у. (6.1) представляет сумму двух слагаемых. Первое слагаемое $C_1 e^{-\int p(x)dx}$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения с нулевой правой частью, второе же слагаемое, $e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, есть частное решение уравнения (6.1), поскольку получается из его общего решения при $C_1 = 0$.

Иллюстрацию метода Лагранжа проведем на следующих примерах.

П р и м е р 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' = 2x\left(x^2 + y\right). \tag{6.3}$$

Р е ш е н и е. Перепишем данное уравнение в виде

$$y' - 2xy = 2x^3. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Однородное уравнение, соответствующее (6.4), есть уравнение

$$y' - 2xy = 0,$$

которое имеет общее решение

$$y = Ce^{-\int(-2x)dx},$$

или

$$y = Ce^{x^2}. \tag{6.5}$$

Общее решение о.д.у. (6.4) будем искать в виде (6.5), где C считаем непрерывно дифференцируемой функцией от x, т.е. в виде

$$y = C(x)e^{x^2}. \tag{6.6}$$

Из (6.6) находим

$$y' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}.$$

Подставляя y из (6.6) и найденное выражение y' в уравнение (6.4), получаем дифференциальное уравнение для определения $C(x)$:

$$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = 2x^3,$$

или

$$C'(x) = 2x^3 e^{-x^2}.$$

Из последнего находим $C(x) = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + \tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная. Подставив $C(x)$ в (6.6), получим общее решение о.д.у. (6.4):

$$y = -\left(x^2 + 1\right) + \tilde{C}e^{x^2}.$$

Оно, очевидно, есть общее решение и уравнения (6.3).

П р и м е р 2. Найти интегральную кривую уравнения

$$\left(1 + y^2\right)dx + \left(xy + 1\right)dy = 0, \tag{6.7}$$

проходящую через точку $(1,0)$.

Р е ш е н и е. Считая x функцией от y, приведем данное уравнение к линейному относительно x. Для этого обе части (6.7) умножим на функцию $\frac{1}{1+y^2}$, будем иметь

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}x = -\frac{1}{1+y^2}. \tag{6.8}$$

Уравнение (6.8) проинтегрируем методом Лагранжа. Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего (6.8), есть

$$x = Ce^{-\int \frac{ydy}{1+y^2}},$$

или

$$x = Ce^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)}.$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$x = C\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6.9)$$

Общее решение о.д.у. (6.8) также будем искать в виде (6.9), считая при этом $C = C(y)$. С учетом последнего из (6.9) находим

$$\frac{dx}{dy} = C'(y)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} + C(y)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y.$$

Подставим x и $\frac{dx}{dy}$ в (6.8), получим дифференциальное уравнение для определения $C(y)$:

$$C'(y)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} - C(y)\,y\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{1+y^2}C(y)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{1+y^2},$$

или

$$C'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Из последнего уравнения находим

$$C(y) = -\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right| + \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная. Подставив $C(y)$ вместо C в (6.9), найдем общее решение уравнения (6.8)

$$x = \left(\tilde{C} - \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6.10)$$

Ясно, что (6.10) есть общий интеграл и уравнения (6.7). Выделим из него частное решение о.д.у. (6.7), удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Для этого положим в (6.10) $x=1$, $y=0$, будем иметь $\tilde{C} = 1$. Следовательно, искомая интегральная кривая о.д.у. (6.7) задается уравнением $x = \left(1 - \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right)\left(1+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

З а м е ч а н и е 2. Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y = u\ v$ линейное дифференциальное уравнение (6.1) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций. Данный метод носит имя И. Бернулли.

П р и м е р 3. Найти общее решение уравнения $y' - y \cdot ctg\ x = \sin x$.

Р е ш е н и е. Положим $y = u\ v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$u'v + uv' - uv \cdot ctgx = \sin x,$$

или

$$u'v + u\left(v' - v \cdot ctgx\right) = \sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можем взять произвольно, то выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v' - v \cdot ctgx = 0$. Тогда для отыскания u получим уравнение $u'v = \sin x$.

Решая первое из этих уравнений, отыщем v. Разделяя переменные и интегрируя, найдем его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v} = ctgx\ dx, \quad \ln|v| = \ln|\sin x|, \quad v = \sin x.$$

Подставляя функцию v во второе уравнение и решая его, найдем функцию u как общий интеграл этого уравнения:

$$u' \sin x = \sin x, \quad du = dx, \quad u = x + C.$$

Зная u и v, находим искомую функцию y: $y = u\ v = \left(x + C\right)\sin x$. Она является общим решением данного дифференциального уравнения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

1. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,$

2. $y' - y \cdot ctgx = 2x \sin x,$

3. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2},$

4. $\left(1+y^2\right)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy,$

5. $y^2dx - \left(2xy-1\right)dy = 0$,

6. $\left(xy + e^x\right)dx - xdy = 0$,

7. $\left(xy' - 1\right)\ln x = 2y$,

8. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$,

9. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

10. $y\left(x\right) = \int\limits_0^x y\left(t\right)dt + x + 1$.

Указание: обе части последнего уравнения предварительно продифференцируйте по x.

Решить задачу Коши:

1. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x,\ y\left(1\right) = e;$

2. $y^2dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}}\right)dy = 0, \quad y\left(e\right) = 2;$

3. $y' + xy = -x^3, \quad y\left(0\right) = 3;$

4. $\left(1-x\right)\left(y' + y\right) = e^{-x}, \quad y\left(2\right) = 0;$

5. $ydx - \left(3x + 1 + \ln y\right)dy = 0, \quad y\left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$

Указание: последнее уравнение будет линейным, если рассматривать x как функцию от y.

7. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{7.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – функции, непрерывные на некотором интервале $(a;b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, n – действительное число, отличное от 0 и 1, называется *уравнением Бернулли*[1].

Делением обеих частей на y^n и подстановкой $z = y^{1-n}$, где z – новая неизвестная функция, это уравнение приводится к линейному уравнению

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

При делении обеих частей уравнения (7.1) на y^n при $n > 0$ возможна потеря решения $y = 0$. Это решение является частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -x^3y^2.$$

Р е ш е н и е. Обе части уравнения разделим на y^2, полагая $y \ne 0$. Тогда уравнение перепишется так:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-1} = -x^3. \tag{7.2}$$

Положим $z = y^{-1}$, откуда $z' = -y^{-2}y'$. В силу введенной подстановки уравнение (7.2) можно записать следующим образом:

$$-z' + 2xz = -2x^3,$$

или

[1] Названо в честь Якоба Бернулли (1655 – 1705), опубликовавшего это уравнение в 1695 году. Метод решения с помощью замены, сводящей это уравнение к линейному, указал его брат Иоганн Бернулли (1667 – 1748) в 1697 году.

$$z' - 2xz = 2x^3. \qquad (7.3)$$

Последнее уравнение – линейное относительно функции z. Его общее решение есть $z = -\left(x^2+1\right) + \tilde{C}e^{x^2}$, где $\tilde{C}$ – произвольная константа (см. п. 6, пример 1). Отсюда, учитывая, что $z = y^{-1}$, записываем общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{y} = -\left(x^2+1\right) + \tilde{C}e^{x^2} \qquad \left(y \neq 0\right).$$

Так как показатель степени y в правой части данного уравнения равен 2, то потерянное при интегрировании решение $y=0$ является частным.

З а м е ч а н и е. При интегрировании уравнения Бернулли можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$ или метод вариации произвольной постоянной.

П р и м е р 2. Проинтегрировать уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = xy^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.4)$$

Р е ш е н и е. Уравнение (7.4) – уравнение Бернулли. Положим $y = uv$, тогда (7.4) перепишется в виде

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right)v + uv' - = xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

Функцию u выберем так, чтобы $u' - \frac{u}{x} = 0$. Например, пусть $u=x$. Тогда для определения v будем иметь уравнение

$$xv' - = x^{\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.5)$$

Последнее уравнение – уравнение с разделяющимися переменными, его общий интеграл есть

$$2v^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = C,$$

откуда $v = \left(C_1 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)^2$, где $C_1 = \frac{C}{2}$ – произвольная постоянная. Следовательно, общее решение о.д.у. (7.4) есть

$$y = x\left(C_1 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)^2. \tag{7.6}$$

Заметим, что при интегрировании уравнения (7.5) методом разделения переменных мы теряем решение $v=0$. Это ведет к потере решения $y = y(x) = 0 \ \ (x \neq 0)$ уравнения (7.4). Так как в правой части (7.4) показатель степени y равен $\frac{1}{2}$, то теряемое решение является особым.

Проинтегрируем теперь уравнение (7.4) методом вариации произвольной постоянной. Запишем однородное уравнение, соответствующее (7.4):

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Его общее решение есть $y = Cx$. Пусть $C = C(x)$, общее решение (7.4) будем искать в виде

$$y = C(x) \cdot x. \tag{7.7}$$

Подставим $y = C(x) \cdot x$ и $y' = C'(x) \cdot x + C(x)$ в уравнение (7.4), будем иметь

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x}C(x) \cdot x = x\left(C(x)\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

или

$$C'(x) = \left(C(x)\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего уравнения находим

$$2\left(C(x)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \tilde{C},$$

или

$$C(x) = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^2,$$

где $C_1 = \dfrac{C}{2}$ – произвольная константа. Подставляя $C(x)$ в (7.7), получаем общее решение уравнения (7.4) в форме (7.6).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$,
2. $2\left(y' + xy\right) = \left(x - 1\right)e^x y^2$,
3. $y' - 3y \cdot tgx = 3y^{-2}tg^8x$,
4. $y'x\ln x - y = 2y^{-1}\ln^6 x$,
5. $xy' - y = 2x^9y^{-2}$,
6. $y' - \dfrac{3y}{2x} = xy^{\frac{1}{3}}$.

Найти решение задачи Коши:

1. $y' + xy = \left(1 + x\right)e^{-x}y^2$, $y(0) = 1$,
2. $xy' + y = 2y^2\ln x$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{2}$,
3. $2\left(y + y'\right) = xy^2$, $\quad y(0) = 2$.

8. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{8.1}$$

где $p(x), q(x), r(x)$ – непрерывные функции от x при изменении x в интервале $a < x < b$ $(a \geq -\infty, b \leq \infty)$, называется *уравнением Риккати*[2].

Заметим, что уравнение (8.1) заключает в себе как частные случаи уже рассмотренные нами уравнения: при $p(x) \equiv 0$ получаем линейное уравнение, при $r(x) \equiv 0$ – уравнение Бернулли.

Уравнение Риккати не интегрируется в общем виде. Однако, если известно одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то заменой

$$y = y_1(x) + z$$

уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и может быть проинтегрировано.

Действительно, в этом случае (8.1) перепишется так:

$$y_1' + z' = p(x)(y_1 + z)^2 + q(x)(y_1 + z) + r(x). \tag{8.2}$$

Поскольку $y_1(x)$ – частное решение уравнения (8.1), то

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x). \tag{8.3}$$

Вычитанием (8.3) из (8.2) получаем следующее уравнение Бернулли относительно функции z:

$$z' - \left(2p(x)y_1 + q(x)\right)z = p(x)z^2.$$

П р и м е р 1. Найти общее решение уравнения $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

---

[2] Названо в честь итальянского математика Якопо Франческо Риккати (1676–1754), занимавшегося исследованием данного уравнения.

Р е ш е н и е. В данном случае нетрудно подобрать частное решение y_1 рассматриваемого уравнения: $y_1 = \frac{1}{x}$. Полагая теперь $y = z + \frac{1}{x}$, имеем

$$y' = z' - \frac{1}{x^2}, \qquad z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2},$$

или

$$z' - \frac{2z}{x} = z^2.$$

Интегрируя полученное уравнение Бернулли (см. п. 7), получим

$$z = \frac{3x^2}{C - x^3},$$

следовательно, $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}$ – общее решение исходного уравнения.

З а м е ч а н и е. Частное решение уравнения (8.1) иногда удается подобрать, исходя из вида свободного члена $r(x)$ этого уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$ частное решение целесообразно искать в виде $y = \frac{a}{x}$, где a – неопределенный коэффициент.

П р и м е р 2. Найти путем подбора частное решение уравнения Риккати $y' + y^2 = x^2 - 2x$.

Р е ш е н и е. Если в данном уравнении положить $y = ax + b$, то в его левой части будут члены, подобные членам в правой части. Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, можно найти значения a и b (если частное решение указанного вида существует). В нашем случае будем иметь

$$a + (ax + b)^2 = x^2 - 2x,$$

или

$$a^2x^2 + 2abx + \left(a + b^2\right) = x^2 - 2x\,. \qquad (8.4)$$

Из равенства многочленов в левой и правой частях (8.4) следуют условия

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ 2ab = -2, \\ a + b^2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение $a = -1$, $b = 1$. Значит, частным решением данного уравнения является функция $y = 1 - x$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их:

1. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$,

2. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$,

3. $y' + \dfrac{y}{x} + y^2 = \dfrac{4}{x^2}$,

4. $xy' - \left(2x + 1\right)y + y^2 = -x^2$,

5. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

9. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Дифференциальное уравнение вида

$$M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0 \qquad (9.1)$$

называется уравнением *в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U\left(x, y\right)$ независимых переменных x и y.

Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$U(x,y)=C.$$

Следующая теорема дает признак того, что уравнение вида (9.1) является уравнением в полных дифференциалах.

ТЕОРЕМА. Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D плоскости Oxy, то левая часть $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ уравнения (9.1) будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ тогда и только тогда, когда выполняется тождество[3]

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},\ (x,y)\in D. \tag{9.2}$$

Интегрирование уравнения в полных дифференциалах сводится к нахождению по функциям $M(x,y)$ и $N(x,y)$ соответствующей функции $U(x,y)$. Особые решения отсутствуют.

П р и м е р 1. Проинтегрировать уравнение

$$2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, так как функции $M(x,y)=2xy$ и $N(x,y)=x^2-y^2$ непрерывны во всей плоскости вместе со своими частными производными, при этом выполняется условие (9.2):

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

[3] Впервые это условие получил Леонард Эйлер (1707 – 1783).

Таким образом, левая часть данного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Так как $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, то имеем соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Из первого интегрированием по x получаем

$$U(x,y) = \int 2xydx + \varphi(y),$$

или

$$U(x,y) = x^2 y + \varphi(y). \tag{9.3}$$

Здесь $\varphi(y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, постоянная интегрирования. Считаем ее зависящей от y, поскольку интегрирование производилось по x. Из (9.3) находим

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$$

Так как, с другой стороны,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

то имеем следующее уравнение для определения $\varphi(y)$:

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2,$$

или

$$\varphi'(y) = -y^2.$$

Отсюда находим

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + \tilde{C}, \tag{9.4}$$

где $\tilde{C}$ – произвольная константа. Подставляя (9.4) в (9.3), имеем семейство функций

$$U(x,y)=x^2y-\frac{y^3}{3}+\tilde{C},$$

для которых левая часть данного уравнения является полным дифференциалом.

Таким образом, наше уравнение можно записать в виде

$$d\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)=0,$$

откуда его общий интеграл есть

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C.$$

В некоторых случаях, когда уравнение вида (9.1) не является уравнением в полных дифференциалах, удается найти такую функцию $\mu=\mu(x,y)$, что уравнение

$$\mu(Mdx+Ndy)=0$$

будет уравнением в полных дифференциалах. Функция μ называется *интегрирующим множителем* рассматриваемого уравнения. Кривые, в точках которых μ обращается в нуль или в бесконечность, могут оказаться соответственно посторонними или особыми решениями уравнения

$$Mdx+Ndy=0.$$

При условии, что интегрирующий множитель $\mu=\mu(x,y)$ уравнения (9.1) есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y, из тождества

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

следует, что μ должно удовлетворять следующему дифференциальному уравнению в частных производных

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \qquad (9.5)$$

Необходимым и достаточным условием того, что уравнение (9.5) имеет решение вида $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x, y)$ – некоторая конкретная функция переменных x и y, является условие

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \phi(\omega), \tag{9.6}$$

где ϕ – некоторая функция от ω. В этом случае интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu = e^{\int \phi(\omega) d\omega}. \tag{9.7}$$

Условия (9.6) и (9.7) следуют из соотношения

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

На практике поиск функции $\omega(x, y)$ основывается на том, чтобы отношение в левой части (9.6) могло выражаться только через переменную ω. Если такая функция $\omega(x, y)$ находится, то интегрирующий множитель уравнения (9.1) выражается по формуле (9.7), при этом после вычисления интеграла переменную ω надо заменить на ее аналитическое выражение $\omega(x, y)$. При подборе $\omega(x, y)$ рекомендуется начинать с простейших случаев, когда $\omega = x$ или $\omega = y$. Тогда выражение (9.6) имеет вид

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \phi(x) \quad \text{или} \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \phi(y),$$

а интегрирующий множитель μ –

$$\mu = e^{\int \phi(x) dx} \quad \text{или} \quad \mu = e^{\int \phi(y) dy}$$

соответственно.

П р и м е р 2. Проинтегрировать уравнение

$$ydx-\left(x^2y+x\right)dy=0. \qquad (9.8)$$

Р е ш е н и е. Это уравнение вида (9.1). Здесь $M(x,y)=y$, $N(x,y)=-\left(x^2y+x\right)$.

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-\left(1+2xy\right)$$

и $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение (9.8) не является уравнением в полных дифференциалах.

Попытаемся найти интегрирующий множитель этого уравнения. Рассмотрим разность

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2\left(1+xy\right)$$

и выражение

$$N(x,y)=-x\left(1+xy\right).$$

Нетрудно заметить, что выражение $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ равно $-\frac{2}{x}$, т.е. зависит только от x. Следовательно, о.д.у. (9.8) имеет интегрирующий множитель μ, зависящий только от x. По формуле (9.7)

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}.$$

Умножая обе части уравнения (9.8) на найденный интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$, получаем уравнение

$$\frac{y}{x^2}dx-\left(y+\frac{1}{x}\right)dy=0,$$

являющееся уравнением в полных дифференциалах. Его левая часть при $x \neq 0$ есть полный дифференциал dU некоторой функции $U(x, y)$. Для нахождения $U(x, y)$ запишем условия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\left(y + \frac{1}{x}\right).$$

Из первого соотношения находим

$$U(x, y) = -\frac{y}{x} + \varphi(y),$$

откуда $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y)$. С другой стороны, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\left(y + \frac{1}{x}\right)$, следовательно,

$$-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\left(y + \frac{1}{x}\right),$$

т.е. $\varphi'(y) = -y$. Отсюда находим $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C_1$. Таким образом, можно взять $U(x, y) = -\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}$, и общий интеграл уравнения (9.8) при $x \neq 0$ будет иметь вид

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = C. \tag{9.9}$$

Интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x^2}$ в точках прямой $x = 0$ обращается в бесконечность. Очевидно, полупрямые $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ являются интегральной кривой уравнения (9.8). Проверим, не являются ли они особым решением этого уравнения. Для этого (9.8) запишем в виде, разрешенном относительно производной $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Из вида правой части последнего уравнения следует, что полупрямые $x = x(y) = 0$ $(y \neq 0)$ лежат в областях существования и единственности этого уравнения. Следовательно, они являются частным решением уравнения (9.8). Это решение не входит в формулу (9.9) ни при каком конечном значении константы *C*, т.е. оно оказалось потерянным при интегрировании.

П р и м е р 3. Проинтегрировать уравнение

$$y^2 dx + \left(e^x - y\right) dy = 0. \qquad (9.10)$$

Р е ш е н и е. Это уравнение вида (9.1). Здесь $M(x, y) = y^2$, $N(x, y) = e^x - y$. Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq e^x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

то (9.10) не является уравнением в полных дифференциалах. Для нахождения интегрирующего множителя составим отношение (9.6):

$$\phi = \frac{2y - e^x}{\left(e^x - y\right)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - y^2 \dfrac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если взять в качестве ω функцию $x + \ln y$, то

$$\phi = \frac{2y - e^x}{\left(e^x - y\right) \cdot 1 - y^2 \cdot \dfrac{1}{y}} = \frac{2y - e^x}{e^x - -2y} = -1,$$

т.е. ϕ будет функцией переменной ω. Чтобы не исключать из рассмотрения область $y<0$, можно положить с самого начала $\omega = x + \ln|y|$, тогда все равно $\phi \equiv -1$. По формуле (9.7) находим интегрирующий множитель уравнения (9.10):

$$\mu = e^{\int(-1)d\omega} = e^{-\omega} = e^{-x-\ln|y|} = \frac{e^{-x}}{|y|}.$$

После умножения обеих частей (9.10) на этот множитель уравнение перепишется в виде

$$e^{-x}|y|dx+\left(\frac{1}{|y|}-e^{-x}\operatorname{sgn} y\right)dy=0\ (y\neq 0). \qquad (9.11)$$

Нам достаточно вместо уравнения (9.11) рассмотреть уравнение

$$e^{-x}ydx+\left(\frac{1}{y}-e^{-x}\right)dy=0 \quad (y>0), \qquad (9.12)$$

поскольку в области $y<0$, будучи умноженным на -1, оно имеет такой же вид, что и (9.12).

Проинтегрируем (9.12). Это уравнение в полных дифференциалах. Запишем равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x}=e^{-x}y,\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{y}-e^{-x}. \qquad (9.13)$$

Из первого находим $U(x,y)=-e^{-x}y+\varphi(y)$, откуда $\frac{\partial U}{\partial y}=-e^{-x}+\varphi'(y)$. Из последнего соотношения и второго равенства в (9.13) имеем уравнение для определения $\varphi(y)$:

$$-e^{-x}+\varphi'(y)=\frac{1}{y}-e^{-x},$$

или

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y}.$$

Отсюда находим $\varphi(y)=\ln y$. Следовательно, функция $U(x,y)$, полным дифференциалом которой является левая часть о.д.у. (9.12), есть $-e^{-x}y+\ln y$. Общим же интегралом уравнения (9.11) будет соотношение

$$\ln|y|-e^{-x}|y|=C.$$

Найденный интегрирующий множитель уравнения (9.10) обращается в бесконечность в точках прямой $y=0$, поэтому необходимо проверить, будет ли прямая $y=0$ особым решением этого уравнения. Однако если за-

писать (9.10) в виде, разрешенном относительно производной $\frac{dy}{dx}$, и применить теорему существования и единственности решения задачи Коши, то легко убедиться, что $y=0$ – частное решение данного уравнения. Оно оказалось потерянным.

З а м е ч а н и е 1. Разделение переменных при решении соответствующего дифференциального уравнения сводится к умножению его на некоторый интегрирующий множитель.

В самом деле, если дано уравнение (см. п. 2)

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$$

то для разделения переменных мы умножаем обе его части на $\mu = \frac{1}{M_2(x)N_1(y)}$. Ясно, что после умножения левая часть данного уравнения становится полным дифференциалом, т. е. μ есть интегрирующий множитель.

Пользуясь этим замечанием, найдем интегрирующий множитель однородного дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одного и того же порядка k. Мы знаем (см. п. 4), что введением новой функции $u = \frac{y}{x}$ переменные в данном уравнении разделяются. Действительно, в силу однородности функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$ имеем:

$$M(x,y) = M(x,xu) = x^k M(1,u)$$

и (аналогично)

$$N(x,y) = x^k N(1,u).$$

Внося эти выражения, а также $dy = xdu + udx$ в исходное уравнение, получаем:

$$x^k\left(\left(M\left(1,u\right)+u\cdot N\left(1,u\right)\right)dx + xN\left(1,u\right)du\right)=0.$$

Для разделения переменных нужно обе части полученного уравнения умножить на интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{x^{k+1}\left(M\left(1,u\right)+u\cdot N\left(1,u\right)\right)},$$

или, в старых переменных x, y, – на

$$\mu = \frac{1}{xM\left(x,y\right)+yN\left(x,y\right)}.$$

Это выражение есть интегрирующий множитель исходного однородного уравнения.

Отметим, что если $xM\left(x,y\right)+yN\left(x,y\right)\equiv 0$, или если $\dfrac{M\left(x,y\right)}{N\left(x,y\right)} = -\dfrac{y}{x}$, интегрирующий множитель однородного о.д.у. не существует. Это возможно лишь для уравнения $ydx - xdy = 0$.

П р и м е р 4. Найдите общий интеграл уравнения $\left(x+y\right)dx + \left(y-x\right)dy = 0$ (сравните с примером 2, рассмотренным в п. 4).

Р е ш е н и е. Найдем интегрирующий множитель для данного уравнения:

$$\mu = \frac{1}{x\left(x+y\right)+y\left(y-x\right)} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Умножая обе части данного о.д.у. на этот интегрирующий множитель и группируя члены, получаем:

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}d\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)-d\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)=0\,.$$

Отсюда общим интегралом исходного уравнения является соотношение $\ln\left(x^2+y^2\right)-arctg\,\frac{y}{x}=C$.

З а м е ч а н и е 2. Линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ допускает интегрирующий множитель $\mu=e^{\int p(x)dx}$. Действительно, умножив обе части данного линейного уравнения на функцию $e^{\int p(x)dx}$, запишем его в виде

$$\left(p(x)y-q(x)\right)e^{\int p(x)dx}dx+e^{\int p(x)dx}dy=0\,.$$

Сейчас несложно убедиться в выполнении условия (9.2):

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(p(x)y-q(x)\right)e^{\int p(x)dx}\right)=p(x)e^{\int p(x)dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int p(x)dx}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Таким образом, мы имеем еще один способ интегрирования линейного дифференциального уравнения.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx}-y\ tgx=\cos x$.

Р е ш е н и е. В силу замечания 2 данное уравнение имеет интегрирующий множитель $e^{-\int tgxdx}=\cos x$. Умножая на него обе части данного о.д.у., имеем:

$$\cos xdy-y\sin xdx-\cos^2 xdx=0\,,$$

где левая часть есть полный дифференциал. Интегрируя его, находим:

$$y\cos x-\int\cos^2 xdx=C\,,$$

или

$$y\cos x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x=C\,.$$

Общий интеграл найден.

Пользуясь замечанием 2, найдем интегрирующий множитель уравнения Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^n$.

Известно (см. п. 7), что разделив обе его части на y^n и введя новую функцию $z = y^{1-n}$, получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

Интегрирующим множителем для полученного уравнения является функция $\mu = e^{(1-n)\int p(x)dx}$. Значит, интегрирующим множителем рассматриваемого уравнения Бернулли будет функция $\mu = y^{-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}$.

Известно, что метод интегрирующего множителя можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

в области, где функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ имеют непрерывные частные производные и, по крайней мере, одна из этих функций не обращается в нуль. Однако ввиду трудности нахождения интегрирующего множителя данный метод обычно применяется лишь в тех случаях, когда интегрирующий множитель очевиден.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $3x^2e^y dx + \left(x^3e^y + 1\right)dy = 0$,

2. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2x - \frac{1}{x}\right)dy = 0$,

3. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$,

4. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y + \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$,

5. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$.

Проинтегрировать уравнения:

1. $\left(x^2+y^2+x\right)dx+ydy=0$,

2. $y^2dx-\left(xy+x^2\right)dy=0$,

3. $x\left(\ln y+2\ln x-1\right)dy=2ydx$,

4. $\left(y^2-\sin^2 x\right)dy+y\sin 2xdx=0$,

5. $ydx-\left(4x^2y+x\right)dy=0$.

Решить с помощью нахождения соответствующего интегрирующего множителя уравнения:

1. $\frac{dy}{dx}=2xy-x^3+x$,

2. $xdy+ydx-xy^2\ln xdx=0$.

10. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,y,y'\right)=0. \qquad (10.1)$$

Если это уравнение разрешить относительно y', то получим одно или несколько уравнений

$$y'=f_i\left(x,y\right) \qquad \left(i=1,2,...\right).$$

Интегрируя эти, уже разрешенные относительно производной уравнения, находим решения исходного уравнения (10.1).

П р и м е р 1. Проинтегрировать о.д.у.

$$\left(y'\right)^2-\left(x+y\right)y'+xy=0\,. \qquad (10.2)$$

Р е ш е н и е. Разрешая это квадратное относительно y' уравнение, будем иметь: $y'=x$ и $y'=y$. Интегрируя каждое из полученных уравнений, находим:

$$y=\frac{x^2}{2}+C \qquad (10.3)$$

и

$$y=Ce^x\,. \qquad (10.4)$$

Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Гладкими интегральными кривыми уравнения (10.2) будут также кривые, составленные из дуги интегральной кривой семейства (10.3) и дуги интегральной кривой семейства (10.4), если в общей точке они имеют общую касательную. Такими кривыми будут, например,

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}, x\le 1,\\ e^{-1}e^x, x>1\end{cases}, \qquad y=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, x\le 0,\\ 0, x>0.\end{cases}$$

Итак, уравнение (10.1) может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и последующего интегрирования полученных при этом уравнений.

Однако далеко не всегда уравнение (10.1) легко разрешается относительно y' и еще реже полученные в результате уравнения $y'=f_i\left(x,y\right)$ $\left(i=1,2,...\right)$ легко интегрируются. Поэтому часто приходится интегрировать уравнения вида (10.1) иными методами. Рассмотрим следующие случаи.

1. У р а в н е н и е (10.1) и м е е т в и д

$$F\left(y'\right)=0\,, \qquad (10.5)$$

п р и ч е м с у щ е с т в у е т, п о к р а й н е й м е р е, о д и н д е й с т в и т е л ь н ы й к о р е н ь $y'=k_i$ э т о г о у р а в н е н и я.

Так как уравнение (10.5) не содержит x и y, то k_i – постоянное. Следовательно, интегрируя уравнение $y' = k_i$, получим

$$y = k_i x + C,$$

или

$$k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Но k_i – корень уравнения (10.5), следовательно, $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ является его интегралом.

П р и м е р 2. Проинтегрировать уравнение $(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение имеет вид (10.5), причем его левая часть представляет собой многочлен седьмой степени от y'. Поскольку любой многочлен нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень, то общий интеграл уравнения есть

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-C}{x}\right)^5 + \frac{y-C}{x} + 3 = 0.$$

2. У р а в н е н и е (10.1) и м е е т в и д

$$F(x, y') = 0. \qquad (10.6)$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (10.6) двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y' = \psi(t).$$

Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$, откуда $y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$. Следовательно, интегральные кривые уравнения (10.6) определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x = \varphi(t),$$

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C.$$

Если уравнение (10.6) легко разрешается относительно x, $x=\varphi(y')$, то почти всегда удобно в качестве параметра ввести $y'=t$. Тогда

$$x=\varphi(t),\quad dy=y'dx=t\varphi'(t)dt,\quad y=\int t\varphi'(t)dt+C.$$

П р и м е р 3. Найти интегральные кривые уравнения

$$x=(y')^3-y'-1.$$

Р е ш е н и е. Положим $y'=t$. Тогда

$$x=t^3-t-1, \tag{10.7}$$

$$dy=y'dx=t\left(3t^2-1\right)dt,$$

$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+C. \tag{10.8}$$

Уравнения (10.7) и (10.8) определяют в параметрической форме семейство искомых интегральных кривых.

П р и м е р 4. Определить форму интегральных кривых уравнения

$$x\sqrt{1+(y')^2}=y'.$$

Р е ш е н и е. Положим в данном случае $y'=tgt$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$x=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\sin t, \tag{10.9}$$

$$dy=y'dx=tgt\cdot\cos tdt=\sin tdt,$$

$$y=-\cos t+C. \tag{10.10}$$

Исключая t из уравнений (10.9) и (10.10), получим $x^2+(y-C)^2=1$. Имеем семейство окружностей.

3. У р а в н е н и е (10.1) и м е е т в и д

$$F(y,y')=0. \tag{10.11}$$

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (10.11) двумя уравнениями: $y=\varphi(t)$ и $y'=\psi(t)$. Так как $dy=y'dx$, то

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)},$$

откуда

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+C.$$

Следовательно, искомые интегральные кривые в параметрической форме определяются уравнениями

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+C \qquad \text{и} \qquad y=\varphi(t).$$

В частности, если уравнение (10.11) легко разрешимо относительно y, то обычно в качестве параметра удобно выбрать y'.

Действительно, если $y=\varphi(y')$, то, полагая $y'=t$, получим

$$y=\varphi(t),\quad dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{t},\quad x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}+C.$$

П р и м е р 5. Проинтегрировать уравнение $y=(y')^5+(y')^3+y'+5$.

Р е ш е н и е. Полагаем $y'=t$. Тогда

$$y=t^5+t^3+t+5, \tag{10.12}$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\left(5t^4+3t^2+1\right)dt}{t}=\left(5t^3+3t+\frac{1}{t}\right)dt,$$

$$x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+C. \tag{10.13}$$

Уравнения (10.12) и (10.13) в параметрической форме задают общий интеграл данного уравнения.

П р и м е р 6. Найти общее решение уравнения $\dfrac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}=1$.

Р е ш е н и е. В данном случае положим $y'=sht$, тогда

$$y=cht, \tag{10.14}$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{shtdt}{sht}=dt,$$

$$x=t+C. \tag{10.15}$$

Исключая параметр t из уравнения (10.14) и (10.15), получаем общее решение исходного уравнения: $y=ch(x-C)$.

Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения (10.1) зависит от всех трех аргументов x, y, y'. В данных условиях заменим (10.1) его параметрическим представлением:

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v), \quad y'=\chi(u,v).$$

Пользуясь зависимостью $dy=y'dx$, будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u,v)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

откуда, разрешая относительно производной $\dfrac{dv}{du}$, получим

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\chi(u,v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}. \tag{10.16}$$

В результате получено уравнение первого порядка, уже *разрешенное относительно производной*. Тем самым задача сведена к рассмотренной в предыдущих пунктах. Заметим, однако, что решение уравнения (10.16) не всегда может быть выражено через интегралы.

Если уравнение (10.1) разрешимо относительно y, то в качестве параметров u и v зачастую удобно брать x и y'. Действительно, если (10.1) приводится к виду

$$y = f\left(x, y'\right), \tag{10.17}$$

то, считая x и $y' = p$ параметрами, получим

$$y = f\left(x, p\right),$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}. \tag{10.18}$$

Общий интеграл уравнения (10.18) есть $\Phi\left(x, p, C\right) = 0$. Совокупность уравнений $\Phi\left(x, p, C\right) = 0$ и $y = f\left(x, p\right)$, где p – параметр, определяет семейство интегральных кривых.

Заметим, что уравнение (10.18) может быть получено дифференцированием (10.17) по x. Действительно, дифференцируя (10.17) по x и полагая $y' = p$, получим $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$, что совпадает с (10.18). Поэтому данный метод часто называют *интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования*.

Совершенно аналогично интегрируется уравнение (10.1), если оно разрешимо относительно x:

$$x = f\left(y, y'\right). \tag{10.19}$$

В этом случае, взяв за параметры y и $y' = p$ и пользуясь зависимостью соотношением $dy = y'dx$, получим

$$dy = p\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right),$$

или

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}. \qquad (10.20)$$

Интегрируя уравнение (10.20), получим $\Phi(y, p, C) = 0$. Это уравнение совместно с уравнением $x = f(y, p)$ определяет интегральные кривые исходного уравнения. Заметим, что (10.20) может быть получено из (10.19) дифференцированием по y.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим линейное относительно x и y уравнение

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

называемое *уравнением Лагранжа*. Дифференцируя его обе части по x и полагая $y' = p$, получим

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}, \qquad (10.21)$$

или

$$\left(p - \varphi(p)\right)\cdot\frac{dp}{dx} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \qquad (10.22)$$

Это уравнение линейное относительно x и $\frac{dx}{dp}$, следовательно, легко интегрируется методами, рассмотренными в п. 6, например, методом вариации произвольной постоянной. Получив общий интеграл $\Phi(x, p, C) = 0$ уравнения (10.22) и присоединив к нему соотношение $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, получим уравнения, определяющие искомые интегральные кривые.

При переходе от уравнения (10.21) к уравнению (10.22) нам пришлось обе части (10.21) делить на $\frac{dp}{dx}$. В результате мы можем потерять

решения (если они существуют), для которых p постоянно, а значит, $\frac{dp}{dx} \equiv 0$. Считая p постоянным, замечаем, что уравнение (10.21) удовлетворяется лишь в том случае, когда p является корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$.

Итак, если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни $p = p_i$ $(i = 1, 2, ...)$, то к найденным выше решениям уравнения Лагранжа следует добавить интегральные кривые

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \qquad (i = 1, 2, ...),$$

являющиеся прямыми линиями.

Отдельно рассмотрим случай, когда $p - \varphi(p) \equiv 0$.

Тогда $\varphi(y') = y'$ и рассматриваемое уравнение принимает вид

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Последнее уравнение – *уравнение Клеро*[4].

Полагая в нём $y' = p$, получим $y = xp + \psi(p)$. Дифференцируя последнее соотношение по x, будем иметь:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

или

$$\left(x + \psi'(p)\right) \cdot \frac{dp}{dx} = 0,$$

откуда либо $\frac{dp}{dx} = 0$ и, значит, $p = C$, либо $x + \psi'(p) = 0$.

В первом случае, исключая p, получим:

$$y = Cx + \psi(C). \tag{10.23}$$

[4] Названо в честь Алексе́й Клода Клеро́ (1713 – 1765) – французского математика, механика и астронома.

Это есть однопараметрическое семейство интегральных кривых (в данном случае – прямых) уравнения Клеро.

Во втором случае решение определяется уравнениями

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0. \end{cases} \tag{10.24}$$

Соотношение (10.23) задаёт общее решение уравнения Клеро, а система (10.24) – его особое решение.

Поясним теперь геометрический смысл найденных решений. Из курса дифференциальной геометрии известно, что параметрические уравнения огибающей[5] семейства плоских кривых $f(x, y, C) = 0$ есть

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0, \\ f'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

Поскольку (10.23) определяет семейство интегральных прямых уравнения Клеро, то их огибающей будет

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C), \\ x + \psi'(C) = 0. \end{cases}$$

Поскольку через C здесь обозначен параметр, от его замены на p результат не изменится. Таким образом, (10.24) задает огибающую семейства прямых (10.23).

З а м е ч а н и е 1. Если $\psi'(p) = const$, т. е. если $\psi(p) = ap + b$ (a и b – постоянные), уравнение Клеро принимает вид

$$y = xy' + ay' + b,$$

откуда

$$y' = \frac{y - b}{x + a}$$

или

[5] Огибающей данного семейства кривых называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

$$\frac{dy}{y-b}=\frac{dx}{x+a}.$$

В данном случае вместо особого решения мы имеем *особую точку* $x=-a$, $y=b$, через которую проходят все интегральные прямые $y=b+C\left(x+a\right)$.

З а м е ч а н и е 2. Всякое семейство прямых, зависящее от одного параметра (кроме семейства параллельных прямых), при исключении параметра приводит к уравнению Клеро. В самом деле, пусть дано семейство прямых

$$y=k\left(t\right)x+b\left(t\right).$$

Поскольку $\frac{dk}{dt}\neq 0$ (иначе $k=const$, и мы имели бы семейство параллельных прямых), то уравнение $k\left(t\right)=C$,где C – новый параметр, можно разрешить относительно t:

$$t=f\left(C\right).$$

Уравнение семейства примет вид

$$y=Cx+b\left(f\left(C\right)\right)=Cx+\Phi\left(C\right),$$

т. е. вид общего решения уравнения Клеро (см. (10.23)).

П р и м е р 7. Решить уравнение $y=xy'-\left(y'\right)^2$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение является уравнением Клеро. Однопараметрическое семейство его интегральных прямых имеет вид $y=Cx-C^2$ (см. (10.23)).

Кроме того, особым решением данного уравнения будет интегральная кривая, определяемая уравнениями $\begin{cases} y=Cx-C^2, \\ x-2C=0 \end{cases}$ (см. (10.24)). Исключив из последней системы C, можем записать уравнение особого решения в виде $y=\frac{x^2}{4}$.

П р и м е р 8. Решить уравнение $y = 2xy' - (y')^3$.

Р е ш е н и е. Это уравнение Лагранжа. Полагая $y' = p$, можем записать его в виде

$$y = 2px - p^3. \tag{10.25}$$

Дифференцируя (10.25) по x, получаем

$$p = 2p + 2x \cdot \frac{dp}{dx} - 3p^2 \cdot \frac{dp}{dx} \tag{10.26}$$

и после деления на $\frac{dp}{dx}$ приходим к уравнению

$$p \cdot \frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Интегрируя это линейное относительно x уравнение (см. п. 6), получаем

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}p^2.$$

Следовательно, интегральные кривые исходного о.д.у. определяются уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{3}{4}p^2, \\ y = 2px - p^3. \end{cases}$$

При делении на $\frac{dp}{dx}$, как указывалось выше, теряются решения $p = p_i$, где p_i $(i = 1, 2, ...)$ – корни уравнения $p - \varphi(p) = 0$. В данном случае теряется решение $p = 0$ уравнения (10.26), которому, в силу (10.25), соответствует решение $y = 0$ исходного о. д. у.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Разрешить данные уравнения относительно y', после чего найти их общие решения известными методами. Выделить также особые решения, если они есть.

1. $(y')^2 - y^2 = 0$,

2. $8(y')^3 = 27y$,

3. $y^2\left((y')^2 + 1\right) = 1$,

4. $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$,

5. $(y')^2 - 2yy' = y^2\left(e^x - 1\right)$.

Решить уравнения Клеро и Лагранжа:

1. $y = xy' - \ln y'$,

2. $y = xy' - (2 + y')$,

3. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$,

4. $(y')^3 = 3(xy' - y)$,

5. $y = x(y')^2 - 2(y')^3$.

Решить уравнения методом введения параметра:

1. $x = (y')^3 + y'$,

2. $x\left((y')^2 - 1\right) = 2y'$,

3. $y = \ln\left((y')^2 + 1\right)$,

4. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$,

5. $y = (y' - 1)e^{y'}$.

11. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Задачи, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций, весьма разнообразны. В таких задачах отыскивается функция или зависимость между переменными факторами какого-либо (физического, химического или технического) процесса, уравнение линии или поверхности.

При решении этих задач вначале составляется дифференциальное уравнение задачи, которое затем решается тем или иным способом в зависимости от его типа.

Дифференциальное уравнение задачи составляется по ее условию, и в зависимости от условия задачи оно получается либо как соотношение между дифференциалами переменных величин, либо как соотношение, содержащее производные неизвестной функции.

При составлении дифференциального уравнения задачи, в зависимости от ее условия, используются известные законы физики, химии и других наук; геометрический, механический и физический смысл производной, различные математические сведения. Можно также делать различные допущения, упрощающие задачу, и, вместе с тем, не отражающиеся на ее результатах. Так, например, небольшой участок кривой можно считать прямолинейным, небольшой участок поверхности – плоским, в течение малого промежутка времени переменное движение можно рассматривать как равномерное, а всякий процесс как процесс, протекающий с неизменной скоростью.

П р и м е р 1. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

Р е ш е н и е. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) искомой кривой есть

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

где (x, y) – координаты произвольной точки на касательной.

Полагая в этом уравнении $y = 0$, найдем абсциссу X точки пересечения касательной с осью Ox:

$$X = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}.$$

Согласно условию задачи, середина отрезка касательной между точкой касания и осью абсцисс лежит на оси ординат, значит, $X + x_0 = 0$ и тогда $2x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} = 0$. В силу произвольности точки касания (x_0, y_0) будем иметь о.д.у.

$$2x - \frac{y}{y'} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad 2\ln|y| = \ln|x| + C; \quad y^2 = Cx.$$

Следовательно, искомая кривая есть парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox.

П р и м е р 2. Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найдите скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0) = 100$ м/с, а $V(1) = 50$ м/с.

Р е ш е н и е. Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией t, т. е. $V = V(t)$. Для нахождения $V(t)$ воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m \cdot a = F,$$

где $a = V'(t)$ есть ускорение движущегося тела, m – его масса, F – результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

По условию задачи $F = -kV^2$, $k > 0$ – коэффициент пропорциональности (знак «минус» указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V = V(t)$ является решением дифференциального уравнения $mV' = -kV^2$. Это уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим:

$$V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C},$$

где C – произвольная постоянная.

Для ответа на вопрос задачи найдем значения параметров $\frac{k}{m}$ и C. Из условия имеем:

$$V(0) = \frac{1}{C} = 100 \quad \text{и} \quad V(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + C} = 50.$$

Отсюда получаем $C = \frac{1}{100}, \frac{k}{m} = \frac{1}{100}$. Следовательно, скорость точки изменяется по закону $V = \frac{100}{t+1}$, и скорость точки через 3 с после начала замедления есть значение $V = 25$ м/с.

П р и м е р 3. Сосуд емкостью 100 л заполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. В одну минуту в него втекает 3л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково?

Р е ш е н и е. Пусть в момент времени t(мин) в первом сосуде содержится x (кг) соли и пусть в последующий малый промежуток времени dt количество соли в этом сосуде уменьшится на dx .

За время dt из сосуда вытечет $3dt$ (л) рассола. Концентрация рассола в момент t будет равна $\frac{x}{100}$ (кг/л). Если допустить, что в течение малого промежутка времени dt концентрация рассола оставалась неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx = \frac{x}{100} \cdot 3dt$.

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3dt}{100}; \quad \ln x = -0,03t + C .$$

Исходя из начального условия $x = 10$ при $t = 0$, определяем значение постоянной: $C = \ln 10$. Следовательно, зависимость количества соли x от времени t в первом сосуде будет

$$\ln x = -0,03t + \ln 10 \quad \text{или} \quad x = 10e^{-0,03t} . \qquad (11.1)$$

Далее найдем зависимость количества соли y от времени t для второго сосуда.

Во втором сосуде в момент t концентрация рассола будет $\frac{y}{100}$ (кг/л). За время dt в него вольется $3dt$ (л) рассола, содержащего $\frac{3x}{100}dt$ (кг) соли, а выльется $3dt$ (л) рассола, содержащего $\frac{3y}{100}dt$ (кг) соли, т. е. за время dt количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0,03xdt - 0,03ydt ,$$

или

$$dy = 0,03(x - y)dt .$$

Заменяя x в этом уравнении по формуле (11.1), получим линейное уравнение 1-го порядка

$$dy = 0,03\left(10e^{-0,03t} - y\right)dt, \qquad y' + 0,03y = 0,3e^{-0,03t},$$

общее решение которого есть $y = e^{-0,03t}\left(C_1 + 0,3t\right)$; его легко найти, обратившись к п. 6.

Значение $C_1 = 0$ определяем из начального условия: $y=0$ при $t = 0$.

Следовательно, зависимость количества соли y от времени t во втором сосуде будет

$$y = 0,3te^{-0,03t}.$$

Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах будет одинаково, найдем, полагая $x = y$:

$$10e^{-0,03t} = 0,3te^{-0,03t}; \quad 10 = 0,3t; \quad t = 33,(3) \text{ сек.}$$

В этот момент в каждом сосуде будет по $\frac{10}{e} \approx 3,68$ кг соли.

П р и м е р 4. В физике устанавливается следующая связь между силой тока I и электродвижущей силой E в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L (R и L – постоянные):

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Если рассматривать E как функцию от t, то это – линейное дифференциальное уравнение для силы тока i. Запишем его в виде

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение в предположении $E = const$, при начальном условии $i=0$ для $t=0$ (включение в цепь, в которой не было тока, постоянной электродвижущей силы).

Р е ш е н и е. Обратившись к п. 6, найдем общее решение уравнения:

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Определим C из начального условия при $t = 0$:

$$0 = \frac{E}{R} + C, \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Искомое частное решение будет таким:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Найденная зависимость означает, что при $t = 0$ сила тока равна нулю, а затем быстро приближается к постоянному значению $\frac{E}{R}$ (процесс установления постоянного тока).

П р и м е р 5. Модель Солоу[6] экономического роста.

Рассматривается модель экономического роста, в которой производственные фонды K и трудовые ресурсы L связаны производственной функцией $Q = f(K, L)$, где Q – конечный продукт (выпуск), $K, L > 0$.

В модели Солоу предполагается, что

$$\frac{dK}{dt} = sQ, \tag{11.2}$$

где s – доля сбережений в доходе,

и

$$\frac{dL}{dt} = \lambda L, \tag{11.3}$$

где λ – темп роста трудовых ресурсов.

[6] Модель Со́лоу – неоклассическая модель экономического роста, основанная на производственной функции Кобба – Дугласа и учитывающая автономный нейтральный технический прогресс в качестве фактора экономического роста наравне с трудом и капиталом. Автор модели – американский экономист Роберт Мертон Со́лоу.

Динамическая природа этих предположений состоит в том, что они определяют не уровни значений K и L, а скорости их изменения.

Р е ш е н и е. В качестве производственной функции возьмем хорошо известную функцию Кобба–Дугласа $Q = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$. Обозначим $\frac{K}{L} = k$, тогда

$$Q = Lk^{\alpha}. \tag{11.4}$$

Подставим (11.4) в (11.2), будем иметь:

$$\frac{dK}{dt} = sLk^{\alpha}. \tag{11.5}$$

Так как $K = kL$, то $\frac{dK}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt}$. С учетом (11.3) имеем:

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\lambda L. \tag{11.6}$$

Приравнивая правые части равенств (11.5) и (11.6) и сокращая на L, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} + \lambda k = sk^{\alpha}, \tag{11.7}$$

которое является уравнением Бернулли (см. п. 7). Находим его общий интеграл:

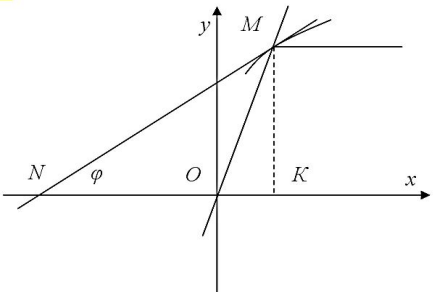
$$k^{1-\alpha} = Ce^{-(1-\alpha)\lambda t} + \frac{s}{\lambda}.$$

Если $t \to +\infty$, то $k^{1-\alpha} \to \frac{s}{\lambda}$, или $k \to \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Следовательно, отношение $\frac{K}{L}$ стремится к константе как к своей равновесной величине.

Это равновесное значение $\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ прямо пропорционально доле сбережений в доходе s и обратно пропорционально темпу роста рабочей силы λ.

П р и м е р 6. Найти форму зеркала, отражающего параллельно данному направлению все лучи, выходящие из заданной точки.

Р е ш е н и е. Поместим начало координат в заданную точку и направим ось абсцисс параллельно заданному в условиях задачи направлению. Пусть луч падает на зеркало в точке M (x, y).



Рассмотрим изображенное на рисунке сечение зеркала плоскостью Oxy, проходящее через ось абсцисс и точку M. Проведем касательную MN к рассматриваемому сечению поверхности зеркала в точке M (x, y).

Так как угол падения луча равен углу отражения, то треугольник MNO – равнобедренный ($NO = MO$). Следовательно,

$$tg\varphi = y' = \frac{MK}{OK + NO} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Полученное однородное уравнение интегрируется заменой переменных $z = \frac{y}{x}$, но еще проще, освободившись от иррациональности в знаменателе, переписать его в виде

$$xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}dx . \qquad (11.8)$$

Это уравнение имеет очевидный интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Умножая на него обе части о.д.у. (11.8), будем иметь уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx,$$

общий интеграл которого есть

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C. \qquad (11.9)$$

Преобразуя (11.9), получим семейство парабол $y^2 = 2Cx + C^2$.

Пример 7. Найти кривую, касательные к которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной 2.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение искомой касательной в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

По условию $ab = 4$ (удвоенная площадь прямоугольного треугольника с катетами *a* и *b*), значит, $b = \frac{4}{a}$ и мы имеем семейство прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{ay}{4} = 1. \qquad (11.10)$$

Найдем дифференциальное уравнение этого семейства. Дифференцируем (11.10) по *x* и исключаем *a*:

$$\frac{1}{a} + \frac{ay'}{4} = 0, \quad a^2 = -\frac{4}{y'}, \quad a = 2\sqrt{-\frac{1}{y'}}, \ \frac{x\sqrt{-y'}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{-y'}} = 1,$$

или

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}.$$

Получили уравнение Клеро. Его общее решение есть

$$y = Cx + 2\sqrt{-C}, \qquad (11.11)$$

но нас интересует особое решение, которое дает искомую кривую. Поскольку это будет огибающая семейства (11.11), находим его, дифференцируя равенство (11.11) по C и исключая C (см. п. 10):

$$0 = x - \frac{1}{\sqrt{-C}}, \quad C = -\frac{1}{x^2},$$

откуда $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$, или окончательно $xy = 1$ – равносторонняя гипербола.

Отметим, что к уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по какому-нибудь свойству ее касательной.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти кривую, у которой все нормали проходят через точку (2; –3).

2. Найти кривую, проходящую через точку (3; 4), у которой отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

3. Тело охладилось за 10 мин от 100ºС до 60ºС. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20ºС. Когда тело остынет до 25ºС? *Указание: принять, что скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.*

4. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного количества *a* радия распадается в течение 100 лет.

5. Моторная лодка движется со скоростью 18 км/ч. Через 5 минут после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 км/ч. Найти расстояние, пройденное лодкой по инерции за 15 минут, если сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

6. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

7. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. *Указание: за неизвестную функцию удобнее взять скорость.*

8. Найти функцию спроса, имеющую постоянную эластичность относительно цены.

9. Темп изменения производительности труда равен $f(t)=\frac{t}{t^2+0,04}$. Найти закон изменения производительности труда, если при $t=0$ производительность составляет 2 усл. ед. *(Под темпом понимается относительная скорость изменения функции, которая определяется ее логарифмической производной* $T_y=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$*).*

10. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

11. Найти линию, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

12. Найти кривую, каждая касательная к которой отсекает на осях координат такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна 1.

13. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ

Интеграл дифференциального уравнения не всегда можно выразить в элементарных функциях или посредством конечного числа интегралов.

В большинстве случаев каждое дифференциальное уравнение определяет собой особую функцию, которую можно представить лишь в виде функционального ряда.

Интегралы многих дифференциальных уравнений, общие или частные, могут быть представлены в виде степенного ряда, сходящегося в некотором интервале изменения независимой переменной. В таком случае ряд, являющийся интегралом уравнения, можно найти или *методом неопределенных коэффициентов* или методом, основанным на применении ряда Маклорена (Тейлора) и называемым *методом последовательного дифференцирования*.

Разъясним данные методы в решениях следующих задач.

П р и м е р 1. Найти в виде степенного ряда общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx} = y^2$.

Р е ш е н и е. Пусть искомый интеграл есть степенной ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (12.1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Допуская, что такой ряд существует и сходится в некотором интервале значений x, найдем ряд для $\frac{dy}{dx}$ его почленным дифференцированием

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (12.2)$$

и ряд для y^2 – почленным умножением ряда (12.1) самого на себя:

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3{}^3 + \ldots + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + \ldots . \qquad (12.3)$$

Подставляя эти ряды вместо $\frac{dy}{dx}$ и y^2 соответственно в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, поскольку два ряда будут тождественно равны только при этом условии, получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_1 = a_0^2, \\ 2a_2 = 2a_0 a_1, \\ 3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2, \\ 4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2, \\ \qquad \ldots \end{cases}$$

Решая ее, найдем: $a_1 = a_0^2$, $a_2 = a_0^3$, $a_3 = a_0^4$, …, $a_n = a_0^{n+1}$, …. Следовательно, искомое разложение в степенной ряд общего интеграла данного уравнения есть

$$y = a_0\left(1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + a_0^3 x^3 + \ldots + a_0^n x^n + \ldots\right),$$

где a_0 является произвольной постоянной.

Полученный ряд представляет собой сумму членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = a_0 x$ и при $|q| < 1$ имеет сумму $y = \frac{a_0}{1 - a_0 x}$.

З а м е ч а н и е. Поскольку рассмотренное о.д.у. является уравнением с разделяющимися переменными, несложно убедиться в достоверности полученного результата непосредственным интегрированием.

П р и м е р 2. Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y' + xy^2 = 2\cos x$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Обратимся вначале к методу неопределенных коэффициентов. Как и в предыдущей задаче, ищем искомый интеграл в виде сте-

пенного ряда (12.1). Подставляя ряды для y^2 (см. (12.3)), для y' (см. (12.2)) и ряд для $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

в заданное уравнение, получим

$$a_1 + \left(a_0^2 + 2a_2\right)x + \left(2a_0a_1 + 3a_3\right)x^2 + \ldots = 2 - x^2 + \ldots .$$

Учитывая начальное условие $y(0) = a_0 = 1$, можем составить равенство,

$$a_1 + \left(1 + 2a_2\right)x + \left(2a_1 + 3a_3\right)x^2 + \ldots = 2 - x^2 + \ldots .$$

Отсюда путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x из обеих частей данного равенства найдем $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{5}{3}$. Следовательно, искомый частный интеграл есть

$$y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \ldots$$

Рассмотрим теперь метод последовательного дифференцирования. Пусть искомая функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (12.4)$$

где величины $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$,… являются значениями функции $y(x)$ и ее производных при $x = 0$.

Исходя из начальных условий, имеем: первый коэффициент разложения есть $y(0) = a_0 = 1$; второй определяем подстановкой известных величин в данное уравнение: $y' = 2\cos x - xy^2$, следовательно, $y'(0) = 2$.

Следующие коэффициенты находим последовательным дифференцированием по x обеих частей данного уравнения:

$$y''=\left(2\cos x-xy^2\right)'=-2\sin x-2xyy'-y^2 \;\Rightarrow\; y''(0)=-1,$$

$$y'''=\left(-2\sin x-2xyy'-y^2\right)'=-2\cos x-4yy'-2x\left(y'\right)^2-2xyy'' \;\Rightarrow\; y'''(0)=-10.$$

Ясно, что процесс можно продолжать, но условие нашей задачи предполагает нахождение только четырех первых членов степенного ряда. Согласно (12.4) будем иметь ряд

$$y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\ldots.$$

З а м е ч а н и е 1. Метод последовательного дифференцирования применим для отыскания общего и частного интегралов уравнений, разрешённых относительно производной, если в результате его использования можно получить выражение производной любого порядка. Данный метод зачастую требует меньшей вычислительной работы, чем метод неопределенных коэффициентов.

З а м е ч а н и е 2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов имеет большое значение, однако следует иметь в виду, что не для всякого уравнения можно получить интеграл в виде пригодного для использования степенного ряда.

Например, линейное о. д. у. $x^2y'-(x+1)y=-x^2$ имеет общий интеграл

$$y=xe^{-\frac{1}{x}}\left(C-\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}dx\right).$$

Однако, предполагая, что существует интеграл уравнения в виде ряда (12.1), определив его коэффициенты, получим ряд

$$y=x^2\left(1+1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots\right),$$

который практически непригоден, поскольку расходится при любом значении x, отличном от нуля.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию:

1. $y' - y^2 = x(x+1)$, $y(0)=1$,

2. $y' + y^2 = e^x$, $y(0)=0$,

3. $y' = y^3 - x$, $y(0)=1$,

4. $y' = \sin y - \sin x$, $y(0)=0$,

5. $y' = e^y + xy$, $y(0)=0$.

Сравнить различные методы решения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит:

1) под знаком интеграла;

2) под знаком логарифма;

3) под знаком производной или дифференциала;

4) в неявном виде.

2. Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется функция $y = y(x)$, если она (*укажите все возможные варианты ответов*):

1) удовлетворяет начальным условиям;

2) дифференцируема на некотором промежутке *I*;

3) монотонна на некотором промежутке *I*;

4) при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

3. Общим интегралом дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ является семейство функций вида

1) $\varphi(x, y, C) = 0$;

2) $y = \varphi(x, C)$;

3) $y = \varphi(x) + C$;

4) $y = C\varphi(x)$.

4. Интегральная кривая дифференциального уравнения – это:

1) семейство кривых, задающих общий интеграл данного уравнения;

2) график решения данного дифференциального уравнения;

3) геометрическое представление общего интеграла дифференциального уравнения;

4) любая кривая, проходящая через заданную точку плоскости.

5. Задача Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ формулируется так *(укажите все возможные варианты ответов)*:

1) найти решение $y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$;

2) найти решение $y(x)$ такое, что $y(x_0) = f(x_0, y_0)$;

3) найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0);

4) найти семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, \mathrm{C})$.

6. Укажите *все* обыкновенные дифференциальные уравнения среди перечисленных:

1) $\frac{\partial y}{\partial t} + xy = \cos x$;

2) $\frac{dy}{dx} + xy = \cos x$;

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = y^2 + tgx$;

4) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$.

7. Дифференциальными уравнениями первого порядка среди перечисленных являются (*укажите все варианты ответов*):

1) $\left(y'\right)^4 + yy' = \cos x$;

2) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} tg \frac{y}{x}$;

3) $y''x = \sin x - 2$;

4) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy = y^2 + 1$.

8. Расположите данные дифференциальные уравнения по возрастанию их порядка *(в ответе укажите последовательность порядковых номеров уравнений)*:

1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} = x^2$;

2) $y'y + 5xy = y^4$;

3) $y'y + 3xy^{IV} = e^{xy}$;

4) $y''' + 3xy'' = tg\left(x + y\right)$.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Верные ответы	3	2; 4	1	2	1; 3	2; 3	1; 4	2, 1, 4, 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнениями с разделяющимися переменными являются уравнения вида (*перечислите все варианты ответов*):

1) $f\left(y\right)dx = g\left(x\right)dy$;

2) $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$;

3) $y' = f\left(x, y\right)$;

4) $y' = f\left(x\right)g\left(y\right)$.

2. Укажите *все* уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\left(x + y^2\right)dx - xydy = 0$;

2) $\sin^2 x\ y^2y' - 1 = y$;

3) $x^2y' + \cos 2y = x$;

4) $y' - xy^2 = 2xy$.

3. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ имеет вид:

1) $\frac{1}{y} = arctg\frac{1}{x} + C$;

2) $-\frac{1}{y} = arctgx + C$;

3) $\frac{1}{y} = -\ln\left(1+x^2\right) + C$;

4) $\frac{1}{y} = \ln\left(1+x^2\right) + C$.

4. Частным решением дифференциального уравнения $y' \cdot tgx = y$ при начальном условии $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ является функция:

1) $y = e^{\cos x}$;

2) $y = e^{\sin x}$;

3) $y = \cos x$;

4) $y = \sin x$.

5. Решением задачи Коши для дифференциального уравнения $x^2 y^2 y' + 1 = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ является функция:

1) $y = 1$;

2) $y = \sqrt{x+1}$;

3) $y = x^2 + x + 1$;

4) $y = \cos x$.

6. Установите соответствие между дифференциальными уравнениями и их общими интегралами: а) $y' - 8x^7 y = 0$; б) $y' - 6x^5 y = 0$; в) $y' = 6xy$.

1) $\ln|y| = x^6 + C$;

2) $\ln|y| = x^8 + C$;

3) $\ln|y| = 6x^2 + C$;

4) $\ln|y| = 3x^2 + C$.

7. Укажите верное общее решение дифференциального уравнения $(x+2y)dx-dy=0$ *(сводится к уравнению с разделяющимися переменными)*:

1) $y=x^2-Cx$;

2) $y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{2x}$;

3) $y=-\frac{x}{2}+Ce^{-2x}$;

4) $y=x(y+C)$.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Верные ответы	1, 4	2; 4	2	4	1	а2; б1; в4	2

ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида

1) $y'=f(x,y)$;

2) $f(x)dx=g(y)dy$;

3) $ay'+by+c=0 \quad (a,b,c\in \boldsymbol{R})$;

4) $y'=f\left(\frac{x}{y}\right)$.

2. Однородными дифференциальными уравнениями первого порядка являются *(перечислите все варианты ответов)*:

1) $y'=f(x,y)$, если $f(kx,ky)=f(x,y)$;

2) $y'=f(ax+by+c)$, где *a, b, c* – числа;

3) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,

если $P(kx,ky)=k^nP(x,y)$, $Q(kx,ky)=k^nQ(x,y)$;

4) $y' + p(x) = f(x)y^n$, где $n \neq 0$, $n \neq 1$.

3. Выберите правильную замену для $y(x)$ и $y'(x)$ при решении однородного дифференциального уравнения первого порядка:

1) $y = uv$, $y' = u'x + u$;

2) $y = \frac{u}{v}$, $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

3) $y = uv$, $y' = u'v + uv'$;

4) $y' = yz$.

4. Выберите *все* однородные дифференциальные уравнения первого порядка среди перечисленных:

1) $\left(y^2 - 2x\right)dx + x^2 dy = 0$;

2) $xy' = y - xe^{y/x}$;

3) $y + \sqrt{xy} = xy'$;

4) $xy' - y = y\sin\frac{x+y}{x}$;

5) $xy' + y(x+1) = x^2$.

5. С помощью замены $y(x) = x \cdot u(x)$ уравнение $\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy$ сводится к следующему уравнению с разделяющимися переменными:

1) $xu'\left(u^2 + 1\right) = u^3 - u$;

2) $xu'(u+1) = u - u^3$;

3) $xu'\left(u^2 + 1\right) = u - u^3$;

4) $xu'\left(u^2 + 1\right) = u^2 - u$.

6. Общий интеграл уравнения $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$ есть:

1) $1 + y = e^{Cx}$;

2) $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$;

3) $y-\ln\frac{x+y}{x}=Cx$;

4) $\ln\frac{x+y}{x}=C$.

7. Общим решением уравнения $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$ является семейство функций $y=kx\cdot arctg(cx)$. Используя начальное условие $y(1)=\frac{\pi}{2}$, найдите значение константы *c*. Укажите верные значения коэффициента *k* и константы *c*.

8. Уравнение $2x^4yy'+y^4=4x^6$ можно свести к однородному, осуществив замену $y=z^m(x)$. Определите значение показателя степени *m*, позволяющее это сделать.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Верные ответы	4	1; 3	1	2; 3; 4	3	2	*k*=2; *c*=1	*m*=1,5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

1) $y'+p(x)y=f(x)y^2$;

2) $y'+p(x)y=f(x)$;

3) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$;

4) $f(x)dx=g(y)dy$.

2. Интегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение можно методами *(перечислите все варианты ответов)*:

1) вариации постоянной;

2) Коши;

3) Бернулли;

4) подбором.

3. Выберите замену Бернулли для решения линейного дифференциального уравнения:

1) $y = uv$, $y' = u'x + u$;

2) $y = uv$, $y' = u'v + uv'$;

3) $y = \frac{u}{v}$, $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

4) $y' = yz$.

4. Укажите общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$:

1) $y = x^2 + x + C$;

2) $y = Cx^2 + x$;

3) $y = C\left(x^2 + x\right)$;

4) $y = x^2 + Cx$.

5. Решением задачи Коши $y' + y \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 2$ является функция $y = k\sin x + c\cos x$. Укажите верные значения для k и c:

1) k=0, c=2;

2) k=1, c=2;

3) k – любое, c=2;

4) k=1, c=1.

6. Решением задачи Коши $y' = 2xy + 3x$, $y(0) = \frac{1}{2}$ является функция $y = k + ce^{x^2}$. Найдите значения k и c.

7. Решение линейного уравнения $xy' = y + \ln x$ находят методом вариации произвольной постоянной, полагая $y(x) = x \cdot C(x)$. Определите $C(x)$:

1) $C(x) = C + \dfrac{1 - \ln x}{x}$;

2) $C(x) = C - \dfrac{1 + \ln x}{x}$;

3) $C(x) = Cx - \ln x$;

4) $C(x) = C + \dfrac{\ln^2 x}{2}$.

8. Укажите типы заданных дифференциальных уравнений:

1) $y' + p(x)y = f(x) \cdot y^2$;

2) $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

3) $y' + p(x)y = f(x)$;

4) $y' = f(x + y)$.

9. Установите соответствие между заданными дифференциальными уравнениями первого порядка и их типами:

а) $\left(2x + y^3\right)y' = y$,

б) $2x^2yy' + y^2 = 2$,

в) $y = x\left(y' - x\cos x\right)$,

г) $y\left(2x - y\right)dx + \left(x - y\right)^2 dy = 0$

1) однородное уравнение;

2) линейное относительно x;

3) линейное относительно y;

4) уравнение с разделяющимися переменными.

10. Уравнение Бернулли $y' - 2xy = x^2y^2$ приводится к линейному относительно функции $z(x)$ и ее производной путем замены:

1) $z(x)=\dfrac{1}{y(x)}$;

2) $z(x)=y^2(x)$;

3) $z(x)=\dfrac{1}{y^2(x)}$;

4) $z(x)=x^2y^2(x)$.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Верные ответы	2	1; 3	2	4	2	$k=-1,5$; $c=2$	2	1 – уравнение Бернулли; 2 – однородное уравнение; 3 – линейное уравнение; 4 – сводится к уравнению с разделяющимися переменными (подстановка $z=x+y$)	а2; б4; в3; г1	1

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1. Дифференциальное уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $U=U(x,y)$, полный дифференциал которой имеет вид:

1) $dU=U'_x dx+U'_y dy$;

2) $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$;

3) $dU=P'_x dx+Q'_y dy$;

4) $dU=P'_y dx+Q'_x dy$.

2. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ непрерывны в односвязной области *D*. Тогда чтобы уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ было

уравнением в полных дифференциалах, выполнение тождества $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$ для $\forall(x,y)\in D$ является условием:

1) необходимым;

2) достаточным;

3) необходимым и достаточным;

4) некорректным.

3. Пусть уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах и для функции $U=U(x,y)$ выполняется условие $dU=Pdx+Qdy$. Тогда общий интеграл уравнения задается формулой:

1) $U(x,y)=x$;

2) $U(x,y)=y$;

3) $U(x,y)=C$;

4) $U(x,y)=x+y$.

4. Является ли уравнение $\left(2^{xy}y\ln 2+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx-\left(\dfrac{3}{\sin^2 y}-2^{xy}x\ln 2\right)dy=0$ уравнением в полных дифференциалах?

5. Выберите среди приведенных уравнений *все* уравнения в полных дифференциалах:

1) $(4xy+3y-5x)dx+(2x^2+3x-7)dy=0$;

2) $(xy+e^x)dx-xdy=0$;

3) $(x^2+\sin y)dx+(x\cos y+\sin^2 y)dy=0$;

4) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

6. Общий интеграл уравнения $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$ имеет вид:

1) $2xy+\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}-3xy^2=C$;

2) $3x^2y^2 + x^3 = C$;

3) $x^2 + 2x^3y - y^3 = C$;

4) $x^2 + x^3y - y^3 = C$.

7. Укажите решение задачи Коши $\left(e^{x+y} + 3x^2\right)dx + \left(e^{x+y} + 4y^3\right)dy = 0,\ y(0) = 0$:

1) $xe^{x+y} + x^3 + ye^{x+y} + y^4 = 1$;

2) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$;

3) $e^{x+y} + 6x + 12y^2 = 1$;

4) $e^{x+y} + 3x^2y + 4xy^3 = 1$.

8. Среди предложенных функций выберите интегрирующий множитель μ для уравнения $\left(x + e^{-2x} + y^2\right)dx + ydy = 0$:

1) $\mu(x) = e^x$;

2) $\mu(y) = e^{2y}$;

3) $\mu(y) = e^y$;

4) $\mu(x) = e^{2x}$.

9. Среди предложенных функций выберите интегрирующий множитель μ для уравнения $\left(x^4 + x + x^2y^2\right)dx + ydy = 0$ *(укажите все варианты ответов)*:

1) $\mu(x) = e^{\frac{2x^3}{3}}$;

2) $\mu(y) = e^y$;

3) $\mu(xy) = (xy)^2$;

4) $\mu\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

10. Найдите интегрирующий множитель *(в виде функции только переменной x или переменной y)* и решите уравнение $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0$:

1) $e^x\left(x^2+y^2\right)=C$;

2) $e^y\left(x+y\right)=C$;

3) $2x+\ln\left(x^2+y^2\right)=C$;

4) $e^{2x}\left(x^2+y^2\right)=C$.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Верные ответы	2	3	3	да	1; 3	4	2	4	1; 4	3

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ КЛЕРО И ЛАГРАНЖА

1. Укажите *все* уравнения, не разрешенные относительно y':

1) $y'=\ln\left(1+y^2\right)$;

2) $x^3\cdot\left(y'\right)^2+\sin x-1=0$;

3) $\left(x+4\right)\sqrt{y'}=y'-2$;

4) $e^{yy'}=\ln x$.

2. Укажите *все* утверждения, верные для уравнений Клеро и Лагранжа:

1) уравнения Лагранжа являются частным случаем уравнений Клеро;

2) уравнения Клеро и Лагранжа решаются методом замены переменного;

3) уравнения Клеро являются частным случаем уравнений Лагранжа;

4) уравнения Клеро и Лагранжа решаются методом введения параметра.

3. Укажите *все* утверждения, верные относительно уравнения $y=xy'-\dfrac{1}{\left(y'\right)^2}$:

1) данное уравнение является уравнением Клеро;

2) его общее решение есть $y = Cx + \frac{1}{C} + C^2$;

3) данное уравнение является уравнением Лагранжа;

4) его общее решение есть $y = Cx - \frac{1}{C^2}$;

5) его особое решение задается функцией $4y^3 = -27x^2$.

4. Укажите *все* утверждения, верные относительно уравнения $y = 2xy' - 4(y')^3$:

1) данное уравнение является уравнением Клеро;

2) данное уравнение является уравнением Лагранжа;

3) его общее решение есть $x = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$, $y = 2p^3 + \frac{2C}{p}$;

4) его общее решение есть $x = 3p + \frac{C}{p}$, $y = 5p^3 + \frac{2C}{p^3}$;

5) его особое решение – функция $y = 0$;

6) уравнение не имеет особых решений.

5. Огибающей семейства кривых $(x - C)^2 + y^2 = 4C$ является:

1) $y^2 = 4x + 4$;

2) $x^4 + 4x = 0$;

3) $(x - y)^2 = 8$;

4) $y^2 + 4x = 0$.

6. Каждому из семейств линий

а) $y = Cx + C^2$,

б) $y = \frac{x}{C} + C^2$,

в) $C^2x + Cy - 1 = 0$,

г) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$

сопоставьте его огибающую:

1) $4y^3 = 27x^2$;

2) $(x-y)^2 = 8$;

3) $x^2 + 4y = 0$;

4) $y^2 + 4x = 0$.

Ключ к заданиям

Номер вопроса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Верные ответы	2; 3; 4	3; 4	1; 4; 5	2; 3; 5	1	а3; б1; в4; г2

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИЗ ИСТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Остановимся на вопросе накопления фактов, послуживших созданию теории дифференциальных уравнений.

Считается, что с задачами, в той или иной степени связанными с дифференциальными уравнениями, математики впервые встретились в начале XVII века, когда при создании таблиц логарифмов Дж. Непер положил в основу кинематическое представление о двух связанных между собой непрерывных прямолинейных движениях. Чуть позднее задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, появились в области математического естествознания. Здесь можно назвать проблему падения тела в среде без сопротивления, исследованную Г. Галилеем, а также «обратную задачу на касательные» (т.е. задачу об определении кривой, касательные к которой обладают некоторым свойством), поставленную и решенную Декартом после открытия в оптике закона преломления света.

Понятием дифференциального уравнения математики стали оперировать еще в период формирования дифференциального и интегрального исчисления. Сам же термин «дифференциальное уравнение» был предложен Лейбницем в письме к Ньютону в 1676 г. и вошел в обиход немного раньше. Многие вопросы геометрии, астрономии, физики не могли быть решены непосредственно действиями дифференцирования и интегрирования и требовали составления и решения некоторого уравнения, содержащего аргумент, неизвестную функцию и ее производную или дифференциал. В связи с этим зарождается именно теория решения дифференциальных уравнений.

Ряд дифференциальных уравнений был проинтегрирован Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1686). Ему же принадлежит общий метод получения интегралов уравнений в форме степен-

ного ряда. При этом использовалась идея способа неопределенных коэффициентов и последовательных приближений. Ньютон имел четкое представление о том, что для одного и того же дифференциального уравнения можно получить бесконечное множество решений, но запись общего решения с произвольной постоянной, осознавая ее важность, осуществил Иоганн Бернулли.

Лейбниц умел решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными, а в 1693 г. ему уже были известны способы, основанные на замене переменной, приведения однородных и линейных уравнений первого порядка к уравнениям с разделенными переменными. В то же время Лейбниц нашел метод неопределенных коэффициентов для интегрирования уравнений с помощью рядов. Вскоре был найден метод интегрирования уравнения Бернулли, применена идея интегрирующего множителя (И. Бернулли), найдены способы понижения порядка дифференциальных уравнений.

Таким образом, к началу XVIII века были изучены методы интегрирования простейших дифференциальных уравнений первого порядка и заложены основы классификации этих уравнений по способам решения. Однако рассмотрение данных вопросов в то время носило эмпирический, разрозненный характер и нет оснований говорить о какой-то общей теории дифференциальных уравнений к началу XVIII века. Но в то же время росло число задач, ведущих к дифференциальным уравнениям. Последние появлялись в большом количестве и в самых разнообразных формах. От их решения зависели судьбы новых законов и открытий в самых разнообразных областях естествознания и техники. Поэтому почти все крупные математики того времени включились в эту работу. Количество сочинений, посвященных соответствующим вопросам, огромно. Назовем лишь некоторые результаты.

Так, уже в 1724 г. итальянским математиком Я. Риккати было опубликовано подробное исследование уравнения, получившего позднее (1769), по предложению Даламбера, название уравнения Риккати (Риккати пришел к необходимости интегрировать уравнение соответствующего вида, изучая дифференциальное уравнение второго порядка, связанное с проблемой вычисления траектории движения тела).

Уравнения Риккати играют особую роль в теории дифференциальных уравнений. По своей структуре эти уравнения принадлежат к классу уравнений, следующему по сложности за линейными уравнениями. Они привлекали внимание исследователей с начала XVII века и продолжают привлекать сегодня. В разное время ими занимались Г. Лейбниц, Х. Гольдбах, Я. Бернулли, И. Бернулли, Л. Эйлер и многие другие (к результатам Эйлера в теории уравнения Риккати следует отнести метод непрерывных дробей, эффективный для средств машинной математики). Внимание математиков привлекали простота и изящество соотношений, возможность получения все новых, иногда весьма любопытных фактов, сравнительная простота методов исследования. Отметим, что кроме чисто аналитического интереса, уравнения Риккати играют важное прикладное значение – к ним приводятся многие задачи анализа, геометрии, механики, химии и других наук.

Именно с уравнения Риккати начинается методическая разработка теории дифференциальных уравнений. К примеру, Эйлер ввел термины частного и общего решения для обозначения уже известных понятий. Он также занимался различными вопросами решения линейных уравнений высших порядков. Даламбер в 1747 г. предложил общий метод приведения решения уравнения высшего порядка к решению системы совместных дифференциальных уравнений первого порядка. Несколько позднее (1766) он же установил, что общее решение неоднородного уравнения составляется из суммы его частного решения и общего решения однородного с те-

ми же коэффициентами. В это время Лагранж детально разработал известный уже Эйлеру метод вариации произвольных постоянных и применил его.

В применении метода интегрирующего множителя для уравнений первого порядка существенное участие принимали Ник. (II) Бернулли, А. Клеро, Л. Эйлер. Большой заслугой Эйлера было установление ряда классов дифференциальных уравнений, обладающих множителем заданного вида. Он же распространил метод интегрирующего множителя на уравнения высших порядков.

Большое значение для развития теории дифференциальных уравнений имела теория особых решений. Впервые такое решение встречается в работе Тейлора «Метод приращений» (1715), не понявшего, однако, его значения, но назвавшего его «некоторым особым решением задачи».

Несколько позднее (1734) Клеро нашел особое решение уравнения, носящего теперь его имя, и установил, что оно не содержится в общем интеграле уравнения. Статья Клеро побудила Даламбера (1748) к отысканию особого решения более общего уравнения, названного впоследствии именем Лагранжа. Еще ранее ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями рассмотрел Эйлер во втором томе «Механики» (1736). Позднее (1756) он, как и Клеро, установил, что такое решение уравнения можно получить дифференцированием и что оно не содержится в общем решении. Но тогда он еще не заметил связи особых решений с огибающими. Подробное изложение способа отыскания особого решения либо непосредственно из дифференциального уравнения, либо из общего интеграла дифференцированием по постоянной, а также геометрическую трактовку вопроса (связь с теорией огибающих) осуществил Лагранж (1774).

Задачи астрономии, прежде всего небесной механики, широко содействовали развитию приближенных способов интегрирования дифференциальных уравнений. Разработка этих методов оказала существенное

и непосредственное влияние на развитие такого важного раздела теории дифференциальных уравнений, как теоремы существования и единственности решений. После Ньютона к приближенному решению дифференциальных уравнений в форме специальных рядов прибегали Даламбер, Эйлер, Кондорсе. Эйлер разработал простой и широко известный метод приближенного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Позднее он послужил основанием одного из доказательств теоремы существования решения уравнения $y' = f(x, y)$. Ему же принадлежит идея представления решений дифференциальных уравнений в виде определенных интегралов, с помощью которых он искал сумму ряда, представляющего интеграл данного уравнения.

В XIX веке существенное развитие приближенные методы решения дифференциальных уравнений получили в работах О. Коши и его сотрудников. Особое внимание уделялось вопросам сходимости, оценкам погрешностей и т.д.

Геометрическая теория дифференциальных уравнений получила развитие главным образом в трудах Г. Монжа, весьма широко исследовавшего связь теории дифференциальных уравнений, теории поверхностей и пространственных кривых.

Большие успехи, достигнутые крупнейшими учеными XVIII века в решении дифференциальных уравнений, создали возможность для построения общей теории дифференциальных уравнений. Эта задача была выполнена Эйлером в трехтомном «Интегральном исчислении». Основная часть его принадлежит теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Здесь впервые дана их четкая классификация по методам решений. Этим завершался один из важнейших этапов в развитии классической теории дифференциальных уравнений.

Начало XIX века стало переломным периодом в развитии всей математики. В это время коренной перестройке подвергся весь фундамент ма-

тематического анализа. Обостренное отношение к понятию строгости пронизывает все звенья анализа, который из учения об отдельных функциях или специальных классах функций начал перестраиваться в общую теорию функций. Большое значение уделяется проблемам арифметического доказательства существования объектов анализа, определяемых с помощью бесконечных процессов.

В данных условиях логично было заметить пробел в прежней теории дифференциальных уравнений как совокупности частных приемов решения отдельных классов уравнений. Упоминаемые ранее общие методы не выдерживали критики новой теории. Перед математиками все более остро вставала проблема установления существования решения и определения его характера, исходя из вида уравнения. В данный период на развитие качественной теории дифференциальных уравнений, а также на решение ряда прикладных вопросов мощное влияние оказала теория аналитических функций. Ее применение к теории дифференциальных уравнений стало источником аналитической теории дифференциальных уравнений (Коши, Фукс, Пикар, Пуанкаре, Пенлеве и др.). Аналитическая теория дифференциальных уравнений исследует интегралы различных классов уравнений и устанавливает их характеристические свойства методами теории аналитических функций. В отличие от локального изучения, характерного для классической теории дифференциальных уравнений XVIII и начала XIX века, она рассматривает поведение решений уравнений во всей комплексной плоскости, начиная с вопросов об их существовании и однозначности, о типе и расположении особых точек и т. д.

В процессе своего развития аналитическая теория дифференциальных уравнений пользовалась результатами и методами дальше развивающейся общей теории дифференциальных уравнений действительного переменного, теории определителей и теории групп (в области линейных уравнений), теории алгебраических функций и теории ряда специальных

функций (для нелинейных уравнений первого и высших порядков). Некоторые отделы аналитической теории дифференциальных уравнений отпочковались от своей основы и существуют ныне как самостоятельные ветви математического анализа: теоремы существования и единственности, линейная теория, теория краевых задач и др.

За последние полвека сильно изменилось лицо качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из важных достижений является открытие предельных режимов, которые получили название аттракторов. Оказалось, что наряду со стационарными и периодическими предельными режимами возможны предельные режимы совершенно иной природы, а именно такие, в которых каждая отдельная траектория неустойчива, а само явление выхода на данный предельный режим структурно устойчиво. Открытие и подробное изучение для систем обыкновенных дифференциальных уравнений таких предельных режимов, называемых аттракторами, потребовало привлечения средств дифференциальной геометрии и топологии, функционального анализа и теории вероятностей. В настоящее время происходит интенсивное внедрение этих математических понятий в приложения. Так, например, ряд явлений, происходящих при переходе ламинарного течения в турбулентное, описываются аттрактором. Изучение аттракторов предпринято также и для уравнений с частными производными.

К важным достижениям можно отнести построение А.Н. Колмогоровым теории возмущений гамильтоновых систем, развитие теории бифуркаций, теории возмущений, теории релаксационных колебаний, создание теории оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями.

Таким образом, теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики. Можно сказать, что большая часть пу-

тей, связывающих абстрактные математические теории и естественнонаучные приложения, проходит через дифференциальные уравнения. Все это обеспечивает теории дифференциальных уравнений почетное место в современной науке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЭТО ИНТЕРЕСНО …

И. Ньютон (1643 – 1727 гг.)

По признанию самого Исаака Ньютона, он считал дифференциальные уравнения главным открытием в своей жизни.

При создании исчисления «флюксий» и «флюент» Ньютон ставил две задачи: по данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями; по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами.

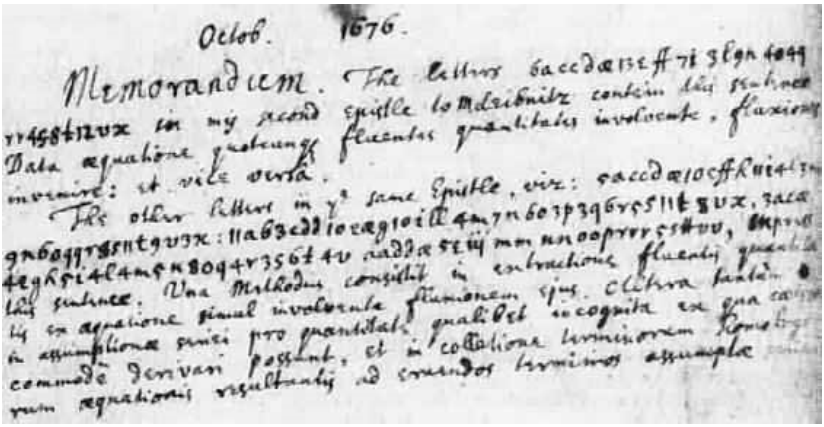
С современной точки зрения, первая из этих задач (вычисление по функциям их производных) относится к дифференциальному исчислению, а вторая составляет содержание теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачу нахождения неопределённого интеграла функции Ньютон рассматривал просто как частный случай его второй задачи. Такой подход был для Ньютона, в глазах которого математика играла вспомогательную роль в физических исследованиях, был вполне оправданным.

Свое главное открытие Ньютон счел нужным засекретить. Его сущность он сообщил в 1676 году в письме к Лейбницу, где рассказал о новом методе, привел результаты, достигнутые на его основе, а также примеры применения. В приведенном фрагменте упоминаемого письма содержится знаменитая зашифрованная строчка

6 aeccdae 13eff 7i 3l 9n 4o 4qrr 4s 9t 12vx.

Числовые коэффициенты, стоящие перед буквами, указывают, сколько раз данная буква повторяется в тексте зашифрованной фразы. Если знать, что

фраза написана по-латински, то при хорошем знакомстве с языком ее можно расшифровать. От этого, впрочем, дело не проясняется.


Octob. 1676.

Memorandum. The letters

Фрагмент письма Ньютона Лейбницу

В расшифрованном виде фраза была опубликована Ньютоном в знаменитом «Поучении» во второй книге «Начал», где говорится: «В письмах, которыми около десяти лет тому назад я обменивался с весьма искусным математиком Г. Лейбницем, я ему сообщал, что обладаю методом для определения максимумов и минимумов, проведения касательных и решения тому подобных вопросов, одинаково приложимых как для членов рациональных, так и для иррациональных, причем я метод скрыл, переставив буквы следующего предложения: *«Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества (флюенты), найти течения (флюксии) и наоборот»* (*«Dataaequationequotcunquefluentesquantitatesinvolventefluxionesinvenireetvic eversa» - авт.).* Знаменитейший муж отвечал мне, что он также напал на такой метод и сообщил мне свой метод, который оказался едва отличающимся от моего, и то только терминами и начертанием формул».

Ньютон, которого многие считают воплощением рациональности, с не меньшим рвением, чем математикой и механикой, занимался алхими-

ей и теологией. Он любил уединение и тайны, а результаты своих изысканий до поры прятал от посторонних глаз при помощи анаграмм и всякого рода головоломок.

Своеобразное мнение о великом ученом можно составить по следующему факту. Едва научившись читать и писать, Исаак Ньютон понял, что анаграмма его имени указывает на богоизбранность: в самом деле, никто не может отрицать, что *Isaacus Newtonus* дает *Ieovasanctusunus*. Путь решения этой анаграммы довольно витиеватый: две латинские буквы *u* (в английском языке название буквы произносится как «*ю*») в угадываемой фамилии сливаются в одну букву английского алфавита *w («дабл ю»*), которая отсутствовала в латинском алфавите.

Известно также, что факт своего рождения в день Рождества Ньютон, создатель классической физики, считал особым знаком судьбы, ведь он, подобно Спасителю, появился на свет в Рождество.

……

Отметим, что обычай скрывать еще не вполне обработанные результаты научной работы в виде анаграмм или шифров ранее был очень распространен, в том числе и в науке. Прямая цель при этом – предотвращение параллелизма в научных работах и сохранение за автором его прав на первенство.

Например, Даниил Бернулли, занимаясь поиском случаев сводимости к разделению переменных уравнения

$$x^n dq = du + \frac{u^2}{q} dx,$$

где $q = q(x,u)$, а n – число (сама задача была поставлена в 1724 году графом Якопо Риккати, пришедшим к необходимости интегрирования данного уравнения в связи с проблемой вычисления траектории тела), сообщил в

своей статье в журнале «Acta Eruditorum», что сам он, как и его братья Николай I, Николай II и отец Иоганн, решил задачу Риккати.

Д. Бернулли
(1700 – 1782 гг.)

При этом оказалось, что они пришли к одинаковому результату независимо друг от друга различными путями. Это давало Даниилу повод предполагать, что найденные ими случаи – единственно возможные. Тем не менее, свое решение он явно не сообщал, а записал его в виде криптограммы, чтобы *дать возможность другим математикам испытать свои силы в решении задачи*.

Полностью решение Д. Бернулли было опубликовано через два года.

……

«Поскольку прямая есть кратчайшее расстояние между точками, то можно было бы думать, что движение, совершающееся по ней, требует наименьшего времени. На самом деле это не так».

Г. Галилей

Слова Галилея, взятые в качестве эпиграфа к очередному этюду, отражают результаты экспериментов ученого, показавшие, что *движение по дуге кривой быстрее, чем по хорде*. Остается только вопрос: какая же кривая соответствует кратчайшему времени движения, т е. является брахистохроной (по-гречески – наибыстрейшей)?

В июньском номере журнала «Acta Eruditorum» за 1696 год была помещена заметка швейцарского ученого Иоганна Бернулли с интригующим заглавием: «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Вот эта задача: «*В вертикальной плоскости даны точки A и B.*

Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, достигнет точки B в кратчайшее время».

Многие математики откликнулись на «приглашение» И. Бернулли (он, разумеется, располагал своим решением). Одним из первых был Лейбниц. Затем сообщили о своих успехах Якоб Бернулли (брат Иоганна) и Лопиталь. Было получено также одно безымянное решение, в котором знатоки exungeleonem («как по когтям узнают льва») сразу же узнали Ньютона.

Г. Лейбниц
(1646 – 1716 гг.)

Я. Бернулли
(1655 – 1705 гг.)

Г. Лопиталь
(1661 – 1704 гг.)

Часто случается, что постановка новой проблемы привлекает внимание многих выдающихся ученых. Соревнуясь друг с другом, они создают мощные методы решения задач, которые потом щедро служат науке. Так вышло и с задачей И. Бернулли.

Все полученные решения были очень содержательны. Но наибольшую популярность получило решение самого автора (подробно с ним можно ознакомиться, например, в [13]). Отметим лишь, что свое решение И. Бернулли свел к интегрированию *дифференциального уравнения*

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\sqrt{f(x)}=C,$$

где $y = f(x)$ – искомая функция, а C – некоторая константа. В результате им было получено уравнение

$$x = \frac{C}{2}(t - \sin t) + \tilde{C}, \qquad y = \frac{C}{2}(1 - \cos t),$$

задающее *циклоиду*. К аналогичному результату пришли и все упомянутые выше авторы решений.

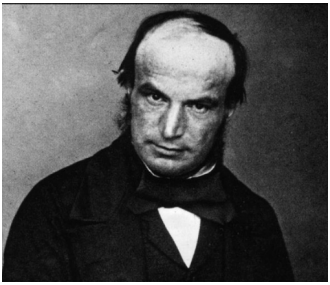
Отметим, что циклоида («связанная с кругом») впервые появилась в работах Галилея, т. е. во времена И. Бернулли уже была известна.

В отношении этой поистине замечательной кривой можно сказать следующее.

Во-первых, она послужила своеобразным полигоном, на котором проверялись новые виды оружия, впоследствии поступившего в арсенал математического анализа. К примеру, в своем решении задачи о брахистохроне-циклоиде Лейбниц применил прием, развитый затем Эйлером. Ныне метод Лейбница–Эйлера является одним из основных методов решения задач на максимум и минимум – это так называемый прямой метод в вариационном исчислении. Я. Бернулли основывал свое решение на принципе Гюйгенса и, таким образом, сделал шаг к созданию теории Гамильтона–Якоби.

Во-вторых, главные кривые античности – окружность, эллипс, гипербола и парабола. И все. Причем даже спустя столетия первые законы механики не вывели ученых за пределы этого запаса кривых: планеты движутся по эллипсам, а брошенные тела летят по параболам. И лишь циклоида стала первой «неантичной» кривой, которая оказалась связанной с законами природы.

……



Д. Адамс (1819 – 1892 гг.)

С решением дифференциальных уравнений определенным образом связано открытие планеты Нептун. Английский астроном и математик Джон Кауч Адамс в 1843 году, исследуя неправильности в движении Урана, пришел к заключению, что они вызваны неизвестной планетой. Для решения данной проблемы Адамс разработал математические методы, применяемые и в настоящее время (так называемый метод Адамса, *разностный метод численного интегрирования дифференциальных уравнений*).

Рассчитав элементы эллиптической орбиты, массу и гелиоцентрическую долготу гипотетической планеты, Адамс в сентябре 1845 года представил свои результаты директору Кембриджской обсерватории. Однако тот не воспринял предсказание всерьез и воздержался от поисков. В результате пальма первенства и всемирная слава достались парижанину Урбену Леверье, который независимо от Адамса выполнил аналогичные расчеты, опубликовал их, а также убедил немецкого телескописта И. Галле немедленно приступить к поискам новой планеты. Их стараниями 23 сентября 1846 года Нептун был открыт. Правда, современники вскоре во всем разобрались и признали заслуги талантливого британца.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. Глава 13. Математические исследования Ньютона. Спор с Лейбницем – М. –Л.: Изд. АН СССР, 1945.
URL: http://vivovoco.astronet.ru/VV/BOOKS/NEWTON/CHAPTER_13.HTM

2. *Добровольский В. А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений – Киев: «Вища школа», 1974.

3. *Ефишов И. И.* Таинственные страницы. Занимательная криптография – М.: «Манн, Иванов и Фербер», 2016.

4. *Журавлев С. Г., Аниковский В. В.* Дифференциальные уравнения: Сборник задач: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук: Учебное пособие для вузов – М.: «Экзамен», 2005.

5. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу– М.: Высш. школа, 1964.

6. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике – М.: Высш. школа, 1983.

7. *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981.

8. *Матвеев Н. М.* Дифференциальные уравнения. – Минск: Вышэйш. школа, 1976.

9. *Олейник О. А.* Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях //
URL: http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/87.html

10. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2. – М.: Наука, 1978.

11.*Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.

12. Тестовые задания по дифференциальных уравнениям каф.высшей математики РХТУ им. Д.И. Менделеева //

URL: http://fen.distant.ru/test/math/4/test-4.htm

13. *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

14.*Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 4-е изд. – М.: URSS, 2011.

15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения. 7-е изд. М.: URSS, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

	ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1.	ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	4
2.	УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ	7
3.	УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ	14
4.	ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ	16
5.	УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ	21
6.	ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	24
7.	УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ	31
8.	УРАВНЕНИЕ РИККАТИ	35
9.	УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ	37
10.	НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО	50
11.	ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	63
12.	ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ	74
	ПРИЛОЖЕНИЯ	79
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	79

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ИЗ ИСТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 94
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ЭТО ИНТЕРЕСНО 102

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 109

Учебное издание

Сергей Иванович Калинин,
Лариса Валерьевна Панкратова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Учебное пособие

Компьютерная верстка, обложка *Р.В. Орлов*

ISBN 978-5-907208-23-0

9 785907 208230

Подписано в печать 10.04.2020.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 8,1.
Бумага типографская. Заказ №1004ОД
Тираж 500 экз.

По вопросам приобретения
и издания литературы обращаться по адресу:
Издательство «Научно-инновационный центр»
ул. 9 Мая, 5/192, г. Красноярск, 660127 Россия
тел. +7 (923) 358-10-20
Электронная почта: monography@nkras.ru
Дополнительная информация на сайте: www.nkras.ru