

**GENERAL PROCEDURE FOR DETERMINING THE  
CF-APPROXIMATION OF A POLYHEDRON STEMMING FROM THE  
CLD.**

Merano April/June 2020

```
In[1]:= SetDirectory["/Users/salvino/Desktop/WORK_IN_PRGS/PLATONIC_SOLD_CF_APPRXMTN"];
Directory[]
```

```
Out[2]:= /Users/salvino/Desktop/WORK_IN_PRGS/PLATONIC_SOLD_CF_APPRXMTN
```

We know the truncated left and right expansion of the second derivative of the CF around  $r=D1$  and  $r=D2$ .  
The two expansions are

$$\gamma_L''(r) \approx \sum_{h=0}^{2K} a_h x^{h/2} \quad \text{with } x=r-D1 = \xi^2$$

and  $\gamma_R''(r) \approx \sum_{h=0}^{2K} b_h y^{h/2} \quad \text{with } y=D2-r = \eta^2.$

Put ;

$$P_L(r) = (D2 - r)^{K+5/2} \sum_{m=0} p_m (r - D1)^{m/2} ,$$

$$Q_R(r) = (r - D1)^{K+5/2} \sum_{m=0} q_m (D2 - r)^{m/2}$$

and determine the  $p_m$ 's and the  $q_m$ 's in such a way that:

i)  $[1 + P_L(r)] \gamma_L''(r) \approx \gamma_L''(r)$  around  $r=D1$  and  $[1 + P_L(r)] \gamma_L''(r) \approx 0$  around  $r=D2$

ii)  $[1 + Q_R(r)] \gamma_R''(r) \approx \gamma_R''(r)$  around  $r=D2$  and  $[1 + Q_R(r)] \gamma_R''(r) \approx 0$  around  $r=D1$ .

The approximation of the CLD, in each subinterval, is

$$\gamma''(r) \approx \Gamma''[r] = [1 + P_L(r)] \gamma_L''(r) + [1 + Q_R(r)] \gamma_R''(r)$$

and that of the CF is either

$$\gamma(r) \approx \Gamma_R[r] = \int_r^{D2} dx \int_x^{D2} dy \Gamma''[y] + (a+b)r$$

or

$$\gamma(r) \approx \Gamma_L[r] = \int_{D1}^r dx \int_{D1}^x dy \Gamma''[y] + (a+b)r.$$

The unknown constants  $a$  and  $b$  are determined requiring the continuity at the left or right end of the considered subinterval.

This procedure differs from that considered in the file ANALYTIC\_APPROXMTN\_CF\_CLD\_BB.nb because we first approximate the CLD and then approximate the CF as the double integral of the CLD approximation.

We confine ourselves to the cases:  $0 \leq K \leq 2.$

```

Clear[K]; Clear[cflft]; Clear[cfrgt];
Clear[a0]; Clear[a1]; Clear[a2]; Clear[a3]; Clear[a4]; Clear[a5];
Clear[a6]; Clear[a7]; Clear[a8]; Clear[a9]; Clear[a10];
Clear[b0]; Clear[b1]; Clear[b2]; Clear[b3]; Clear[b4]; Clear[b5];
Clear[b6]; Clear[b7]; Clear[b8]; Clear[b9]; Clear[b10];
(* Coefficients of the expansion of the 2nd derivaive around D1 and D2 *)
cflft = {a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10};
cfrgt = {b0, b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10};
(* expansions of the CLD around the left
and right ends of the considered interval D[1, D2] *)
Lft2ndDrv[r_, K_] := If[K < 4, Sum[cflft[[i]] * (r - D1)^(i-1)/2, {i, 1, 2 K + 1}]];
Rgt2ndDrv[r_, K_] := If[K < 4, Sum[cfrgt[[i]] * (D2 - r)^(i-1)/2, {i, 1, 2 K + 1}]];
(* we construct a function IntrplngLft2ndDrv[r,K] such that
its expansions around the left and the right ends fs the considered
subinterval respectively ecoincide Lft2ndDrv[r,K] and Rgt2ndDrv[r,K] *)
Clear[K];
(* the previous functions are expressed in terms of the new variable
 $\xi = \sqrt{r-D1}$  and  $\eta = \sqrt{D2-r}$  such that  $\xi^2 + \eta^2 = D2-D1 = \Delta$  *)
GLftNw[ $\xi$ _, K_] := If[K < 4, Sum[cflft[[i]] * ( $\xi$ )^(i-1), {i, 1, 2 K + 1}]];
GRgtNw[ $\eta$ _, K_] := If[K < 4, Sum[cfrgt[[i]] * ( $\eta$ )^(i-1), {i, 1, 2 K + 1}]];
pcf = {p0, p2, p4, p6, p8, p10, p12}; qcf = {q0, q2, q4, q6, q8, q10, q12};
Plft[ $\xi$ _,  $\eta$ _, K_] := If[K < 4,  $\xi^{2K+1}$  Sum[pcf[[i]]  $\eta^{2(i-1)}$ , {i, 1, K + 2}]];
Prgt[ $\xi$ _,  $\eta$ _, K_] := If[K < 4,  $\eta^{2K+1}$  Sum[qcf[[i]]  $\xi^{2(i-1)}$ , {i, 1, K + 2}]];
(* provided pcf and qcf are suitably determined the expansions
of GLftApprx[ $\xi, \eta, K$ ] around  $\xi=0$  and  $\eta=0$  respectively coincide
with GLftNw[ $\xi, K$ ] and 0 up to terms  $O(\xi^{2K+6})$  or  $O(\eta^{2K+6})$ . The same
happens for GLftApprx[ $\xi, \eta, K$ ]. *)
GLftApprx[ $\xi$ _,  $\eta$ _, K_] := (1 + Plft[ $\xi, \eta, K$ ]) * GLftNw[ $\xi, K$ ];
GRgtApprx[ $\xi$ _,  $\eta$ _, K_] := (1 + Prgt[ $\xi, \eta, K$ ]) * GRgtNw[ $\eta, K$ ];
CLDApprxNotS[ $\xi$ _,  $\eta$ _, K_] := GLftApprx[ $\xi, \eta, K$ ] + GRgtApprx[ $\xi, \eta, K$ ];
NEXCintgrnd[r_, D1_, D2_, a_, b_, K_] := (r - D1)^(K + 1) (D2 - r)^(K + 1) (a + b (r - D1));

```

CHECKS: It is checked that the above definitions are consistent

```

Simplify[Lft2ndDrv[r, 3] - GLftNw[ $\sqrt{r - D1}$ , 3], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Rgt2ndDrv[r, 3] - GRgtNw[ $\sqrt{D2 - r}$ , 3], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

Determination of the polynomials Plft[ $\xi, \eta, K$ ] and Prgt[ $\xi, \eta, K$ ]

imposing that  $(1 + \text{Plft}[\xi, \eta, K])$  and  $(1 + \text{Prgt}[\xi, \eta, K])$  respectively are  $(o(D2 - r))^K$  and  $(o(r - D1))^K$

**K=0**

```

Plft[ $\xi, \eta, 0$ ]
Prgt[ $\xi, \eta, 0$ ]

```

```

Simplify[With[{K = 0}, Plft[ $\xi, \sqrt{\Delta - \xi^2}, 0$ ]], Assumptions -> {0 <  $\xi$  <  $\sqrt{\Delta}$  &&  $\Delta > 0$ }]

```

```

(Simplify[With[{K = 0}, Series[1 + Plft[ $\sqrt{r - D1}, \sqrt{D2 - r}, K$ ], {r, D2, K + 1}]],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}])

```

```

cfpdetrmtn = Simplify[CoefficientList[
  (((1 + Sqrt[-D1 + D2] p0) + ((p0 + 2 (D1 - D2) p2) (r - D2)) / (2 Sqrt[-D1 + D2])) /. {r -> D2 - x} /. {D2 -> D1 + Δ}], x]]
Solve[{cfpdetrmtn[[1]] == 0}, p0]

Solve[{{(cfpdetrmtn[[2]]) /. {p0 -> -1/Sqrt[Δ]} == 0}, p2]

(Simplify[With[{K = 0}, Series[1 + Prgt[Sqrt[r - D1], Sqrt[D2 - r], K], {r, D1, K + 1}]],
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]]

cfqdetrmtn = Simplify[CoefficientList[
  (((1 + Sqrt[-D1 + D2] q0) + ((-q0 - 2 D1 q2 + 2 D2 q2) (r - D1)) / (2 Sqrt[-D1 + D2])) /. {r -> D1 + x} /. {D2 -> D1 + Δ}], x]]
Solve[{cfqdetrmtn[[1]] == 0}, q0]

Solve[{{(cfqdetrmtn[[2]]) /. {q0 -> -1/Sqrt[Δ]} == 0}, q2]

```

■ The solutions for the pn's and the qn's are

K = 0 :

$$\left\{ p_0 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, p_2 \rightarrow -\frac{1}{2 \Delta^{3/2}} \right\}$$

$$\left\{ p_0 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, p_2 \rightarrow -\frac{1}{2 \Delta^{3/2}} \right\}$$

```

With[{K = 0}, (((1 + Plft[Sqrt[r - D1], Sqrt[D2 - r], K]) /. {p0 -> -1/Sqrt[Δ], p2 -> -1/(2 Δ^{3/2})})]
With[{K = 0}, (((1 + Prgt[Sqrt[r - D1], Sqrt[D2 - r], K]) /. {q0 -> -1/Sqrt[Δ], q2 -> -1/(2 Δ^{3/2})})]

(* LeftCLD00[r_, D1_, D2_] *)
FullSimplify[(((1 + Sqrt[-D1 + r] (- (D2 - r) / (2 Δ^{3/2}) - 1/Sqrt[Δ])) GLftNw[Sqrt[r - D1], 0]) /. {Δ -> D2 - D1}),
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

(* RgtCLD00[r_, D1_, D2_] *) FullSimplify[
  (((1 + Sqrt[D2 - r] (- (D1 + r) / (2 Δ^{3/2}) - 1/Sqrt[Δ])) GRgtNw[Sqrt[D2 - r], 0]) /. {Δ -> D2 - D1}),
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

```

LeftCLD00[r_, D1_, D2_] := a0  $\left( 1 + \frac{\sqrt{-D1 + r} (2 D1 - 3 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right);$ 

RgtCLD00[r_, D1_, D2_] := b0  $\left( 1 - \frac{\sqrt{D2 - r} (-3 D1 + 2 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right);$ 

CLDApprx00[r_, D1_, D2_] := LeftCLD00[r, D1, D2] + RgtCLD00[r, D1, D2];

```

```

Series[LeftCLD00[r, D1, D2], {r, D1, 2}]
Series[LeftCLD00[r, D1, D2], {r, D2, 2}]
Series[RgtCLD00[r, D1, D2], {r, D2, 2}]
Series[RgtCLD00[r, D1, D2], {r, D1, 2}]

```

```

Simplify[
Integrate[Integrate[LeftCLD00[y, D1, D2], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
{x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}] +
Integrate[Integrate[RgtCLD00[y, D1, D2], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
{x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

```

Simplify[
Integrate[Integrate[LeftCLD00[y, D1, D2], {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
{x, D1, r}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}] +
Integrate[Integrate[RgtCLD00[y, D1, D2], {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
{x, D1, r}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

```

LeftCLD00[r_, D1_, D2_] := a0  $\left( 1 + \frac{\sqrt{-D1 + r} (2 D1 - 3 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right);$ 

RgtCLD00[r_, D1_, D2_] := b0  $\left( 1 - \frac{\sqrt{D2 - r} (-3 D1 + 2 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right);$ 

CLDApprx00[r_, D1_, D2_] := LeftCLD00[r, D1, D2] + RgtCLD00[r, D1, D2];

LEFTCFApprx00[r_, D1_, D2_] := b0  $\left( \frac{D2^2}{2} - D2 r + \frac{r^2}{2} - \frac{2 (D2 - r)^{5/2} (-7 D1 + 6 D2 + r)}{35 (-D1 + D2)^{3/2}} \right) +$ 

 $\frac{1}{70 (D1 - D2)} a0 \left( -24 D1^3 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} + 28 D1^2 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} + 44 D1^2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r - \right.$ 

 $56 D1 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r - 16 D1 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^2 + 28 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^2 -$ 

 $4 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^3 + (D1 - D2) (24 D1^2 + 8 D1 D2 + 3 D2^2 - 14 (4 D1 + D2) r + 35 r^2) \left. \right);$ 

RGHTCFApprx00[r_, D1_, D2_] := a0  $\left( \frac{D1^2}{2} - D1 r + \frac{r^2}{2} - \frac{2}{35} (D1 - r) \left( \frac{D1 - r}{D1 - D2} \right)^{3/2} (6 D1 - 7 D2 + r) \right) -$ 

 $\frac{1}{70 (-D1 + D2)^{3/2}} b0 \left( 3 D1^3 \sqrt{-D1 + D2} - 24 D2^3 (\sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r}) + \right.$ 

 $D1^2 \sqrt{-D1 + D2} (5 D2 - 14 r) + D2^2 (56 \sqrt{-D1 + D2} - 44 \sqrt{D2 - r}) r +$ 

 $D2 (-35 \sqrt{-D1 + D2} + 16 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 4 \sqrt{D2 - r} r^3 + D1 (4 D2^2 (4 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{D2 - r}) +$ 

 $D2 (-42 \sqrt{-D1 + D2} + 56 \sqrt{D2 - r}) r + 7 (5 \sqrt{-D1 + D2} - 4 \sqrt{D2 - r}) r^2 \left. \right);$ 

```

CHECKS :

```

Simplify[D[D[RGHTCFApprx00[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx00[r, D1, D2],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[D[D[LEFTCFApprx00[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx00[r, D1, D2],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx00[r, D1, D2], {r, D1, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx00[r, D1, D2], {r, D2, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

## K=1

```

(Simplify[With[{K = 1}, Series[1 + Plft[√(r - D1), √(D2 - r), K], {r, D2, K + 1}]],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]]

```

```
cfpdetrmtn =
```

```

Simplify[CoefficientList[(((1 + (-D1 + D2)^(3/2) p0) + 1/2 √(-D1 + D2) (3 p0 + 2 (D1 - D2) p2) (r - D2) +
(3 p0 + 4 (D1 - D2) (3 p2 + 2 (D1 - D2) p4) (r - D2)^2) / (8 √(-D1 + D2)) /. {r ->
D2 - x}) /. {D2 -> D1 + Δ}], x]]

```

```
Solve[{cfpdetrmtn[[1]] == 0}, p0]
```

```
Solve[{{(cfpdetrmtn[[2]]) /. {p0 -> -1/Δ^(3/2)}} == 0}, p2]
```

```
Solve[{{(cfpdetrmtn[[3]]) /. {p0 -> -1/Δ^(3/2), p2 -> -3/(2 Δ^(5/2))}} == 0}, p4]
```

```

(Simplify[With[{K = 1}, Series[1 + Prgt[√(r - D1), √(D2 - r), K], {r, D1, K + 1}]],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]]

```

```
cfqdetrmtn = Simplify[
```

```

CoefficientList[(((1 + (-D1 + D2)^(3/2) q0) - 1/2 (√(-D1 + D2) (3 q0 + 2 (D1 - D2) q2) (r - D1) +
(3 q0 + 4 (D1 - D2) (3 q2 + 2 (D1 - D2) q4) (r - D1)^2) / (8 √(-D1 + D2)) /. {r ->
x + D1}) /. {D2 -> D1 + Δ}], x]]

```

```
Solve[{cfqdetrmtn[[1]] == 0}, q0]
```

```
Solve[{{(cfqdetrmtn[[2]]) /. {q0 -> -1/Δ^(3/2)}} == 0}, q2]
```

```
Solve[{{(cfqdetrmtn[[3]]) /. {q0 -> -1/Δ^(3/2), q2 -> -3/(2 Δ^(5/2))}} == 0}, q4]
```

- The solutions for the pn's and the qn's are

$K = 1$  :

$$\left\{ p_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{3/2}}, p_2 \rightarrow -\frac{3}{2 \Delta^{5/2}}, p_4 \rightarrow -\frac{15}{8 \Delta^{7/2}} \right\}$$

$$\left\{ q_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{3/2}}, q_2 \rightarrow -\frac{3}{2 \Delta^{5/2}}, q_4 \rightarrow -\frac{15}{8 \Delta^{7/2}} \right\}$$

With  $\{K = 1\}$ ,

$$\left( \left( \left( 1 + \text{Plft}[\sqrt{r - D1}, \sqrt{D2 - r}, K] \right) / \left\{ p_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{3/2}}, p_2 \rightarrow -\frac{3}{2 \Delta^{5/2}}, p_4 \rightarrow -\frac{15}{8 \Delta^{7/2}} \right\} \right) \right)$$

$$\text{With} \{K = 1\}, \left( \left( \left( 1 + \text{Prgt}[\sqrt{r - D1}, \sqrt{D2 - r}, K] \right) / \left\{ q_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{3/2}}, q_2 \rightarrow -\frac{3}{2 \Delta^{5/2}}, q_4 \rightarrow -\frac{15}{8 \Delta^{7/2}} \right\} \right) \right)$$

(\* LeftCLD11[r\_, D1\_, D2\_] \*) FullSimplify[

$$\left( \left( \left( 1 + (-D1 + r)^{3/2} \left( -\frac{15 (D2 - r)^2}{8 \Delta^{7/2}} - \frac{3 (D2 - r)}{2 \Delta^{5/2}} - \frac{1}{\Delta^{3/2}} \right) \right) \text{GLftNw}[\sqrt{r - D1}, 1] \right) / \{\Delta \rightarrow D2 - D1\}, \right.$$

Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$  ]

(\* RgtCLD11[r\_, D1\_, D2\_] \*) FullSimplify[

$$\left( \left( \left( 1 + (D2 - r)^{3/2} \left( -\frac{15 (-D1 + r)^2}{8 \Delta^{7/2}} - \frac{3 (-D1 + r)}{2 \Delta^{5/2}} - \frac{1}{\Delta^{3/2}} \right) \right) \text{GRgtNw}[\sqrt{D2 - r}, 1] \right) / \{\Delta \rightarrow D2 - D1\}, \right.$$

Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$  ]

$$\text{LeftCLD11}[r_, D1_, D2_] := (a_0 + a_1 \sqrt{-D1 + r} + a_2 (-D1 + r))$$

$$\left( 1 - \frac{(-D1 + r)^{3/2} (8 D1^2 + 35 D2^2 - 42 D2 r + 15 r^2 + 4 D1 (-7 D2 + 3 r))}{8 (-D1 + D2)^{7/2}} \right);$$

$$\text{RgtCLD11}[r_, D1_, D2_] := (b_0 + b_1 \sqrt{D2 - r} + b_2 (D2 - r))$$

$$\left( 1 - \frac{(D2 - r)^{3/2} (35 D1^2 + 8 D2^2 + 12 D2 r + 15 r^2 - 14 D1 (2 D2 + 3 r))}{8 (-D1 + D2)^{7/2}} \right);$$

$$\text{CLDApprx11}[r_, D1_, D2_] := \text{LeftCLD11}[r, D1, D2] + \text{RgtCLD11}[r, D1, D2];$$

Series[LeftCLD11[r, D1, D2], {r, D1, 2}]

Series[LeftCLD11[r, D1, D2], {r, D2, 2}]

Series[RgtCLD11[r, D1, D2], {r, D2, 2}]

Series[RgtCLD11[r, D1, D2], {r, D1, 2}]

LEFTCFApprx11NotS[r\_, D1\_, D2\_] :=

Integrate[Integrate[LeftCLD11[y, D1, D2], {y, x, D2}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < x < D2\}$ ],

{x, r, D2}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ] +

Integrate[Integrate[RgtCLD11[y, D1, D2], {y, x, D2}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < x < D2\}$ ],

{x, r, D2}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ];

FullSimplify[LEFTCFApprx11NotS[r, D1, D2], Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ]

RGHTCFApprx11NotS[r\_, D1\_, D2\_] :=

Simplify[Integrate[Integrate[LeftCLD11[y, D1, D2], {y, D1, x},

Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < x < D2\}$ ], {x, D1, r}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ] +

Integrate[Integrate[RgtCLD11[y, D1, D2], {y, D1, x}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < x < D2\}$ ],

{x, D1, r}, Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ], Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ];

FullSimplify[RGHTCFApprx11NotS[r, D1, D2], Assumptions  $\rightarrow \{0 < D1 < r < D2\}$ ]

$$\begin{aligned}
\text{LeftCLD11}[r\_ , D1\_ , D2\_ ] &:= \left( a0 + a1 \sqrt{-D1 + r} + a2 (-D1 + r) \right) \\
&\left( 1 - \frac{(-D1 + r)^{3/2} (8 D1^2 + 35 D2^2 - 42 D2 r + 15 r^2 + 4 D1 (-7 D2 + 3 r))}{8 (-D1 + D2)^{7/2}} \right); \\
\text{RgtCLD11}[r\_ , D1\_ , D2\_ ] &:= \left( b0 + b1 \sqrt{D2 - r} + b2 (D2 - r) \right) \\
&\left( 1 - \frac{(D2 - r)^{3/2} (35 D1^2 + 8 D2^2 + 12 D2 r + 15 r^2 - 14 D1 (2 D2 + 3 r))}{8 (-D1 + D2)^{7/2}} \right); \\
\text{CLDApprx11}[r\_ , D1\_ , D2\_ ] &:= \text{LeftCLD11}[r, D1, D2] + \text{RgtCLD11}[r, D1, D2]; \\
\text{LEFTCFApprx11}[r\_ , D1\_ , D2\_ ] &:= \\
&-\frac{1}{205920 (-D1 + D2)^{7/2}} \left( 429 b1 (D2 - r)^2 \left( 175 D1^2 (D2 - r)^2 + 128 D1^3 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} - \right. \right. \\
&\quad 384 D1^2 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 384 D1 D2^2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} - 128 D2^3 \\
&\quad \left. \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} - 14 D1 (D2 - r)^2 (16 D2 + 9 r) + (D2 - r)^2 (79 D2^2 + 66 D2 r + 30 r^2) \right) + \\
&429 a1 \left( 128 D1^6 - 21 D2^6 + 70 D2^5 r + 175 D2^2 r^4 - 126 D2 r^5 + 30 r^6 - \right. \\
&\quad 128 D2^3 r^2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + 64 D1^5 \left( -7 D2 - 5 r + 2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) - 16 D1^4 \\
&\quad \left. \left( -35 D2^2 - 70 D2 r - 15 r^2 + 24 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + 16 r \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
&\quad D1^2 \left( 35 D2^4 - 5 r^4 + 6 D2^2 r \left( 175 r - 128 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
&\quad \left. D2^3 \left( 700 r - 128 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + 4 D2 r^2 \left( 35 r - 96 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
&\quad 8 D1^3 \left( -35 D2^3 + r^2 \left( -5 r + 16 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
&\quad \left. 3 D2 r \left( -35 r + 32 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + D2^2 \left( -175 r + 48 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
&\quad D1 \left( 56 D2^5 - 350 D2^4 r + 256 D2^3 \sqrt{(D1 - D2) (D1 - r)} r + 280 D2 r^4 - 54 r^5 + \right. \\
&\quad \left. 4 D2^2 r^2 \left( -175 r + 96 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) \Big) - 80 \\
&\left( (D2 - r)^2 \left( -39 b0 \left( 33 D1^3 \sqrt{-D1 + D2} + D2^3 \left( -33 \sqrt{-D1 + D2} + 16 \sqrt{D2 - r} \right) - 4 D2^2 \sqrt{D2 - r} r - \right. \right. \right. \\
&\quad 7 D2 \sqrt{D2 - r} r^2 - 5 \sqrt{D2 - r} r^3 - 33 D1^2 \left( 3 D2 \sqrt{-D1 + D2} - D2 \sqrt{D2 - r} + \sqrt{D2 - r} r \right) + \\
&\quad 11 D1 \left( D2^2 \left( 9 \sqrt{-D1 + D2} - 4 \sqrt{D2 - r} \right) + 2 D2 \sqrt{D2 - r} r + 2 \sqrt{D2 - r} r^2 \right) \Big) + \\
&\quad b2 (D2 - r) \left( -429 D1^3 \sqrt{-D1 + D2} + D2^3 \left( 429 \sqrt{-D1 + D2} - 304 \sqrt{D2 - r} \right) + \right. \\
&\quad 28 D2^2 \sqrt{D2 - r} r + 141 D2 \sqrt{D2 - r} r^2 + 135 \sqrt{D2 - r} r^3 + \\
&\quad 143 D1^2 \left( 9 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 5 D2 \sqrt{D2 - r} + 5 \sqrt{D2 - r} r \right) - \\
&\quad \left. 13 D1 \left( D2^2 \left( 99 \sqrt{-D1 + D2} - 68 \sqrt{D2 - r} \right) + 26 D2 \sqrt{D2 - r} r + 42 \sqrt{D2 - r} r^2 \right) \right) \Big) - \\
&39 a0 \left( -5 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 22 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r - 33 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r^2 + 33 D2^2 r^3 \sqrt{-D1 + r} - \right. \\
&\quad 22 D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 5 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 16 D1^5 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
&\quad \left. 4 D1^4 \left( -9 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 11 \sqrt{-D1 + D2} r + 11 D2 \sqrt{-D1 + r} + 9 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& D1^3 \left( D2^2 \left( 17 \sqrt{-D1 + D2} - 33 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^2 \left( 33 \sqrt{-D1 + D2} - 17 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 110 D2 r \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + D1 \left( 3 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 22 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r + \right. \\
& \quad \left. 22 D2 r^3 \sqrt{-D1 + r} - 3 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 99 D2^2 r^2 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^2 \left( 5 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} - 5 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 33 D2 r^2 \left( -3 \sqrt{-D1 + D2} + 2 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 33 D2^2 r \left( -2 \sqrt{-D1 + D2} + 3 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
a2 & \left( 70 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} - 195 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r + 429 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r^3 - 715 D2^2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
& \quad \left. 546 D2 r^5 \sqrt{-D1 + r} - 135 r^6 \sqrt{-D1 + r} + 304 D1^6 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& D1^5 \left( -732 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 1092 \sqrt{-D1 + D2} r + 884 D2 \sqrt{-D1 + r} + 940 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
& D1^4 \left( D2^2 \left( 387 \sqrt{-D1 + D2} - 715 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 26 D2 r \left( 111 \sqrt{-D1 + D2} - 115 \sqrt{-D1 + r} \right) + 9 r^2 \left( 143 \sqrt{-D1 + D2} - 95 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^2 \left( 75 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 663 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r - 10 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 13 D2 r^3 \right. \\
& \quad \left. \left( 99 \sqrt{-D1 + D2} - 20 \sqrt{-D1 + r} \right) + 429 D2^2 r^2 \left( 9 \sqrt{-D1 + D2} - 10 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1 \left( -225 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 975 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r - 1287 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r^2 - 1300 \right. \\
& \quad \left. D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 264 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 143 D2^2 r^3 \left( -9 \sqrt{-D1 + D2} + 20 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^3 \left( 121 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 39 D2 r^2 \left( -99 \sqrt{-D1 + D2} + 80 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^3 \left( -429 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{-D1 + D2} + 100 \sqrt{-D1 + r} \right) + 13 D2^2 r \left( -147 \sqrt{-D1 + D2} + 220 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) \Big) \Big) ;
\end{aligned}$$

$$RGHTCFApprx11[r_, D1_, D2_] := \frac{1}{205920 (-D1 + D2)^{7/2}}$$

(429 b1)

$$\begin{aligned}
& \left( 21 D1^6 - 128 D2^6 - 35 D1^4 D2 (D2 - 10 r) + 5 D2^2 r^4 + 54 D2 r^5 - \right. \\
& \quad \left. 30 r^6 - 14 D1^5 (4 D2 + 5 r) + 64 D2^5 \left( 2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 5 r \right) + \right. \\
& \quad \left. 8 D2^3 r^2 \left( 16 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 5 r \right) - 16 D2^4 r \left( 16 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 15 r \right) - \right. \\
& \quad \left. 2 D1 \left( -224 D2^5 + 140 D2 r^4 - 63 r^5 + 16 D2^4 \left( 12 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) - 12 D2^3 r \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) + 2 D2^2 r^2 \left( 96 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. 4 D1^3 \left( -70 D2^3 - 64 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} r + 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} r^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D2^2 \left( 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. D1^2 \left( -560 D2^4 - 175 r^4 + 8 D2^3 \left( 48 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) + 4 D2 r^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( 96 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) - 6 D2^2 r \left( 128 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) \right) \right) + \\
80 & \left( -39 b0 \left( 5 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} + 16 D2^5 \left( -\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 D2^4 \left( 11 \sqrt{-D1 + D2} - 9 \sqrt{D2 - r} \right) r + D2^3 \left( -33 \sqrt{-D1 + D2} + 17 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^3 + 3 D2 \sqrt{D2 - r} r^4 - 5 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
& D1^4 \sqrt{-D1 + D2} (3 D2 + 22 r) + D1^3 \sqrt{-D1 + D2} (-5 D2^2 + 22 D2 r + 33 r^2) + \\
& D1^2 \left( D2^3 (-17 \sqrt{-D1 + D2} + 33 \sqrt{D2 - r}) + 33 D2^2 (2 \sqrt{-D1 + D2} - 3 \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
& \quad \left. 99 D2 (-\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r}) r^2 - 33 \sqrt{D2 - r} r^3 \right) + \\
& D1 \left( 4 D2^4 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 11 \sqrt{D2 - r}) + 110 D2^3 (-\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
& \quad \left. 33 D2^2 (3 \sqrt{-D1 + D2} - 2 \sqrt{D2 - r}) r^2 - 22 D2 \sqrt{D2 - r} r^3 + 22 \sqrt{D2 - r} r^4 \right) + \\
& b2 \left( 70 D1^6 \sqrt{-D1 + D2} + 304 D2^6 (\sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r}) + 4 D2^5 \right. \\
& \quad \left( -273 \sqrt{-D1 + D2} + 235 \sqrt{D2 - r} \right) r + 9 D2^4 (143 \sqrt{-D1 + D2} - 95 \sqrt{D2 - r}) r^2 + \\
& \quad D2^3 (-429 \sqrt{-D1 + D2} + 100 \sqrt{D2 - r}) r^3 - 10 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^4 + 264 D2 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
& \quad 135 \sqrt{D2 - r} r^6 + 75 D1^4 D2 \sqrt{-D1 + D2} (D2 + 13 r) - 15 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} (15 D2 + 13 r) + \\
& \quad D1^3 \sqrt{-D1 + D2} (121 D2^3 - 663 D2^2 r - 1287 D2 r^2 + 429 r^3) + \\
& \quad D1^2 \left( D2^4 (387 \sqrt{-D1 + D2} - 715 \sqrt{D2 - r}) + 13 D2^3 (-147 \sqrt{-D1 + D2} + 220 \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
& \quad \left. 429 D2^2 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 10 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 143 D2 (-9 \sqrt{-D1 + D2} + 20 \sqrt{D2 - r}) r^3 - \right. \\
& \quad \left. 715 \sqrt{D2 - r} r^4 \right) + D1 \left( D2^5 (-732 \sqrt{-D1 + D2} + 884 \sqrt{D2 - r}) + 26 D2^4 \right. \\
& \quad \left( 111 \sqrt{-D1 + D2} - 115 \sqrt{D2 - r} \right) r + 39 D2^3 (-99 \sqrt{-D1 + D2} + 80 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 13 \\
& \quad \left. D2^2 (99 \sqrt{-D1 + D2} - 20 \sqrt{D2 - r}) r^3 - 1300 D2 \sqrt{D2 - r} r^4 + 546 \sqrt{D2 - r} r^5 \right) \Big) - \\
& \frac{1}{205920 (-D1 + D2)^{7/2}} (D1 - r)^2 \left( 429 a1 \left( 128 D1^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} - \right. \right. \\
& \quad 384 D1^2 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \\
& \quad \left. 384 D1 D2^2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} - 128 D2^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \right. \\
& \quad \left. (D1 - r)^2 (79 D1^2 - 224 D1 D2 + 175 D2^2 + 66 D1 r - 126 D2 r + 30 r^2) \right) - \\
& 80 \left( -39 a0 \left( -33 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 33 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 22 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \\
& \quad \left. 5 r^3 \sqrt{-D1 + r} + D1^3 (33 \sqrt{-D1 + D2} - 16 \sqrt{-D1 + r}) + \right. \\
& \quad D1^2 (-99 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 44 D2 \sqrt{-D1 + r} + 4 r \sqrt{-D1 + r}) + \\
& \quad \left. D1 (-22 D2 r \sqrt{-D1 + r} + 7 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 33 D2^2 (3 \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r})) \right) + \\
& a2 (D1 - r) \left( -429 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 715 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 546 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
& \quad 135 r^3 \sqrt{-D1 + r} + D1^3 (429 \sqrt{-D1 + D2} - 304 \sqrt{-D1 + r}) + \\
& \quad \left. D1 (-338 D2 r \sqrt{-D1 + r} + 141 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 143 D2^2 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 5 \sqrt{-D1 + r})) \right) + \\
& \quad \left. D1^2 (28 r \sqrt{-D1 + r} + 13 D2 (-99 \sqrt{-D1 + D2} + 68 \sqrt{-D1 + r})) \right) \Big);
\end{aligned}$$

CHECKS :

```

FullSimplify[D[D[RGHTCFApprx11[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx11[r, D1, D2],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
FullSimplify[D[D[LEFTCFApprx11[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx11[r, D1, D2],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx11[r, D1, D2], {r, D1, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx11[r, D1, D2], {r, D2, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Limit[LEFTCFApprx11[r, D1, D2], r -> D1, Direction -> -1],
Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[LEFTCFApprx11[r, D1, D2], r -> D2, Direction -> 1],
Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[RGHTCFApprx11[r, D1, D2], r -> D1, Direction -> -1],
Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[RGHTCFApprx11[r, D1, D2], r -> D2, Direction -> 1],
Assumptions -> {0 < D1 < D2}]

```

```

Simplify[
  ( ( ( ( ( ( - 1 / 205920 (-D1 + D2)^(3/2) (9009 a1 (D1 - D2) + 21021 b1 (D1 - D2) + 80 (-195 a0 - 663 b0 + 5
    (14 a2 + 25 b2) (D1 - D2)) sqrt(-D1 + D2) ) ) ) ) ) ) /. {a0 -> aa0, a1 -> aa1, a2 -> aa2} ) ) ) /.
  {b0 -> a0, b1 -> a1, b2 -> a2} ) /. {aa0 -> b0, aa1 -> b1, aa2 -> b2} ) -
  ( - 1 / 205920 (-D1 + D2)^(3/2) (21021 a1 (D1 - D2) + 9009 b1 (D1 - D2) +
    80 (-663 a0 + 5 (-39 b0 + (25 a2 + 14 b2) (D1 - D2))) sqrt(-D1 + D2) ) ) ) ]

```

**K=2**

```

Simplify[
  (CoefficientList[Series[(With[{K = 2}, 1 + Plft[sqrt(r - D1), sqrt(D2 - r), K]]) /. {r -> D2 - x},
    {x, 0, 3}], x]) /. {D2 -> D1 + Δ}
  (Simplify[With[{K = 2}, Series[1 + Plft[sqrt(r - D1), sqrt(D2 - r), K], {r, D2, K + 1}]],
    Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}])
  (1 + (-D1 + D2)^(5/2) p0) + 1/2 (-D1 + D2)^(3/2) (5 p0 + 2 (D1 - D2) p2) (r - D2) +
  1/8 sqrt(-D1 + D2) (15 p0 + 4 (D1 - D2) (5 p2 + 2 (D1 - D2) p4)) (r - D2)^2 +
  (5 p0 + 2 (D1 - D2) (15 p2 + 4 (D1 - D2) (5 p4 + 2 D1 p6 - 2 D2 p6))) (r - D2)^3
  / 16 sqrt(-D1 + D2) + O[r - D2]^4
  cfpdetrmttn = Simplify[
    CoefficientList[
      ( ( ( ( ( (1 + (-D1 + D2)^(5/2) p0) + 1/2 (-D1 + D2)^(3/2) (5 p0 + 2 (D1 - D2) p2) (r - D2) +
        1/8 sqrt(-D1 + D2) (15 p0 + 4 (D1 - D2) (5 p2 + 2 (D1 - D2) p4)) (r - D2)^2 +
        (5 p0 + 2 (D1 - D2) (15 p2 + 4 (D1 - D2) (5 p4 + 2 D1 p6 - 2 D2 p6))) (r - D2)^3
        / 16 sqrt(-D1 + D2)
        {r -> D2 - x} ) ) ) ) ) /. {D2 -> D1 + Δ} ) , x ]
    Solve[{cfpdetrmttn[[1]] == 0}, p0]
    Solve[{(cfpdetrmttn[[2]]) /. {p0 -> -1/Δ^(5/2)} == 0}, p2]
    Solve[{(cfpdetrmttn[[3]]) /. {p0 -> -1/Δ^(5/2), p2 -> -5/(2 Δ^(7/2))} == 0}, p4]
    Solve[{(cfpdetrmttn[[4]]) /. {p0 -> -1/Δ^(5/2), p2 -> -5/(2 Δ^(7/2)), p4 -> -35/(8 Δ^(9/2))} == 0}, p6]

```

```

(Simplify[With[{K = 2}, Series[1 + Prgt[ $\sqrt{r - D1}$ ,  $\sqrt{D2 - r}$ , K], {r, D1, K + 1}]],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]]

cfqdetrmtn = Simplify[
CoefficientList[ $\left(\left(\left(1 + (-D1 + D2)^{5/2} q0\right) + \frac{1}{2} (-D1 + D2)^{3/2} (-5 q0 + 2 (-D1 + D2) q2) (r - D1) + \frac{1}{8} \sqrt{-D1 + D2} (15 q0 + 4 (D1 - D2) (5 q2 + 2 (D1 - D2) q4)) (r - D1)^2 + (-5 q0 - 2 (D1 - D2) (15 q2 + 4 (D1 - D2) (5 q4 + 2 D1 q6 - 2 D2 q6))) (r - D1)^3\right) / (16 \sqrt{-D1 + D2})\right) /.$ 
{r -> x + D1} /. {D2 -> D1 + Δ}], x]]

Solve[{cfqdetrmtn[[1]] == 0}, q0]

Solve[{{(cfqdetrmtn[[2]]) /. {q0 -> - $\frac{1}{\Delta^{5/2}}$ }} == 0}, q2]

Solve[{{(cfqdetrmtn[[3]]) /. {q0 -> - $\frac{1}{\Delta^{5/2}}$ , q2 -> - $\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}$ }} == 0}, q4]

Solve[{{(cfqdetrmtn[[4]]) /. {q0 -> - $\frac{1}{\Delta^{5/2}}$ , q2 -> - $\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}$ , q4 -> - $\frac{35}{8 \Delta^{9/2}}$ }} == 0}, q6]

```

- The solutions for the pn's and the qn's are

K = 2 :

$$\left\{p_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{5/2}}, p_2 \rightarrow -\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}, p_4 \rightarrow -\frac{35}{8 \Delta^{9/2}}, p_6 \rightarrow -\frac{105}{16 \Delta^{11/2}}\right\}$$

$$\left\{q_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{5/2}}, q_2 \rightarrow -\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}, q_4 \rightarrow -\frac{35}{8 \Delta^{9/2}}, q_6 \rightarrow -\frac{105}{16 \Delta^{11/2}}\right\}$$

```

With[{K = 2},  $\left(\left(\left(1 + Plft[\sqrt{r - D1}, \sqrt{D2 - r}, K]\right) /.\right.\right.$ 
 $\left.\left.\left\{p_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{5/2}}, p_2 \rightarrow -\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}, p_4 \rightarrow -\frac{35}{8 \Delta^{9/2}}, p_6 \rightarrow -\frac{105}{16 \Delta^{11/2}}\right\}\right)\right)$ ]]

With[{K = 2},  $\left(\left(\left(1 + Prgt[\sqrt{r - D1}, \sqrt{D2 - r}, K]\right) /.\right.\right.$ 
 $\left.\left.\left\{q_0 \rightarrow -\frac{1}{\Delta^{5/2}}, q_2 \rightarrow -\frac{5}{2 \Delta^{7/2}}, q_4 \rightarrow -\frac{35}{8 \Delta^{9/2}}, q_6 \rightarrow -\frac{105}{16 \Delta^{11/2}}\right\}\right)\right)$ ]]

```

```
(* LeftCLD22[r_,D1_,D2_] *)FullSimplify[
  ( ( ( ( 1 + (-D1 + r)^(5/2) ( - 105 (D2 - r)^3 / (16 Δ^11/2) - 35 (D2 - r)^2 / (8 Δ^9/2) - 5 (D2 - r) / (2 Δ^7/2) - 1 / Δ^5/2 ) ) ) ) GLftNw[√(r - D1), 2] ) / .
  {Δ → D2 - D1} , Assumptions → {0 < D1 < r < D2} ]
(* RgtCLD22[r_,D1_,D2_] *) FullSimplify[
  ( ( ( ( 1 + (D2 - r)^(5/2) ( - 105 (-D1 + r)^3 / (16 Δ^11/2) - 35 (-D1 + r)^2 / (8 Δ^9/2) - 5 (-D1 + r) / (2 Δ^7/2) - 1 / Δ^5/2 ) ) ) ) GRgtNw[√(D2 - r), 2] ) / .
  {Δ → D2 - D1} , Assumptions → {0 < D1 < r < D2} ]
```

```
LeftCLD22[r_, D1_, D2_] := ( 1 + 1 / (16 (-D1 + D2)^(11/2))
  ( 16 (D1 - D2)^3 - 40 (D1 - D2)^2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)^2 - 105 (D2 - r)^3 ) (-D1 + r)^(5/2)
  ( a0 + a4 (D1 - r)^2 + a2 (-D1 + r) + √(-D1 + r) (a1 + a3 (-D1 + r)) );
RgtCLD22[r_, D1_, D2_] := ( b0 + (b1 + b3 (D2 - r)) √(D2 - r) + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)^2
  ( 1 - 1 / (16 (-D1 + D2)^(11/2)) (D2 - r)^(5/2) (-231 D1^3 + 16 D2^3 + 40 D2^2 r +
  70 D2 r^2 + 105 r^3 + 99 D1^2 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D2^2 + 20 D2 r + 35 r^2)) );
CLDApprx22[r_, D1_, D2_] := LeftCLD22[r, D1, D2] + RgtCLD22[r, D1, D2] ;
CLDApprx22[r_, D1_, D2_] := ( 1 + 1 / (16 (-D1 + D2)^(11/2))
  ( 16 (D1 - D2)^3 - 40 (D1 - D2)^2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)^2 - 105 (D2 - r)^3 ) (-D1 + r)^(5/2)
  ( a0 + a4 (D1 - r)^2 + a2 (-D1 + r) + √(-D1 + r) (a1 + a3 (-D1 + r)) ) +
  ( b0 + (b1 + b3 (D2 - r)) √(D2 - r) + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)^2
  ( 1 - 1 / (16 (-D1 + D2)^(11/2)) (D2 - r)^(5/2) (-231 D1^3 + 16 D2^3 + 40 D2^2 r +
  70 D2 r^2 + 105 r^3 + 99 D1^2 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D2^2 + 20 D2 r + 35 r^2)) );
```

```
FullSimplify[LeftCLD22[r, D1, D2] + RgtCLD22[r, D1, D2], Assumptions → {0 < D1 < r < D2}]
```

```
Simplify[CLDApprx22[r, D1, D2] - (LeftCLD22[r, D1, D2] + RgtCLD22[r, D1, D2])]
```

```
Series[LeftCLD22[r, D1, D2], {r, D1, 2}]
```

```
Series[LeftCLD22[r, D1, D2], {r, D2, 2}]
```

```
Series[RgtCLD22[r, D1, D2], {r, D2, 2}]
```

```
Series[RgtCLD22[r, D1, D2], {r, D1, 2}]
```

```
CLDApprx22[y, D1, D2]
```

evaluation of the LEFT function to be matched at the left-end

```

Simplify[Simplify[
  Integrate[Integrate[LeftCLD22[y, D1, D2], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
    {x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}] +
Simplify[Integrate[Integrate[RgtCLD22[y, D1, D2], {y, x, D2},
  Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}],
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

LEFTCFApprx22NewNotSimpl[r_, D1_, D2_] :=
- ((D2 - r)^2 (29 393 b1 (281 D2^6 + 512 D1^5 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) -
  2560 D1^4 D2 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) - 97 D2^4 r^2 + 34 D2^3 r^3 + 145 D2^2 r^4 + 250 D2 r^5 -
  225 r^6 - 4 D2^5 (128 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 97 r) + 2 D1 (-649 D2^5 + 143 D2^3 r^2 - 341
  D2^2 r^3 - 770 D2 r^4 + 550 r^5 + D2^4 (1280 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 1067 r))) +
  2 D1^3 (-693 D2^3 - 2079 D2 r^2 + 693 r^3 + D2^2 (2560 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 2079 r))) +
  D1^2 (2178 D2^4 + 594 D2^2 r^2 + 3762 D2 r^3 - 1980 r^4 - 2 D2^3
  (2560 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 2277 r))) + 4199 b3 (D2 - r)
(1118 D2^6 + 1536 D1^5 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) - 7680 D1^4 D2 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) -
  621 D2^4 r^2 - 118 D2^3 r^3 + 600 D2^2 r^4 + 1575 D2 r^5 - 1225 r^6 -
  3 D2^5 (512 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 443 r) - 12 D1^2 (-792 D2^4 + 99 D2^2
  r^2 - 1683 D2 r^3 + 825 r^4 + D2^3 (1280 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 1551 r))) +
  12 D1^3 (-539 D2^3 - 1617 D2 r^2 + 539 r^3 + D2^2 (1280 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 1617 r))) +
  3 D1 (-1793 D2^5 + 946 D2^3 r^2 - 682 D2^2 r^3 - 3025 D2 r^4 + 1925
  r^5 + D2^4 (2560 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 2629 r))) + 1120
(323 b0 (78 D1^5 sqrt(-D1 + D2) - 390 D1^4 D2 sqrt(-D1 + D2) + D2^5 (-78 sqrt(-D1 + D2) + 32 sqrt(D2 - r)) -
  16 D2^4 sqrt(D2 - r) r - 22 D2^3 sqrt(D2 - r) r^2 - 15 D2^2 sqrt(D2 - r) r^3 + 21 sqrt(D2 - r) r^5 + 13
  D1^3 (D2^2 (60 sqrt(-D1 + D2) - 11 sqrt(D2 - r)) + 22 D2 sqrt(D2 - r) r - 11 sqrt(D2 - r) r^2) - 39
  D1^2 (D2^3 (20 sqrt(-D1 + D2) - 6 sqrt(D2 - r)) + 7 D2^2 sqrt(D2 - r) r + 4 D2 sqrt(D2 - r) r^2 -
  5 sqrt(D2 - r) r^3) + 3 D1 (2 D2^4 (65 sqrt(-D1 + D2) - 24 sqrt(D2 - r)) +
  36 D2^3 sqrt(D2 - r) r + 37 D2^2 sqrt(D2 - r) r^2 + 10 D2 sqrt(D2 - r) r^3 - 35 sqrt(D2 - r) r^4)) -
  (D2 - r) (b4 (D2 - r) (-4199 D1^5 sqrt(-D1 + D2) + 20 995 D1^4 D2 sqrt(-D1 + D2) +
  D2^5 (4199 sqrt(-D1 + D2) - 3296 sqrt(D2 - r)) + 368 D2^4 sqrt(D2 - r) r + 2418 D2^3 sqrt(D2 - r)
  r^2 + 3149 D2^2 sqrt(D2 - r) r^3 + 1456 D2 sqrt(D2 - r) r^4 - 4095 sqrt(D2 - r) r^5 - 323 D1^3
  (D2^2 (130 sqrt(-D1 + D2) - 63 sqrt(D2 - r)) + 126 D2 sqrt(D2 - r) r - 63 sqrt(D2 - r) r^2) +
  323 D1^2 (10 D2^3 (13 sqrt(-D1 + D2) - 9 sqrt(D2 - r)) + 81 D2^2 sqrt(D2 - r) r + 108 D2 sqrt(D2 - r)
  r^2 - 99 sqrt(D2 - r) r^3) - 19 D1 (D2^4 (1105 sqrt(-D1 + D2) - 848 sqrt(D2 - r)) + 332 D2^3

```

$$\begin{aligned}
& \left. \left( \sqrt{D_2 - r} r + 879 D_2^2 \sqrt{D_2 - r} r^2 + 638 D_2 \sqrt{D_2 - r} r^3 - 1001 \sqrt{D_2 - r} r^4 \right) \right) - \\
& 19 b_2 \left( 442 D_1^5 \sqrt{-D_1 + D_2} - 2210 D_1^4 D_2 \sqrt{-D_1 + D_2} + D_2^5 \left( -442 \sqrt{-D_1 + D_2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 288 \sqrt{D_2 - r} \right) - 80 D_2^4 \sqrt{D_2 - r} r - 214 D_2^3 \sqrt{D_2 - r} r^2 - \right. \\
& \quad \left. 211 D_2^2 \sqrt{D_2 - r} r^3 - 56 D_2 \sqrt{D_2 - r} r^4 + 273 \sqrt{D_2 - r} r^5 + 221 D_1^3 \right. \\
& \quad \left( D_2^2 \left( 20 \sqrt{-D_1 + D_2} - 7 \sqrt{D_2 - r} \right) + 14 D_2 \sqrt{D_2 - r} r - 7 \sqrt{D_2 - r} r^2 \right) - 17 D_1^2 \\
& \quad \left( 2 D_2^3 \left( 130 \sqrt{-D_1 + D_2} - 69 \sqrt{D_2 - r} \right) + 141 D_2^2 \sqrt{D_2 - r} r + 132 D_2 \sqrt{D_2 - r} r^2 - \right. \\
& \quad \left. 135 \sqrt{D_2 - r} r^3 \right) + 17 D_1 \left( 10 D_2^4 \left( 13 \sqrt{-D_1 + D_2} - 8 \sqrt{D_2 - r} \right) + 44 D_2^3 \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{D_2 - r} r + 75 D_2^2 \sqrt{D_2 - r} r^2 + 38 D_2 \sqrt{D_2 - r} r^3 - 77 \sqrt{D_2 - r} r^4 \right) \right) \right) \right) / \\
& (56 434 560 (-D_1 + D_2)^{11/2}) + (-29 393 a_1 (512 D_1^8 - 99 D_2^8 + 330 D_2^7 r + 1386 D_2^3 r^5 - \\
& \quad 1980 D_2^2 r^6 + 1100 D_2 r^7 - 225 r^8 - \\
& \quad 512 D_2^5 r^2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} + \\
& \quad 256 D_1^7 (-11 D_2 - 5 r + 2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) - 64 D_1^6 \\
& \quad \left( -99 D_2^2 - 110 D_2 r - 15 r^2 + 40 D_2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} + 16 r \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} \right) + \\
& \quad 2 D_1 (231 D_2^7 - 1155 D_2^6 r - 3465 D_2^3 r^4 + 3861 D_2^2 r^5 - 1870 D_2 r^6 + 350 r^7 + \\
& \quad 512 D_2^5 r \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} + 1280 D_2^4 r^2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + \\
& \quad 32 D_1^5 (-231 D_2^3 + r^2 (-5 r + 16 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)})) + \\
& \quad 5 D_2^2 (-99 r + 32 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + 5 D_2 r (-33 r + 32 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) - \\
& \quad 2 D_1^2 (231 D_2^6 + 2560 D_2^4 \sqrt{(D_1 - D_2) (D_1 - r)} r + 4455 D_2^2 r^4 - 1749 D_2 r^5 + \\
& \quad 290 r^6 + D_2^5 (-3465 r + 256 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + \\
& \quad 10 D_2^3 r^2 (-693 r + 256 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)})) - \\
& \quad 20 D_1^4 (-231 D_2^4 + r^4 + 4 D_2 r^2 (-11 r + 32 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)})) + \\
& \quad 4 D_2^3 (-231 r + 64 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + \\
& \quad 2 D_2^2 r (-297 r + 256 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + \\
& \quad 2 D_1^3 (-693 D_2^5 + 55 D_2 r^4 - 3 r^5 + 5 D_2^4 (-1155 r + 256 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)})) + \\
& \quad 10 D_2^2 r^2 (-99 r + 256 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) + \\
& \quad 10 D_2^3 r (-693 r + 512 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)})) \right) + \\
& 4199 a_3 (1536 D_1^9 + 275 D_2^9 - 693 D_2^8 r + 1536 D_2^5 \sqrt{(D_1 - D_2) (D_1 - r)} r^3 - \\
& \quad 6468 D_2^3 r^6 + 9900 D_2^2 r^7 - 5775 D_2 r^8 + 1225 r^9 + \\
& \quad 768 D_1^8 (-11 D_2 - 7 r + 2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)}) - 192 D_1^7 \\
& \quad \left( -99 D_2^2 - 154 D_2 r - 35 r^2 + 40 D_2 \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} + 24 r \sqrt{(-D_1 + D_2) (-D_1 + r)} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6 D1 \left( 297 D2^8 - 924 D2^7 r - 6468 D2^3 r^5 + 8316 D2^2 r^6 - 4400 D2 r^7 + 875 r^8 + \right. \\
& \quad \left. 768 D2^5 r^2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + 1280 D2^4 r^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
& 96 D1^6 \left( -231 D2^3 + 5 D2 r \left( -77 r + 48 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
& \quad \left. r^2 \left( -35 r + 48 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + D2^2 \left( -693 r + 160 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) - \\
& 24 D1^3 \left( 154 D2^6 + 960 D2^4 \sqrt{(D1 - D2) (D1 - r)} r - 1001 D2 r^5 + 168 r^6 + D2^5 \right. \\
& \quad \left( -1617 r + 64 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + 10 D2^2 r^3 \left( 231 r + 64 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
& \quad \left. 10 D2^3 r^2 \left( -539 r + 192 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
& 6 D1^4 \left( -693 D2^5 + 7 r^5 + 5 D2^4 \left( -1617 r + 256 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
& \quad 30 D2^3 r \left( -539 r + 256 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
& \quad 30 D2^2 r^2 \left( -231 r + 256 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
& \quad \left. 5 D2 r^3 \left( -77 r + 256 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) - \\
& 12 D1^5 \left( -1155 D2^4 + 20 D2 r^2 \left( -77 r + 96 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \right. \\
& \quad 30 D2^2 r \left( -231 r + 128 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + r^3 \\
& \quad \left( -35 r + 128 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + 4 D2^3 \left( -1617 r + 320 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \left. \right) + \\
& 12 D1^2 \left( 363 D2^7 - 1617 D2^6 r + 7623 D2^2 r^5 - 3542 D2 r^6 + 650 r^7 + \right. \\
& \quad 384 D2^5 r \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + 1920 D2^4 r^2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \\
& \quad \left. 5 D2^3 \left( -1617 r^4 + 256 r^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) - \\
& 1120 \left( 323 a0 \left( -14 D2^7 \sqrt{-D1 + D2} + 60 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} r - 78 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r^2 + \right. \right. \\
& \quad 143 D2^3 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 195 D2^2 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 105 D2 r^6 \sqrt{-D1 + r} - \\
& \quad 21 r^7 \sqrt{-D1 + r} + 32 D1^7 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) - \\
& \quad 16 D1^6 \left( 8 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 6 \sqrt{-D1 + D2} r - 9 D2 \sqrt{-D1 + r} - 5 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
& \quad D1 \left( 38 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} - 204 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r + 390 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r^2 - 572 D2^3 r^3 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{-D1 + r} + 546 D2^2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 240 D2 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 42 r^6 \sqrt{-D1 + r} \right) - \\
& \quad 6 D1^2 \left( 2 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} - 20 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r + 39 D2^2 r^3 \sqrt{-D1 + r} - 9 D2 r^4 \right. \\
& \quad \left. \sqrt{-D1 + r} + r^5 \sqrt{-D1 + r} + 13 D2^3 r^2 \left( 10 \sqrt{-D1 + D2} - 11 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& \quad 6 D1^5 \left( D2 r \left( 70 \sqrt{-D1 + D2} - 66 \sqrt{-D1 + r} \right) + D2^2 \left( 29 \sqrt{-D1 + D2} - 39 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. r^2 \left( 13 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) - \\
& \quad 4 D1^3 \left( 5 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 21 D2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 39 D2^2 r^2 \right. \\
& \quad \left( 5 \sqrt{-D1 + D2} - 4 \sqrt{-D1 + r} \right) + D2^3 r \left( -90 \sqrt{-D1 + D2} + 143 \sqrt{-D1 + r} \right) \left. \right) + \\
& \quad D1^4 \left( -13 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 3 D2 r^2 \left( -130 \sqrt{-D1 + D2} + 83 \sqrt{-D1 + r} \right) + D2^3 \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( -70 \sqrt{-D1 + D2} + 143 \sqrt{-D1 + r} \right) + D2^2 r \left( -660 \sqrt{-D1 + D2} + 741 \sqrt{-D1 + r} \right) \Big) - \\
19 \text{ a2} & \left( 84 D2^8 \sqrt{-D1 + D2} - 238 D2^7 \sqrt{-D1 + D2} r + 442 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r^3 - \right. \\
& 1547 D2^3 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 2295 D2^2 r^6 \sqrt{-D1 + r} - 1309 D2 r^7 \sqrt{-D1 + r} + \\
& 273 r^8 \sqrt{-D1 + r} + 288 D1^8 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) - \\
& 16 D1^7 \left( 76 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 68 \sqrt{-D1 + D2} r - 85 D2 \sqrt{-D1 + r} - 59 r \sqrt{-D1 + r} \right) - \\
D1 & \left( 434 D2^7 \sqrt{-D1 + D2} - 1666 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} r + 1326 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r^2 + 2210 D2^4 \right. \\
& \left. \sqrt{-D1 + D2} r^3 - 7735 D2^3 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 9129 D2^2 r^5 \sqrt{-D1 + r} - 4573 D2 r^6 \right. \\
& \left. \sqrt{-D1 + r} + 875 r^7 \sqrt{-D1 + r} \right) + 2 D1^6 \left( D2^2 \left( 887 \sqrt{-D1 + D2} - 1173 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^2 \right. \\
& \left. \left( 663 \sqrt{-D1 + D2} - 445 \sqrt{-D1 + r} \right) + 34 D2 r \left( 73 \sqrt{-D1 + D2} - 71 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
2 D1^2 & \left( 343 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} - 1836 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r + 3315 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} \right. \\
& \left. r^2 + 5610 D2^2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 2295 D2 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 388 r^6 \right. \\
& \left. \sqrt{-D1 + r} + 1105 D2^3 r^3 \left( 2 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) - \\
2 D1^3 & \left( 74 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} - 850 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r - 85 D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 11 r^5 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
& 1105 D2^3 r^2 \left( 6 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{-D1 + r} \right) + 85 D2^2 r^3 \left( 26 \sqrt{-D1 + D2} - 3 \sqrt{-D1 + r} \right) \Big) - \\
5 D1^4 & \left( 48 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} + 3 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 17 D2^3 r \left( 58 \sqrt{-D1 + D2} - 91 \sqrt{-D1 + r} \right) - \right. \\
& 51 D2^2 r^2 \left( 52 \sqrt{-D1 + D2} - 47 \sqrt{-D1 + r} \right) + 17 D2 r^3 \left( -26 \sqrt{-D1 + D2} + 5 \sqrt{-D1 + r} \right) \Big) + \\
D1^5 & \left( -51 D2 r^2 \left( 130 \sqrt{-D1 + D2} - 99 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^3 \left( -442 \sqrt{-D1 + D2} + \right. \right. \\
& 97 \sqrt{-D1 + r} \Big) + D2^3 \left( -794 \sqrt{-D1 + D2} + \right. \\
& 1547 \sqrt{-D1 + r} \Big) + D2^2 r \left( -8262 \sqrt{-D1 + D2} + 9435 \sqrt{-D1 + r} \right) \Big) \Big) + \\
\text{a4} & \left( -693 D2^9 \sqrt{-D1 + D2} + 1596 D2^8 \sqrt{-D1 + D2} r - 4199 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r^4 + \right. \\
& 20349 D2^3 r^6 \sqrt{-D1 + r} - 31977 D2^2 r^7 \sqrt{-D1 + r} + 19019 D2 r^8 \sqrt{-D1 + r} - \\
& 4095 r^9 \sqrt{-D1 + r} + 3296 D1^9 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) - \\
& 16 D1^8 \left( 904 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 950 \sqrt{-D1 + D2} r - 1007 D2 \sqrt{-D1 + r} - 847 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
D1 & \left( 4641 D2^8 \sqrt{-D1 + D2} - 12768 D2^7 \sqrt{-D1 + D2} r + 16796 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} \right. \\
& \left. r^3 + 20995 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r^4 - 122094 D2^3 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 162792 \right. \\
& \left. D2^2 r^6 \sqrt{-D1 + r} - 88198 D2 r^7 \sqrt{-D1 + r} + 17836 r^8 \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
2 D1^7 & \left( r^2 \left( 12597 \sqrt{-D1 + D2} - 9415 \sqrt{-D1 + r} \right) + 5 D2^2 \left( 2225 \sqrt{-D1 + D2} - \right. \right. \\
& \left. \left. 2907 \sqrt{-D1 + r} \right) + 38 D2 r \left( 937 \sqrt{-D1 + D2} - 931 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) - \\
D1^2 & \left( 12180 D2^7 \sqrt{-D1 + D2} - 44688 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} r + 25194 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} \right. \\
& \left. r^2 + 83980 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r^3 + 305235 D2^2 r^5 \sqrt{-D1 + r} - 145901 D2 r^6 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-D1+r} + 27\,245\,r^7 \sqrt{-D1+r} + 1615\,D2^3\,r^4 \left( 26 \sqrt{-D1+D2} - 189 \sqrt{-D1+r} \right) + \\
& D1^5 \left( -3407\,D2^4 \sqrt{-D1+D2} + 38\,D2^3\,r \left( 2068 \sqrt{-D1+D2} - 3213 \sqrt{-D1+r} \right) + \right. \\
& \quad \left. r^4 \left( 4199 \sqrt{-D1+D2} - 1400 \sqrt{-D1+r} \right) + 38\,D2\,r^3 \right. \\
& \quad \left. \left( 2210 \sqrt{-D1+D2} - 1253 \sqrt{-D1+r} \right) + 3876\,D2^2\,r^2 \left( 65 \sqrt{-D1+D2} - 63 \sqrt{-D1+r} \right) \right) + \\
& D1^4 \left( -2141\,D2^5 \sqrt{-D1+D2} + 27\,740\,D2^4 \sqrt{-D1+D2}\,r - 329\,r^5 \sqrt{-D1+r} - \right. \\
& \quad \left. 4845\,D2^3\,r^2 \left( 52 \sqrt{-D1+D2} - 63 \sqrt{-D1+r} \right) - 1615\,D2^2\,r^3 \right. \\
& \quad \left. \left( 104 \sqrt{-D1+D2} - 63 \sqrt{-D1+r} \right) - 1235\,D2\,r^4 \left( 17 \sqrt{-D1+D2} - 7 \sqrt{-D1+r} \right) \right) + \\
& 2\,D1^3 \left( 6762\,D2^6 \sqrt{-D1+D2} - 36\,290\,D2^5 \sqrt{-D1+D2}\,r + 62\,985\,D2^4 \sqrt{-D1+D2} \right. \\
& \quad \left. r^2 - 44\,156\,D2\,r^5 \sqrt{-D1+r} + 7469\,r^6 \sqrt{-D1+r} + 3230\,D2^3\,r^3 \right. \\
& \quad \left. \left( 26 \sqrt{-D1+D2} - 63 \sqrt{-D1+r} \right) + 1615\,D2^2\,r^4 \left( 13 \sqrt{-D1+D2} + 63 \sqrt{-D1+r} \right) \right) + \\
& D1^6 \left( -19\,D2^2\,r \left( 6488 \sqrt{-D1+D2} - 7497 \sqrt{-D1+r} \right) - 19\,D2\,r^2 \right. \\
& \quad \left. \left( 6630 \sqrt{-D1+D2} - 5537 \sqrt{-D1+r} \right) + r^3 \left( -16\,796 \sqrt{-D1+D2} + 8869 \sqrt{-D1+r} \right) + \right. \\
& \quad \left. D2^3 \left( -10\,826 \sqrt{-D1+D2} + 20\,349 \sqrt{-D1+r} \right) \right) \Big/ (56\,434\,560 (-D1+D2)^{11/2});
\end{aligned}$$

Simplify[

$$\begin{aligned}
& \left( \text{FullSimplify} \left[ \left( \text{Simplify} \left[ \left( \text{LEFTCFApprx22NewNotSimpl}[r, D1, D2] \right) /. \left\{ \sqrt{D2-r} \rightarrow \sqrt{\Delta 2}, \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sqrt{-D1+r} \rightarrow \sqrt{\Delta 1}, \sqrt{(-D1+D2)(D2-r)} \rightarrow \sqrt{\Delta} \sqrt{\Delta 2} \right\} \right) /. \{D2 \rightarrow D1+\Delta\} \right] \right) /. \\
& \quad \left\{ \sqrt{(-D1+r)\Delta} \rightarrow \Delta^{1/2} \sqrt{\Delta 1} \right\}, \text{Assumptions} \rightarrow \{0 < D1 < r < D2\} \Big] \Big/ \\
& \left\{ \sqrt{\Delta 1} \rightarrow \sqrt{-D1+r}, \sqrt{\Delta 2} \rightarrow \sqrt{D2-r}, \Delta \rightarrow D2-D1 \right\}, \text{Assumptions} \rightarrow \\
& \{0 < D1 < r < D2\} \Big]
\end{aligned}$$

```

LEFTCFApprx22New[r_, D1_, D2_] :=
(29 393 a1 (-512 D1^8 + 2816 D1^7 D2 - 6336 D1^6 D2^2 + 7392 D1^5 D2^3 - 4620 D1^4 D2^4 + 1386 D1^3 D2^5 +
462 D1^2 D2^6 - 462 D1 D2^7 + 99 D2^8 + 1280 D1^7 r - 7040 D1^6 D2 r + 15 840 D1^5 D2^2 r -
18 480 D1^4 D2^3 r + 11 550 D1^3 D2^4 r - 6930 D1^2 D2^5 r + 2310 D1 D2^6 r - 330 D2^7 r - 960 D1^6 r^2 +
5280 D1^5 D2 r^2 - 11 880 D1^4 D2^2 r^2 + 13 860 D1^3 D2^3 r^2 + 160 D1^5 r^3 - 880 D1^4 D2 r^3 + 1980 D1^3
D2^2 r^3 - 13 860 D1^2 D2^3 r^3 + 20 D1^4 r^4 - 110 D1^3 D2 r^4 + 8910 D1^2 D2^2 r^4 + 6930 D1 D2^3 r^4 +
6 D1^3 r^5 - 3498 D1^2 D2 r^5 - 7722 D1 D2^2 r^5 - 1386 D2^3 r^5 + 580 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 +
1980 D2^2 r^6 - 700 D1 r^7 - 1100 D2 r^7 + 225 r^8 + 512 (-D1 + D2)^11/2 (-D1 + r)^5/2) -
4199 a3 (1225 D1^9 + 275 (D1 - D2)^9 + 693 (D1 - D2)^8 r + 6468 (-D1 + D2)^3 r^6 -
9900 (D1 - D2)^2 r^7 + 5775 (-D1 + D2) r^8 - 1225 r^9 - 1536 (-D1 + D2)^11/2 (-D1 + r)^7/2 -
525 D1^8 (11 D1 - 11 D2 + 21 r) + 300 D1^7 (33 (D1 - D2)^2 + 154 (D1 - D2) r + 147 r^2) -
420 D1^2 r^4 (231 (D1 - D2)^3 + 495 (D1 - D2)^2 r + 385 (D1 - D2) r^2 + 105 r^3) +
420 D1^3 r^3 (308 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 770 (D1 - D2) r^2 + 245 r^3) -
210 D1^4 r^2 (462 (D1 - D2)^3 + 1650 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 735 r^3) -
84 D1^6 (77 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 1225 r^3) + 42 D1^5 r
(924 (D1 - D2)^3 + 4950 (D1 - D2)^2 r + 7700 (D1 - D2) r^2 + 3675 r^3) + 21 D1 (-33 (D1 - D2)^8 +
1848 (D1 - D2)^3 r^5 + 3300 (D1 - D2)^2 r^6 + 2200 (D1 - D2) r^7 + 525 r^8) - 1120
(323 (a0 (143 (-D1 + D2)^3 + 195 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 105 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3)
(-D1 + r)^9/2 - 2 a0 (-D1 + D2)^11/2 (16 D1^2 + 7 D2^2 + 16 D1 (D2 - 3 r) - 30 D2 r + 39 r^2)) +
(-D1 + D2)^11/2 (-693 a4 (D1 - D2)^4 + 1596 (D1 - D2)^3 (a2 + a4 (D1 - r)) -
4522 a2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 4199 (D1 - r)^3 (2 a2 + a4 (-D1 + r))) -
(-D1 + r)^11/2 (2907 (D1 - D2)^2 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r) +
1463 (-D1 + D2) (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 +
273 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 2261 (-D1 + D2)^3 (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r)))) +
(D2 - r)^2 (29 393 b1 (-281 (D1 - D2)^6 + 388 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 97 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 +
34 (-D1 + D2)^3 (D1 - r)^3 - 145 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 +
250 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 + 225 (D1 - r)^6 + 512 (-D1 + D2)^11/2 sqrt(D2 - r)) +
4199 b3 (-1118 (D1 - D2)^6 + 1329 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 621 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 +
118 (D1 - D2)^3 (D1 - r)^3 - 600 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 + 1575 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 +
1225 (D1 - r)^6 + 1536 (-D1 + D2)^11/2 sqrt(D2 - r)) (D2 - r) + 1120
(323 b0 (78 (-D1 + D2)^11/2 + (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 +
21 (D1 - r)^3) (D2 - r)^5/2) + 4199 (-D1 + D2)^11/2 (2 b2 + b4 (D2 - r)) (D2 - r) +
(D2 - r)^7/2 (-3296 b4 (D1 - D2)^4 - 7 (-D1 + D2) (1330 b2 + 377 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 +
273 (19 b2 + 15 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 48 (-D1 + D2)^3 (114 b2 + 61 b4 (-D1 + r)) +
2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) (4712 b2 + 255 b4 (-D1 + r)))))) / (56 434 560 (-D1 + D2)^11/2)

```

Checks

```

Simplify[D[D[LEFTCFApprx22New[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx22[r, D1, D2],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

evaluation of the RGHT function to be matched at the right

```

Simplify[Simplify[
Integrate[Integrate[LeftCLD22[y, D1, D2], {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
{x, D1, r}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}] +
Simplify[Integrate[Integrate[RgtCLD22[y, D1, D2], {y, D1, x},
Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, D1, r}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}],
Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

RGHTCFApprx22NewNotSimpl[r\_, D1\_, D2\_] :=

$$\begin{aligned}
& (29\,393\,b1 \left( 99\,D1^8 - 512\,D2^8 + 20\,D2^4\,r^4 + 6\,D2^3\,r^5 + 580\,D2^2\,r^6 - 700\,D2\,r^7 + 225\,r^8 + \right. \\
& \quad 462\,D1^6\,D2\,(D2 + 5\,r) - 66\,D1^7\,(7\,D2 + 5\,r) + 256\,D2^7\left(2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 5\,r\right) - \\
& \quad 64\,D2^6\left(16\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 15\,r^2\right) + 32\,D2^5\left(16\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 5\,r^3\right) + \\
& \quad 10\,D1^4\,D2\left(-462\,D2^3 - 512\,D2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + \right. \\
& \quad \quad \left. 256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + D2^2\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 1155\,r\right)\right) - \\
& \quad 2\,D1^5\left(-693\,D2^3 - 512\,D2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + \right. \\
& \quad \quad \left. D2^2\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 3465\,r\right)\right) - 2\,D1\left(-1408\,D2^7 + 55\,D2^3\,r^4 + \right. \\
& \quad \quad 1749\,D2^2\,r^5 - 1870\,D2\,r^6 + 550\,r^7 + 320\,D2^6\left(4\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 11\,r\right) - 80\,D2^5 \\
& \quad \quad \left. \left(32\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 33\,r^2\right) + 40\,D2^4\left(32\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 11\,r^3\right)\right) + \\
& \quad 2\,D1^2\left(-3168\,D2^6 + 4455\,D2^2\,r^4 - 3861\,D2\,r^5 + 990\,r^6 + 80\,D2^5 \right. \\
& \quad \quad \left. \left(32\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 99\,r\right) - 20\,D2^4\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 297\,r^2\right) + \right. \\
& \quad \quad \left. 10\,D2^3\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 99\,r^3\right)\right) - \\
& \quad 2\,D1^3\left(-3696\,D2^5 - 3465\,D2\,r^4 + 693\,r^5 + 40\,D2^4\left(64\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 231\,r\right) - \right. \\
& \quad \quad 10\,D2^3\left(512\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 693\,r^2\right) + \\
& \quad \quad \left. 10\,D2^2\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 693\,r^3\right)\right) - \\
& \quad 4199\,b3 \left( 275\,D1^9 + 1536\,D2^9 + 42\,D2^4\,r^5 - 4032\,D2^3\,r^6 + 7800\,D2^2\,r^7 - 5250\,D2\,r^8 + 1225\,r^9 - \right. \\
& \quad 99\,D1^8\,(18\,D2 + 7\,r) - 768\,D2^8\left(2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 7\,r\right) + 396\,D1^7\,D2\,(11\,D2 + 14\,r) - \\
& \quad 924\,D1^6\,D2^2\,(4\,D2 + 21\,r) + 192\,D2^7\left(24\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 35\,r^2\right) - \\
& \quad 96\,D2^6\left(48\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 35\,r^3\right) + 12\,D2^5\left(128\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^3 + 35\,r^4\right) + \\
& \quad 6\,D1^5\left(-693\,D2^4 - 768\,D2^2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 768\,D2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 - \right. \\
& \quad \quad \left. 256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^3 + 4\,D2^3\left(64\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 1617\,r\right)\right) - \\
& \quad 30\,D1^4\,D2\left(-462\,D2^4 - 768\,D2^2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 768\,D2\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 - \right. \\
& \quad \quad \left. 256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^3 + D2^3\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 1617\,r\right)\right) - 12\,D1^2 \\
& \quad \left(-1584\,D2^7 - 7623\,D2^2\,r^5 + 4158\,D2\,r^6 - 825\,r^7 + 8\,D2^6\left(160\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 693\,r\right) - \right. \\
& \quad \quad 30\,D2^5\left(128\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 231\,r^2\right) + 15\,D2^4\left(256\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. r^2 + 231\,r^3\right) - 20\,D2^3\left(64\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^3 - 231\,r^4\right)\right) + \\
& \quad 3\,D1\left(-2816\,D2^8 + 8008\,D2^3\,r^5 - 14\,168\,D2^2\,r^6 + 8800\,D2\,r^7 - 1925\,r^8 + \right. \\
& \quad \quad 128\,D2^7\left(20\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)} + 77\,r\right) - 160\,D2^6\left(48\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r + 77\,r^2\right) + \\
& \quad \quad \left. 80\,D2^5\left(96\sqrt{(-D1 + D2)(D2 - r)}\,r^2 + 77\,r^3\right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10 D2^4 \left( 256 \sqrt{-D1 + D2} (D2 - r) r^3 + 77 r^4 \right) + \\
& 12 D1^3 \left( -1848 D2^6 + 3234 D2 r^5 - 539 r^6 + 4 D2^5 \left( 320 \sqrt{-D1 + D2} (D2 - r) + 1617 r \right) - \right. \\
& 15 D2^4 \left( 256 \sqrt{-D1 + D2} (D2 - r) r + 539 r^2 \right) + 20 D2^3 \left( 192 \sqrt{-D1 + D2} (D2 - r) \right. \\
& \left. \left. r^2 + 539 r^3 \right) - 5 D2^2 \left( 256 \sqrt{-D1 + D2} (D2 - r) r^3 + 1617 r^4 \right) \right) - \\
1120 & \left( 323 b0 \left( 14 D1^7 \sqrt{-D1 + D2} - 32 D2^7 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r} \right) + 16 D2^6 \right. \right. \\
& \left. \left( 6 \sqrt{-D1 + D2} - 5 \sqrt{D2 - r} \right) r + 6 D2^5 \left( -13 \sqrt{-D1 + D2} + 7 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \right. \\
& 13 D2^4 \sqrt{D2 - r} r^3 + 8 D2^3 \sqrt{D2 - r} r^4 + 6 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
& 42 D2 \sqrt{D2 - r} r^6 + 21 \sqrt{D2 - r} r^7 - 2 D1^6 \sqrt{-D1 + D2} (19 D2 + 30 r) + \\
& 10 D1^4 D2 \sqrt{-D1 + D2} (2 D2^2 - 12 D2 r - 39 r^2) + 6 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} (2 D2^2 + 34 D2 r + 13 r^2) + \\
& D1^3 \left( D2^4 \left( 70 \sqrt{-D1 + D2} - 143 \sqrt{D2 - r} \right) + D2^3 \left( -360 \sqrt{-D1 + D2} + 572 \sqrt{D2 - r} \right) r + 78 \right. \\
& \left. D2^2 \left( 10 \sqrt{-D1 + D2} - 11 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + 572 D2 \sqrt{D2 - r} r^3 - 143 \sqrt{D2 - r} r^4 \right) - \\
& 3 D1^2 \left( D2^5 \left( 58 \sqrt{-D1 + D2} - 78 \sqrt{D2 - r} \right) + D2^4 \left( -220 \sqrt{-D1 + D2} + 247 \sqrt{D2 - r} \right) \right. \\
& \left. r + 52 D2^3 \left( 5 \sqrt{-D1 + D2} - 4 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 - 78 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^3 + 182 D2 \right. \\
& \left. \sqrt{D2 - r} r^4 - 65 \sqrt{D2 - r} r^5 \right) + D1 \left( 16 D2^6 \left( 8 \sqrt{-D1 + D2} - 9 \sqrt{D2 - r} \right) + D2^5 \right. \\
& \left. \left( -420 \sqrt{-D1 + D2} + 396 \sqrt{D2 - r} \right) r + 3 D2^4 \left( 130 \sqrt{-D1 + D2} - 83 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 - 84 \right. \\
& \left. D2^3 \sqrt{D2 - r} r^3 - 54 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^4 + 240 D2 \sqrt{D2 - r} r^5 - 105 \sqrt{D2 - r} r^6 \right) \right) - \\
19 b2 & \left( 84 D1^8 \sqrt{-D1 + D2} + 288 D2^8 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r} \right) - 16 D2^7 \right. \\
& \left. \left( 68 \sqrt{-D1 + D2} - 59 \sqrt{D2 - r} \right) r + 2 D2^6 \left( 663 \sqrt{-D1 + D2} - 445 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \right. \\
& D2^5 \left( -442 \sqrt{-D1 + D2} + 97 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 - 15 D2^4 \sqrt{D2 - r} r^4 - 22 D2^3 \sqrt{D2 - r} r^5 + \\
& 776 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^6 - 875 D2 \sqrt{D2 - r} r^7 + 273 \sqrt{D2 - r} r^8 + \\
& 98 D1^6 D2 \sqrt{-D1 + D2} (7 D2 + 17 r) - 14 D1^7 \sqrt{-D1 + D2} (31 D2 + 17 r) - \\
& 2 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} (74 D2^3 + 1836 D2^2 r + 663 D2 r^2 - 221 r^3) - 10 D1^4 D2 \sqrt{-D1 + D2} \\
& \left( 24 D2^3 - 170 D2^2 r - 663 D2 r^2 + 221 r^3 \right) + D1^3 \left( D2^5 \left( -794 \sqrt{-D1 + D2} + 1547 \sqrt{D2 - r} \right) + \right. \\
& 85 D2^4 \left( 58 \sqrt{-D1 + D2} - 91 \sqrt{D2 - r} \right) r - 2210 D2^3 \left( 6 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \\
& 2210 D2^2 \left( 2 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 + 7735 D2 \sqrt{D2 - r} r^4 - 1547 \sqrt{D2 - r} r^5 \right) + \\
& D1^2 \left( 2 D2^6 \left( 887 \sqrt{-D1 + D2} - 1173 \sqrt{D2 - r} \right) + D2^5 \left( -8262 \sqrt{-D1 + D2} + 9435 \sqrt{D2 - r} \right) \right. \\
& \left. r + 255 D2^4 \left( 52 \sqrt{-D1 + D2} - 47 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 - 170 D2^3 \left( 26 \sqrt{-D1 + D2} - 3 \sqrt{D2 - r} \right) \right. \\
& \left. r^3 + 11220 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^4 - 9129 D2 \sqrt{D2 - r} r^5 + 2295 \sqrt{D2 - r} r^6 \right) + \\
& D1 \left( -16 D2^7 \left( 76 \sqrt{-D1 + D2} - 85 \sqrt{D2 - r} \right) + 68 D2^6 \left( 73 \sqrt{-D1 + D2} - 71 \sqrt{D2 - r} \right) r - \right. \\
& \left. 51 D2^5 \left( 130 \sqrt{-D1 + D2} - 99 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + 85 D2^4 \left( 26 \sqrt{-D1 + D2} - 5 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. 170 D^3 \sqrt{D2 - r} r^4 - 4590 D^2 \sqrt{D2 - r} r^5 + 4573 D^2 \sqrt{D2 - r} r^6 - 1309 \sqrt{D2 - r} r^7 \right) + \\
b4 & \left( 693 D1^9 \sqrt{-D1 + D2} - 3296 D2^9 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r} \right) + 16 D2^8 \right. \\
& \left( 950 \sqrt{-D1 + D2} - 847 \sqrt{D2 - r} \right) r + 2 D2^7 \left( -12597 \sqrt{-D1 + D2} + 9415 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \\
D2^6 & \left( 16796 \sqrt{-D1 + D2} - 8869 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 + D2^5 \left( -4199 \sqrt{-D1 + D2} + 1400 \sqrt{D2 - r} \right) r^4 + \\
329 D2^4 & \sqrt{D2 - r} r^5 - 14938 D2^3 \sqrt{D2 - r} r^6 + 27245 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^7 - \\
17836 D2 & \sqrt{D2 - r} r^8 + 4095 \sqrt{D2 - r} r^9 - 588 D1^6 D2^2 \sqrt{-D1 + D2} (23 D2 + 76 r) - \\
21 D1^8 & \sqrt{-D1 + D2} (221 D2 + 76 r) + 84 D1^7 D2 \sqrt{-D1 + D2} (145 D2 + 152 r) + \\
D1^4 D2 & \sqrt{-D1 + D2} (3407 D2^4 - 27740 D2^3 r - 125970 D2^2 r^2 + 83980 D2 r^3 - 20995 r^4) + \\
D1^5 & \sqrt{-D1 + D2} (2141 D2^4 + 72580 D2^3 r + 25194 D2^2 r^2 - 16796 D2 r^3 + 4199 r^4) + \\
D1^3 & \left( D2^6 \left( 10826 \sqrt{-D1 + D2} - 20349 \sqrt{D2 - r} \right) - 38 D2^5 \right. \\
& \left( 2068 \sqrt{-D1 + D2} - 3213 \sqrt{D2 - r} \right) r + 4845 D2^4 \left( 52 \sqrt{-D1 + D2} - 63 \sqrt{D2 - r} \right) \\
r^2 & - 6460 D2^3 \left( 26 \sqrt{-D1 + D2} - 63 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 + 1615 D2^2 \\
& \left( 26 \sqrt{-D1 + D2} - 189 \sqrt{D2 - r} \right) r^4 + 122094 D2 \sqrt{D2 - r} r^5 - 20349 \sqrt{D2 - r} r^6 \left. \right) + \\
D1^2 & \left( D2^7 \left( -22250 \sqrt{-D1 + D2} + 29070 \sqrt{D2 - r} \right) + 19 D2^6 \left( 6488 \sqrt{-D1 + D2} - \right. \right. \\
& \left. \left. 7497 \sqrt{D2 - r} \right) r - 3876 D2^5 \left( 65 \sqrt{-D1 + D2} - 63 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + 1615 D2^4 \right. \\
& \left( 104 \sqrt{-D1 + D2} - 63 \sqrt{D2 - r} \right) r^3 - 3230 D2^3 \left( 13 \sqrt{-D1 + D2} + 63 \sqrt{D2 - r} \right) \\
r^4 & + 305235 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^5 - 162792 D2 \sqrt{D2 - r} r^6 + 31977 \sqrt{D2 - r} r^7 \left. \right) + \\
D1 & \left( 16 D2^8 \left( 904 \sqrt{-D1 + D2} - 1007 \sqrt{D2 - r} \right) - 76 D2^7 \left( 937 \sqrt{-D1 + D2} - 931 \sqrt{D2 - r} \right) \right. \\
r & + 19 D2^6 \left( 6630 \sqrt{-D1 + D2} - 5537 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + 38 D2^5 \left( -2210 \sqrt{-D1 + D2} + 1253 \\
& \left. \sqrt{D2 - r} \right) r^3 + 1235 D2^4 \left( 17 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{D2 - r} \right) r^4 + 88312 D2^3 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
& \left. 145901 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^6 + 88198 D2 \sqrt{D2 - r} r^7 - 19019 \sqrt{D2 - r} r^8 \right) \left. \right) \Big/ \\
(56434560 & (-D1 + D2)^{11/2}) - \left( (D1 - r)^2 \left( 29393 a1 \left( 281 D1^6 + 1386 D2^3 r^3 - 1980 D2^2 r^4 + \right. \right. \right. \\
1100 D2 & r^5 - 225 r^6 - 512 D2^5 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \\
2 D1^5 & \left( -649 D2 - 194 r + 256 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
D1^4 & \left( 2178 D2^2 + 2134 D2 r - 97 r^2 - 2560 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
2 D1 & \left( -2079 D2^3 r^2 + 1881 D2^2 r^3 - 770 D2 r^4 + 125 r^5 + 1280 D2^4 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
D1^2 & \left( 594 D2^2 r^2 - 682 D2 r^3 + 145 r^4 + D2^3 \left( 4158 r - 5120 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
2 D1^3 & \left( -693 D2^3 + 143 D2 r^2 + 17 r^3 + D2^2 \left( -2277 r + 2560 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) \Big) - \\
4199 a3 & (D1 - r) \left( 1118 D1^6 + 6468 D2^3 r^3 - 9900 D2^2 r^4 + 5775 D2 r^5 - 1225 r^6 - \right. \\
1536 D2^5 & \left. \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + 3 D1^5 \left( -1793 D2 - 443 r + 512 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D1^4 \left( 9504 D2^2 + 7887 D2 r - 621 r^2 - 7680 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) + \\
& 3 D1 \left( -6468 D2^3 r^2 + 6732 D2^2 r^3 - 3025 D2 r^4 + 525 r^5 + 2560 D2^4 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) - \\
& 6 D1^2 \left( 198 D2^2 r^2 + 341 D2 r^3 - 100 r^4 + D2^3 \left( -3234 r + 2560 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
& 2 D1^3 \left( -3234 D2^3 + 1419 D2 r^2 - 59 r^3 + D2^2 \left( -9306 r + 7680 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} \right) \right) + \\
& 1120 \left( 323 a0 \left( -78 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 143 D2^3 r^2 \sqrt{-D1 + r} - 195 D2^2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 105 D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 21 r^5 \sqrt{-D1 + r} + D1^5 \left( 78 \sqrt{-D1 + D2} - 32 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D1^4 \left( -390 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 144 D2 \sqrt{-D1 + r} + 16 r \sqrt{-D1 + r} \right) + 2 D1 D2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( 195 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} - 143 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} + 78 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} - 15 r^3 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 D1^3 \left( -54 D2 r \sqrt{-D1 + r} + 11 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 39 D2^2 \left( 10 \sqrt{-D1 + D2} - 3 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D1^2 \left( 273 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 111 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 15 r^3 \sqrt{-D1 + r} + D2^3 \left( -780 \sqrt{-D1 + D2} + 143 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) \right) \right) + \\
& (D1 - r) \left( a4 (D1 - r) \left( -4199 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 20349 D2^3 r^2 \sqrt{-D1 + r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 31977 D2^2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 19019 D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 4095 r^5 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D1^5 \left( 4199 \sqrt{-D1 + D2} - 3296 \sqrt{-D1 + r} \right) + D1^4 \left( -20995 D2 \sqrt{-D1 + D2} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 16112 D2 \sqrt{-D1 + r} + 368 r \sqrt{-D1 + r} \right) + D1 \left( 20995 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 40698 D2^3 r \sqrt{-D1 + r} + 34884 D2^2 r^2 \sqrt{-D1 + r} - 12122 D2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 1456 r^4 \sqrt{-D1 + r} \right) + D1^2 \left( 26163 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 16701 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 3149 r^3 \sqrt{-D1 + r} - 323 D2^3 \left( 130 \sqrt{-D1 + D2} - 63 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + D1^3 \left( -6308 D2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. r \sqrt{-D1 + r} + 2418 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 3230 D2^2 \left( 13 \sqrt{-D1 + D2} - 9 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) \right) \right) - \\
& 19 a2 \left( -442 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 1547 D2^3 r^2 \sqrt{-D1 + r} - 2295 D2^2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
& \quad \left. 1309 D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} - 273 r^5 \sqrt{-D1 + r} + D1^5 \left( 442 \sqrt{-D1 + D2} - 288 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 10 D1^4 \left( -221 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 136 D2 \sqrt{-D1 + r} + 8 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. D1 \left( 2210 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 3094 D2^3 r \sqrt{-D1 + r} + 2244 D2^2 r^2 \sqrt{-D1 + r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 646 D2 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 56 r^4 \sqrt{-D1 + r} \right) + D1^3 \left( -748 D2 r \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 214 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 34 D2^2 \left( 130 \sqrt{-D1 + D2} - 69 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. D1^2 \left( 2397 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 1275 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 211 r^3 \sqrt{-D1 + r} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 221 D2^3 \left( 20 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) \right) \right) \right) / (56434560 (-D1 + D2)^{11/2});
\end{aligned}$$

$$\left\{ \sqrt{(D1 - D2)^3 (D1 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (r - D1)} \right\}$$

$$\text{With} \left[ \{D2 = 3, D1 = 1, r = 2\}, \text{N} \left[ \left( \sqrt{(D1 - D2)^3 (D1 - r)} - (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (r - D1)} \right), 30 \right] \right]$$

$$\text{With} \left[ \{D2 = 3, D1 = 1, r = 15/10\}, \text{N} \left[ \left( \sqrt{(D1 - D2)^3 (D1 - r)} - (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (r - D1)} \right), 30 \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& \text{With} \left[ \{D2 = 3, D1 = 1\}, \text{Plot} \left[ \left( \sqrt{(D1 - D2)^3 (D1 - r)} - (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (r - D1)} \right), \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \{r, D1, D2\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{1, 3\}, \{-10^{(-15)}, 10^{(-15)}\}\}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Red}, \text{Thickness}[0.01]\} \right] \right]
\end{aligned}$$

check on its 2nd derivative

```
Simplify[
  (FullSimplify[D[D[RGHTCFApprx22NewNotSimpl[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx22[r, D1, D2],
    Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]) /. {sqrt((D1 - D2)^3 (D1 - r) -> (D2 - D1) sqrt((D1 - D2) (D1 - r)),
    sqrt(-(D1 - D2)^3 (D2 - r) -> (D2 - D1) sqrt(-(D1 - D2) (D2 - r))}]
```

```
Simplify[
  (FullSimplify[(((RGHTCFApprx22NewNotSimpl[r, D1, D2]) /. {sqrt(-D1 + r) -> sqrt(D1), sqrt(D2 - r) ->
    sqrt(D2), sqrt(-(D1 + D2) (-D1 + r)) -> sqrt(D1) sqrt(D1), sqrt(-(D1 + D2) (D2 - r)) -> sqrt(D1) sqrt(D2)})) /.
    {sqrt(-D1 + D2) -> sqrt(D1)} /. {D2 -> D1 + D1, Assumptions -> {D1 > 0 && D1 > 0}}) /.
  {D1 -> D2 - D1, sqrt(D1) -> sqrt(r - D1), sqrt(D2) -> sqrt(D2 - r)}, Assumptions ->
  {0 < D1 < r < D2}]
```

```
RGHTCFApprx22New[r_, D1_, D2_] :=
  (29 393 b1 (99 D1^8 - 462 D1^7 D2 + 462 D1^6 D2^2 + 1386 D1^5 D2^3 - 4620 D1^4 D2^4 + 7392 D1^3 D2^5 -
    6336 D1^2 D2^6 + 2816 D1 D2^7 - 512 D2^8 + 512 (-D1 + D2)^11/2 (D2 - r)^5/2 - 330 D1^7 r +
    2310 D1^6 D2 r - 6930 D1^5 D2^2 r + 11 550 D1^4 D2^3 r - 18 480 D1^3 D2^4 r + 15 840 D1^2 D2^5 r -
    7040 D1 D2^6 r + 1280 D2^7 r + 13 860 D1^3 D2^3 r^2 - 11 880 D1^2 D2^4 r^2 + 5280 D1 D2^5 r^2 -
    960 D2^6 r^2 - 13 860 D1^3 D2^2 r^3 + 1980 D1^2 D2^3 r^3 - 880 D1 D2^4 r^3 + 160 D2^5 r^3 + 6930 D1^3 D2 r^4 +
    8910 D1^2 D2^2 r^4 - 110 D1 D2^3 r^4 + 20 D2^4 r^4 - 1386 D1^3 r^5 - 7722 D1^2 D2 r^5 - 3498 D1 D2^2 r^5 +
    6 D2^3 r^5 + 1980 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 + 580 D2^2 r^6 - 1100 D1 r^7 - 700 D2 r^7 + 225 r^8) +
  4199 b3 (-275 D1^9 + 1782 D1^8 D2 - 4356 D1^7 D2^2 + 3696 D1^6 D2^3 + 4158 D1^5 D2^4 -
    13 860 D1^4 D2^5 + 22 176 D1^3 D2^6 - 19 008 D1^2 D2^7 + 8448 D1 D2^8 - 1536 D2^9 +
    1536 (-D1 + D2)^11/2 (D2 - r)^7/2 + 693 D1^8 r - 5544 D1^7 D2 r + 19 404 D1^6 D2^2 r -
    38 808 D1^5 D2^3 r + 48 510 D1^4 D2^4 r - 77 616 D1^3 D2^5 r + 66 528 D1^2 D2^6 r - 29 568 D1 D2^7 r +
    5376 D2^8 r + 97 020 D1^3 D2^4 r^2 - 83 160 D1^2 D2^5 r^2 + 36 960 D1 D2^6 r^2 - 6720 D2^7 r^2 -
    129 360 D1^3 D2^3 r^3 + 41 580 D1^2 D2^4 r^3 - 18 480 D1 D2^5 r^3 + 3360 D2^6 r^3 + 97 020 D1^3 D2^2 r^4 +
    55 440 D1^2 D2^3 r^4 + 2310 D1 D2^4 r^4 - 420 D2^5 r^4 - 38 808 D1^3 D2 r^5 - 91 476 D1^2 D2^2 r^5 -
    24 024 D1 D2^3 r^5 - 42 D2^4 r^5 + 6468 D1^3 r^6 + 49 896 D1^2 D2 r^6 + 42 504 D1 D2^2 r^6 + 4032 D2^3 r^6 -
    9900 D1^2 r^7 - 26 400 D1 D2 r^7 - 7800 D2^2 r^7 + 5775 D1 r^8 + 5250 D2 r^8 - 1225 r^9) -
  1120 (b4 (-D1 + D2)^11/2 (-3296 (D1 - D2)^4 + 15 200 (D1 - D2)^3 (D1 - r) -
    25 194 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^2 + 16 796 (D1 - D2) (D1 - r)^3 - 4199 (D1 - r)^4) -
  19 b2 (288 (D1 - D2)^3 + 496 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 490 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 273 (D1 - r)^3)
  (D2 - r)^11/2 - b4 (3296 (D1 - D2)^3 + 6224 (D1 - D2)^2 (D1 - r) +
  6734 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 4095 (D1 - r)^3) (D2 - r)^13/2 + 38 b2 (-D1 + D2)^11/2
  (144 (D1 - D2)^3 + 663 (D1 - D2) (D1 - r)^2 - 221 (D1 - r)^3 + 544 (D1 - D2)^2 (-D1 + r)) +
  323 (-b0 (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3)
  (D2 - r)^9/2 - 2 b0 (-D1 + D2)^11/2
  (7 D1^2 + 16 D1 D2 + 16 D2^2 - 30 D1 r - 48 D2 r + 39 r^2)) -
  (D1 - r)^2 (-29 393 a1 ((1386 (-D1 + D2)^3 + 1980 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 1100 (-D1 + D2)
  (D1 - r)^2 + 225 (D1 - r)^3) (D1 - r)^3 + 512 (-D1 + D2)^11/2 sqrt(-D1 + r)) +
  4199 a3 (D1 - r) ((6468 (-D1 + D2)^3 + 9900 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 5775 (-D1 + D2)
  (D1 - r)^2 + 1225 (D1 - r)^3) (D1 - r)^3 + 1536 (-D1 + D2)^11/2 sqrt(-D1 + r)) +
  1120 (-4199 (-D1 + D2)^11/2 (6 a0 + (-2 a2 + a4 (D1 - r)) (D1 - r)) +
  (-D1 + r)^5/2 (969 (D1 - D2)^2 (65 a0 + 3 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r) +
  133 (-D1 + D2) (255 a0 + 11 (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^2 +
  21 (323 a0 + 13 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^3 + 323 (-D1 + D2)^3
  (143 a0 - 7 (D1 - r) (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r)))))) / (56 434 560 (-D1 + D2)^11/2);
```



Check on the 2 nd derivative

**Simplify**[D[D[RGHTCFApprx22New[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx22[r, D1, D2],  
Assumptions → {0 < D1 < r < D2}]

We rename functions LEFTCFApprx22New[r, D1, D2] and RGHTCFApprx22New[r, D1, D2]  
as LEFTCFApprx22[r, D1, D2] and RGHTCFApprx22[r, D1, D2]

LEFTCFApprx22[r\_, D1\_, D2\_] := LEFTCFApprx22New[r, D1, D2];

RGHTCFApprx22[r\_, D1\_, D2\_] := RGHTCFApprx22New[r, D1, D2];

$$\text{LeftCLD22}[r_, D1_, D2_] := \left( 1 + \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}} \right. \\ \left. (16 (D1 - D2)^3 - 40 (D1 - D2)^2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)^2 - 105 (D2 - r)^3) (-D1 + r)^{5/2} \right) \\ \left( a0 + a4 (D1 - r)^2 + a2 (-D1 + r) + \sqrt{-D1 + r} (a1 + a3 (-D1 + r)) \right);$$

$$\text{RgtCLD22}[r_, D1_, D2_] := \left( b0 + (b1 + b3 (D2 - r)) \sqrt{D2 - r} + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)^2 \right) \\ \left( 1 - \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}} (D2 - r)^{5/2} (-231 D1^3 + 16 D2^3 + 40 D2^2 r + \right. \\ \left. 70 D2 r^2 + 105 r^3 + 99 D1^2 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D2^2 + 20 D2 r + 35 r^2)) \right);$$

$$\text{CLDApprx22}[r_, D1_, D2_] := \left( 1 + \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}} \right. \\ \left. (16 (D1 - D2)^3 - 40 (D1 - D2)^2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)^2 - 105 (D2 - r)^3) (-D1 + r)^{5/2} \right) \\ \left( a0 + a4 (D1 - r)^2 + a2 (-D1 + r) + \sqrt{-D1 + r} (a1 + a3 (-D1 + r)) \right) + \\ \left( b0 + (b1 + b3 (D2 - r)) \sqrt{D2 - r} + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)^2 \right) \\ \left( 1 - \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}} (D2 - r)^{5/2} (-231 D1^3 + 16 D2^3 + 40 D2^2 r + 70 D2 r^2 + 105 r^3 + \right. \\ \left. 99 D1^2 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D2^2 + 20 D2 r + 35 r^2)) \right);$$

$$\text{LEFTCFApprx22}[r_, D1_, D2_] := \\ (29393 a1 (-512 D1^8 + 2816 D1^7 D2 - 6336 D1^6 D2^2 + 7392 D1^5 D2^3 - 4620 D1^4 D2^4 + 1386 D1^3 D2^5 + \\ 462 D1^2 D2^6 - 462 D1 D2^7 + 99 D2^8 + 1280 D1^7 r - 7040 D1^6 D2 r + 15840 D1^5 D2^2 r - \\ 18480 D1^4 D2^3 r + 11550 D1^3 D2^4 r - 6930 D1^2 D2^5 r + 2310 D1 D2^6 r - 330 D2^7 r - 960 D1^6 r^2 + \\ 5280 D1^5 D2 r^2 - 11880 D1^4 D2^2 r^2 + 13860 D1^3 D2^3 r^2 + 160 D1^5 r^3 - 880 D1^4 D2 r^3 + 1980 D1^3 \\ D2^2 r^3 - 13860 D1^2 D2^3 r^3 + 20 D1^4 r^4 - 110 D1^3 D2 r^4 + 8910 D1^2 D2^2 r^4 + 6930 D1 D2^3 r^4 + \\ 6 D1^3 r^5 - 3498 D1^2 D2 r^5 - 7722 D1 D2^2 r^5 - 1386 D2^3 r^5 + 580 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 + \\ 1980 D2^2 r^6 - 700 D1 r^7 - 1100 D2 r^7 + 225 r^8 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} (-D1 + r)^{5/2}) - \\ 4199 a3 (1225 D1^9 + 275 (D1 - D2)^9 + 693 (D1 - D2)^8 r + 6468 (-D1 + D2)^3 r^6 - \\ 9900 (D1 - D2)^2 r^7 + 5775 (-D1 + D2) r^8 - 1225 r^9 - 1536 (-D1 + D2)^{11/2} (-D1 + r)^{7/2} - \\ 525 D1^8 (11 D1 - 11 D2 + 21 r) + 300 D1^7 (33 (D1 - D2)^2 + 154 (D1 - D2) r + 147 r^2) -$$

$$\begin{aligned}
& 420 D1^2 r^4 (231 (D1 - D2)^3 + 495 (D1 - D2)^2 r + 385 (D1 - D2) r^2 + 105 r^3) + \\
& 420 D1^3 r^3 (308 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 770 (D1 - D2) r^2 + 245 r^3) - \\
& 210 D1^4 r^2 (462 (D1 - D2)^3 + 1650 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 735 r^3) - \\
& 84 D1^6 (77 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 1225 r^3) + 42 D1^5 r \\
& (924 (D1 - D2)^3 + 4950 (D1 - D2)^2 r + 7700 (D1 - D2) r^2 + 3675 r^3) + 21 D1 (-33 (D1 - D2)^8 + \\
& 1848 (D1 - D2)^3 r^5 + 3300 (D1 - D2)^2 r^6 + 2200 (D1 - D2) r^7 + 525 r^8) - 1120 \\
& (323 (a0 (143 (-D1 + D2)^3 + 195 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 105 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3) \\
& (-D1 + r)^{9/2} - 2 a0 (-D1 + D2)^{11/2} (16 D1^2 + 7 D2^2 + 16 D1 (D2 - 3 r) - 30 D2 r + 39 r^2)) + \\
& (-D1 + D2)^{11/2} (-693 a4 (D1 - D2)^4 + 1596 (D1 - D2)^3 (a2 + a4 (D1 - r)) - \\
& 4522 a2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 4199 (D1 - r)^3 (2 a2 + a4 (-D1 + r))) - \\
& (-D1 + r)^{11/2} (2907 (D1 - D2)^2 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r) + \\
& 1463 (-D1 + D2) (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& 273 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 2261 (-D1 + D2)^3 (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r)))) + \\
& (D2 - r)^2 (29393 b1 (-281 (D1 - D2)^6 + 388 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 97 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 + \\
& 34 (-D1 + D2)^3 (D1 - r)^3 - 145 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 + \\
& 250 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 + 225 (D1 - r)^6 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{D2 - r}) + \\
& 4199 b3 (-1118 (D1 - D2)^6 + 1329 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 621 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 + \\
& 118 (D1 - D2)^3 (D1 - r)^3 - 600 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 + 1575 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 + \\
& 1225 (D1 - r)^6 + 1536 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{D2 - r}) (D2 - r) + 1120 \\
& (323 b0 (78 (-D1 + D2)^{11/2} + (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + \\
& 21 (D1 - r)^3) (D2 - r)^{5/2}) + 4199 (-D1 + D2)^{11/2} (2 b2 + b4 (D2 - r)) (D2 - r) + \\
& (D2 - r)^{7/2} (-3296 b4 (D1 - D2)^4 - 7 (-D1 + D2) (1330 b2 + 377 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& 273 (19 b2 + 15 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 48 (-D1 + D2)^3 (114 b2 + 61 b4 (-D1 + r)) + \\
& 2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) (4712 b2 + 255 b4 (-D1 + r)))) / \\
& (56434560 (-D1 + D2)^{11/2}); \text{RGHTCFApprx22}[r_, D1_, D2_] := \\
& (29393 b1 (99 D1^8 - 462 D1^7 D2 + 462 D1^6 D2^2 + 1386 D1^5 D2^3 - 4620 D1^4 D2^4 + 7392 D1^3 D2^5 - \\
& 6336 D1^2 D2^6 + 2816 D1 D2^7 - 512 D2^8 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} (D2 - r)^{5/2} - 330 D1^7 r + \\
& 2310 D1^6 D2 r - 6930 D1^5 D2^2 r + 11550 D1^4 D2^3 r - 18480 D1^3 D2^4 r + 15840 D1^2 D2^5 r - \\
& 7040 D1 D2^6 r + 1280 D2^7 r + 13860 D1^3 D2^3 r^2 - 11880 D1^2 D2^4 r^2 + 5280 D1 D2^5 r^2 - \\
& 960 D2^6 r^2 - 13860 D1^3 D2^2 r^3 + 1980 D1^2 D2^3 r^3 - 880 D1 D2^4 r^3 + 160 D2^5 r^3 + 6930 D1^3 D2 r^4 + \\
& 8910 D1^2 D2^2 r^4 - 110 D1 D2^3 r^4 + 20 D2^4 r^4 - 1386 D1^3 r^5 - 7722 D1^2 D2 r^5 - 3498 D1 D2^2 r^5 + \\
& 6 D2^3 r^5 + 1980 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 + 580 D2^2 r^6 - 1100 D1 r^7 - 700 D2 r^7 + 225 r^8) + \\
& 4199 b3 (-275 D1^9 + 1782 D1^8 D2 - 4356 D1^7 D2^2 + 3696 D1^6 D2^3 + 4158 D1^5 D2^4 - \\
& 13860 D1^4 D2^5 + 22176 D1^3 D2^6 - 19008 D1^2 D2^7 + 8448 D1 D2^8 - 1536 D2^9 + \\
& 1536 (-D1 + D2)^{11/2} (D2 - r)^{7/2} + 693 D1^8 r - 5544 D1^7 D2 r + 19404 D1^6 D2^2 r - \\
& 38808 D1^5 D2^3 r + 48510 D1^4 D2^4 r - 77616 D1^3 D2^5 r + 66528 D1^2 D2^6 r - 29568 D1 D2^7 r + \\
& 5376 D2^8 r + 97020 D1^3 D2^4 r^2 - 83160 D1^2 D2^5 r^2 + 36960 D1 D2^6 r^2 - 6720 D2^7 r^2 - \\
& 129360 D1^3 D2^3 r^3 + 41580 D1^2 D2^4 r^3 - 18480 D1 D2^5 r^3 + 3360 D2^6 r^3 + 97020 D1^3 D2^2 r^4 + \\
& 55440 D1^2 D2^3 r^4 + 2310 D1 D2^4 r^4 - 420 D2^5 r^4 - 38808 D1^3 D2 r^5 - 91476 D1^2 D2^2 r^5 - \\
& 24024 D1 D2^3 r^5 - 42 D2^4 r^5 + 6468 D1^3 r^6 + 49896 D1^2 D2 r^6 + 42504 D1 D2^2 r^6 + 4032 D2^3 r^6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9900 D1^2 r^7 - 26400 D1 D2 r^7 - 7800 D2^2 r^7 + 5775 D1 r^8 + 5250 D2 r^8 - 1225 r^9) - \\
& 1120 (b4 (-D1 + D2)^{11/2} (-3296 (D1 - D2)^4 + 15200 (D1 - D2)^3 (D1 - r) - \\
& \quad 25194 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^2 + 16796 (D1 - D2) (D1 - r)^3 - 4199 (D1 - r)^4) - \\
& 19 b2 (288 (D1 - D2)^3 + 496 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 490 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 273 (D1 - r)^3) \\
& \quad (D2 - r)^{11/2} - b4 (3296 (D1 - D2)^3 + 6224 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + \\
& \quad 6734 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 4095 (D1 - r)^3) (D2 - r)^{13/2} + 38 b2 (-D1 + D2)^{11/2} \\
& \quad (144 (D1 - D2)^3 + 663 (D1 - D2) (D1 - r)^2 - 221 (D1 - r)^3 + 544 (D1 - D2)^2 (-D1 + r)) + \\
& 323 (-b0 (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3) \\
& \quad (D2 - r)^{9/2} - 2 b0 (-D1 + D2)^{11/2} (7 D1^2 + 16 D1 D2 + 16 D2^2 - 30 D1 r - 48 D2 r + 39 r^2)) - \\
& (D1 - r)^2 (-29393 a1 ((1386 (-D1 + D2)^3 + 1980 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 1100 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + \\
& \quad 225 (D1 - r)^3) (D1 - r)^3 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{-D1 + r}) + 4199 a3 (D1 - r) \\
& \quad ((6468 (-D1 + D2)^3 + 9900 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 5775 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + 1225 (D1 - r)^3) \\
& \quad (D1 - r)^3 + 1536 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{-D1 + r})) + \\
& 1120 (-4199 (-D1 + D2)^{11/2} (6 a0 + (-2 a2 + a4 (D1 - r)) (D1 - r)) + \\
& \quad (-D1 + r)^{5/2} (969 (D1 - D2)^2 (65 a0 + 3 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r) + \\
& \quad 133 (-D1 + D2) (255 a0 + 11 (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& \quad 21 (323 a0 + 13 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^3 + 323 (-D1 + D2)^3 \\
& \quad (143 a0 - 7 (D1 - r) (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r)))))) / (56434560 (-D1 + D2)^{11/2}); \\
& \text{EXTRCNTRBLft22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] := \frac{1}{2520} (D2 - r)^5 \\
& \quad (-9 a (14 D1^3 - D2^3 - 3 D2^2 r - 5 D2 r^2 - 5 r^3 - 14 D1^2 (D2 + 2 r) + 2 D1 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2)) + \\
& \quad b (126 D1^4 + 5 D2^4 + 16 D2^3 r + 30 D2^2 r^2 + 40 D2 r^3 + 35 r^4 - 168 D1^3 (D2 + 2 r) + \\
& \quad 36 D1^2 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2) - 36 D1 (D2^3 + 3 D2^2 r + 5 D2 r^2 + 5 r^3))) ; \\
& \text{EXTRCNTRBRgt22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] := \frac{1}{2520} (D1 - r)^5 \\
& \quad (9 a (D1^3 - 6 D1^2 D2 + 14 D1 D2^2 - 14 D2^3 + (3 D1^2 - 16 D1 D2 + 28 D2^2) r + 5 (D1 - 4 D2) r^2 + 5 r^3) - \\
& \quad b (D1 - r) (4 D1^3 - 27 D1^2 D2 + 72 D1 D2^2 - 84 D2^3 + \\
& \quad 15 (D1^2 - 6 D1 D2 + 12 D2^2) r + 15 (2 D1 - 9 D2) r^2 + 35 r^3)) ;
\end{aligned}$$

CHECKS :

```

FullSimplify[D[D[RGHTCFApprx22[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx22[r, D1, D2],
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
FullSimplify[D[D[LEFTCFApprx22[r, D1, D2], r], r] - CLDApprx22[r, D1, D2],
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx22[r, D1, D2], {r, D1, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Series[CLDApprx22[r, D1, D2], {r, D2, 2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
Simplify[Limit[LEFTCFApprx22[r, D1, D2], r -> D1, Direction -> -1],
  Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[LEFTCFApprx22[r, D1, D2], r -> D2, Direction -> 1],
  Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[RGHTCFApprx22[r, D1, D2], r -> D1, Direction -> -1],
  Assumptions -> {0 < D1 < D2}]
Simplify[Limit[RGHTCFApprx22[r, D1, D2], r -> D2, Direction -> 1],
  Assumptions -> {0 < D1 < D2}]

```

Thanks to the following two identities the first two results are equal to zero, as expected.

Besides the last two integrals simplify slightly

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sqrt{(D1 - D2)^3 (D1 - r)} \rightarrow ((D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (r - D1)}) \right\} \\
& \left\{ \sqrt{-(D1 - D2)^3 (D2 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1) (D2 - r)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\left(\frac{1}{(-D1 + D2)^{3/2}} \left(-a1 \left((D1 - D2) \sqrt{(D1 - D2)(D1 - r)} + \sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)}\right) + a3 \left((D1 - D2) \sqrt{(D1 - D2)(D1 - r)} + \sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)}\right) (D1 - r) - \left((D1 - D2) \sqrt{-(D1 - D2)(D2 - r)} + \sqrt{-(D1 - D2)^3(D2 - r)}\right) (b1 + b3 D2 - b3 r)\right)\right) / \left.\begin{array}{l} \left\{\sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1)(r - D1)}\right\}, \\ \left\{\sqrt{-(D1 - D2)^3(D2 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1)(D2 - r)}\right\}, \end{array}\right] \text{Assumptions} \rightarrow \{0 < D1 < r < D2 \ \&\& \ D1 < D2\}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\left(\frac{1}{(-D1 + D2)^{3/2}} \left(-a1 \left((D1 - D2) \sqrt{(D1 - D2)(D1 - r)} + \sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)}\right) + a3 \left((D1 - D2) \sqrt{(D1 - D2)(D1 - r)} + \sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)}\right) (D1 - r) - \left((D1 - D2) \sqrt{-(D1 - D2)(D2 - r)} + \sqrt{-(D1 - D2)^3(D2 - r)}\right) (b1 + b3 D2 - b3 r)\right)\right) / \left.\begin{array}{l} \left\{\sqrt{(D1 - D2)^3(D1 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1)(r - D1)}\right\}, \\ \left\{\sqrt{-(D1 - D2)^3(D2 - r)} \rightarrow (D2 - D1) \sqrt{(D2 - D1)(D2 - r)}\right\}, \end{array}\right] \text{Assumptions} \rightarrow \{0 < D1 < r < D2 \ \&\& \ D1 < D2\}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{1}{56434560} (-D1 + D2)^{3/2} \left(1154725 a3 D1^2 + 1755182 b3 D1^2 - 2909907 a1 (D1 - D2) - 6789783 b1 (D1 - D2) - 2309450 a3 D1 D2 - 3510364 b3 D1 D2 + 1154725 a3 D2^2 + 1755182 b3 D2^2 + 5064640 a0 \sqrt{-D1 + D2} + 16640960 b0 \sqrt{-D1 + D2} - 1787520 a2 D1 \sqrt{-D1 + D2} - 3277120 b2 D1 \sqrt{-D1 + D2} + 776160 a4 D1^2 \sqrt{-D1 + D2} + 1011360 b4 D1^2 \sqrt{-D1 + D2} + 1787520 a2 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 3277120 b2 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 1552320 a4 D1 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 2022720 b4 D1 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 776160 a4 D2^2 \sqrt{-D1 + D2} + 1011360 b4 D2^2 \sqrt{-D1 + D2}\right), \text{Assumptions} \rightarrow \{0 < D1 < r < D2 \ \&\& \ D1 < D2\}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{1}{56434560} (-D1 + D2)^{3/2} \left(1755182 a3 D1^2 + 1154725 b3 D1^2 - 6789783 a1 (D1 - D2) - 2909907 b1 (D1 - D2) - 3510364 a3 D1 D2 - 2309450 b3 D1 D2 + 1755182 a3 D2^2 + 1154725 b3 D2^2 + 16640960 a0 \sqrt{-D1 + D2} + 5064640 b0 \sqrt{-D1 + D2} - 3277120 a2 D1 \sqrt{-D1 + D2} - 1787520 b2 D1 \sqrt{-D1 + D2} + 1011360 a4 D1^2 \sqrt{-D1 + D2} + 776160 b4 D1^2 \sqrt{-D1 + D2} + 3277120 a2 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 1787520 b2 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 2022720 a4 D1 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 1552320 b4 D1 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 1011360 a4 D2^2 \sqrt{-D1 + D2} + 776160 b4 D2^2 \sqrt{-D1 + D2}\right), \text{Assumptions} \rightarrow \{0 < D1 < r < D2 \ \&\& \ D1 < D2\}$$

Evaluation of the extra-contributions:

EXTRCNTRBLftnn[r, D1, D2, a, b] and EXTRCNTRBRgtmn[r, D1, D2, a, b] necessary to satisfy the last matching condition respectively on the left or on the right of the considered interval

NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 3]

```

FullSimplify[Integrate[
  Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 3], {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
  {x, D1, r}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}]
FullSimplify[Integrate[Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 3],
  {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, r, D2},
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}]

```

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBRgt33}[r_, D1_, D2_, a_, b_] &:= \frac{1}{13860} (D1 - r)^6 \\
& (11 a (D1^4 - 8 D1^3 D2 + 27 D1^2 D2^2 - 48 D1 D2^3 + 42 D2^4 + 2 (2 D1^3 - 15 D1^2 D2 + 45 D1 D2^2 - 60 D2^3) r + \\
& 3 (3 D1^2 - 20 D1 D2 + 45 D2^2) r^2 + 14 (D1 - 5 D2) r^3 + 14 r^4) - b (D1 - r) (5 D1^4 - 44 D1^3 D2 + \\
& 165 D1^2 D2^2 - 330 D1 D2^3 + 330 D2^4 + 6 (4 D1^3 - 33 D1^2 D2 + 110 D1 D2^2 - 165 D2^3) r + \\
& 21 (3 D1^2 - 22 D1 D2 + 55 D2^2) r^2 + 56 (2 D1 - 11 D2) r^3 + 126 r^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBLft33}[r_, D1_, D2_, a_, b_] &:= \frac{1}{13860} (D2 - r)^6 \\
& (11 a (42 D1^4 + D2^4 + 4 D2^3 r + 9 D2^2 r^2 + 14 D2 r^3 + 14 r^4 - 24 D1^3 (2 D2 + 5 r) + \\
& 9 D1^2 (3 D2^2 + 10 D2 r + 15 r^2) - 2 D1 (4 D2^3 + 15 D2^2 r + 30 D2 r^2 + 35 r^3)) + \\
& b (-462 D1^5 + 6 D2^5 + 25 D2^4 r + 60 D2^3 r^2 + 105 D2^2 r^3 + 140 D2 r^4 + 126 r^5 + 330 D1^4 (2 D2 + 5 r) - \\
& 165 D1^3 (3 D2^2 + 10 D2 r + 15 r^2) + 55 D1^2 (4 D2^3 + 15 D2^2 r + 30 D2 r^2 + 35 r^3) - \\
& 55 D1 (D2^4 + 4 D2^3 r + 9 D2^2 r^2 + 14 D2 r^3 + 14 r^4));
\end{aligned}$$

```
NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 2]
```

```

FullSimplify[Integrate[
  Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 2], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
  {x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}]
FullSimplify[Integrate[Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 2],
  {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, D1, r},
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}]

```

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBLft22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] &:= \frac{1}{2520} (D2 - r)^5 \\
& (-9 a (14 D1^3 - D2^3 - 3 D2^2 r - 5 D2 r^2 - 5 r^3 - 14 D1^2 (D2 + 2 r) + 2 D1 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2)) + \\
& b (126 D1^4 + 5 D2^4 + 16 D2^3 r + 30 D2^2 r^2 + 40 D2 r^3 + 35 r^4 - 168 D1^3 (D2 + 2 r) + \\
& 36 D1^2 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2) - 36 D1 (D2^3 + 3 D2^2 r + 5 D2 r^2 + 5 r^3));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBRgt22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] &:= \frac{1}{2520} (D1 - r)^5 \\
& (9 a (D1^3 - 6 D1^2 D2 + 14 D1 D2^2 - 14 D2^3 + (3 D1^2 - 16 D1 D2 + 28 D2^2) r + 5 (D1 - 4 D2) r^2 + 5 r^3) - \\
& b (D1 - r) (4 D1^3 - 27 D1^2 D2 + 72 D1 D2^2 - 84 D2^3 + \\
& 15 (D1^2 - 6 D1 D2 + 12 D2^2) r + 15 (2 D1 - 9 D2) r^2 + 35 r^3));
\end{aligned}$$

```

FullSimplify[Integrate[
  Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 1], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
  {x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
FullSimplify[Integrate[Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 1],
  {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, D1, r},
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

```

EXTRCNTRBLft11[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=
  
$$\frac{1}{420} (D2 - r)^4 (7 a (5 D1^2 - 4 D1 D2 + D2^2 - 6 D1 r + 2 D2 r + 2 r^2) +$$

  
$$b (-35 D1^3 + 4 D2^3 + 9 D2^2 r + 12 D2 r^2 + 10 r^3 + 21 D1^2 (2 D2 + 3 r) - 21 D1 (D2^2 + 2 D2 r + 2 r^2)));$$

EXTRCNTRBRgt11[r_, D1_, D2_, a_, b_] := - 
$$\frac{1}{420} (D1 - r)^4$$

  
$$(b (D1 - r) (3 D1^2 - 14 D1 D2 + 21 D2^2 + 8 D1 r - 28 D2 r + 10 r^2) -$$

  
$$7 a (D1^2 + 5 D2^2 - 6 D2 r + 2 r^2 + 2 D1 (-2 D2 + r)));$$


```

```

FullSimplify[Integrate[
  Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 0], {y, x, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}],
  {x, r, D2}, Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]
FullSimplify[Integrate[NEXCintgrnd[y, D1, D2, a, b, 0],
  {y, D1, x}, Assumptions -> {0 < D1 < x < D2}], {x, D1, r},
  Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}], Assumptions -> {0 < D1 < r < D2}]

```

```

EXTRCNTRBLft00[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=
  
$$\frac{1}{60} (D2 - r)^3 (5 a (-2 D1 + D2 + r) + b (10 D1^2 + 3 D2^2 + 4 D2 r + 3 r^2 - 10 D1 (D2 + r)));$$

EXTRCNTRBRgt00[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=
  - 
$$\frac{1}{60} (D1 - r)^3 (-5 a (D1 - 2 D2 + r) + b (D1 - r) (2 D1 - 5 D2 + 3 r));$$


```

CHECKS :

```

Series[EXTRCNTRBLft22[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBLft22[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBRgt22[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBRgt22[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBLft11[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBLft11[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBLft00[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBLft00[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBRgt11[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBRgt11[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBRgt00[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 3}]
Series[EXTRCNTRBRgt00[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 3}]

Series[EXTRCNTRBLft22[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 4}]
Simplify[Series[EXTRCNTRB33[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 4}]]

Series[EXTRCNTRB22[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 4}]
Simplify[Series[EXTRCNTRB22[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 4}]]

Series[EXTRCNTRB11[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 4}]
Simplify[Series[EXTRCNTRB11[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 4}]]

Series[EXTRCNTRB00[r, D1, D2, a, b], {r, D1, 4}]
Simplify[Series[EXTRCNTRB11[r, D1, D2, a, b], {r, D2, 4}]]

```

THE FINAL FORMULAE ARE:

```

GLftNw[ξ_, K_] :=
  If[K < 4, 4 * ξ^4 * Sum[(cflft[[i]] / ((3 + i) (1 + i))) * (ξ)^(i-1), {i, 1, 2 K + 1}]];
GRgtNw[η_, K_] := If[K < 4,
  4 * η^4 * Sum[(cfrgt[[i]] / ((3 + i) (1 + i))) * (η)^(i-1), {i, 1, 2 K + 1}]];

```

K = 0

```

LeftCLD00[r_, D1_, D2_] := a0  $\left( 1 + \frac{\sqrt{-D1 + r} (2 D1 - 3 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right)$ ;

RgtCLD00[r_, D1_, D2_] := b0  $\left( 1 - \frac{\sqrt{D2 - r} (-3 D1 + 2 D2 + r)}{2 (-D1 + D2)^{3/2}} \right)$ ;

CLDApprx00[r_, D1_, D2_] := LeftCLD00[r, D1, D2] + RgtCLD00[r, D1, D2];

LEFTCFApprx00[r_, D1_, D2_] := b0  $\left( \frac{D2^2}{2} - D2 r + \frac{r^2}{2} - \frac{2 (D2 - r)^{5/2} (-7 D1 + 6 D2 + r)}{35 (-D1 + D2)^{3/2}} \right) +$ 

 $\frac{1}{70 (D1 - D2)} a0 \left( -24 D1^3 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} + 28 D1^2 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} + 44 D1^2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r - \right.$ 

 $56 D1 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r - 16 D1 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^2 + 28 D2 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^2 -$ 

 $\left. 4 \sqrt{\frac{D1 - r}{D1 - D2}} r^3 + (D1 - D2) (24 D1^2 + 8 D1 D2 + 3 D2^2 - 14 (4 D1 + D2) r + 35 r^2) \right)$ ;

RGHTCFApprx00[r_, D1_, D2_] := a0  $\left( \frac{D1^2}{2} - D1 r + \frac{r^2}{2} - \frac{2}{35} (D1 - r) \left( \frac{D1 - r}{D1 - D2} \right)^{3/2} (6 D1 - 7 D2 + r) \right) -$ 

 $\frac{1}{70 (-D1 + D2)^{3/2}} b0 \left( 3 D1^3 \sqrt{-D1 + D2} - 24 D2^3 (\sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r}) + \right.$ 

 $D1^2 \sqrt{-D1 + D2} (5 D2 - 14 r) + D2^2 (56 \sqrt{-D1 + D2} - 44 \sqrt{D2 - r}) r +$ 

 $D2 (-35 \sqrt{-D1 + D2} + 16 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 4 \sqrt{D2 - r} r^3 + D1 (4 D2^2 (4 \sqrt{-D1 + D2} - 7 \sqrt{D2 - r}) +$ 

 $\left. D2 (-42 \sqrt{-D1 + D2} + 56 \sqrt{D2 - r}) r + 7 (5 \sqrt{-D1 + D2} - 4 \sqrt{D2 - r}) r^2 \right)$ ;

EXTRCNTRBLft00[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=  $\frac{1}{60} (D2 - r)^3$ 

 $(5 a (-2 D1 + D2 + r) + b (10 D1^2 + 3 D2^2 + 4 D2 r + 3 r^2 - 10 D1 (D2 + r)))$ ;

EXTRCNTRBRgt00[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=

 $-\frac{1}{60} (D1 - r)^3 (-5 a (D1 - 2 D2 + r) + b (D1 - r) (2 D1 - 5 D2 + 3 r))$ ;

```

K = 1

```

LeftCLD11[r_, D1_, D2_] := (a0 + a1 sqrt(-D1 + r) + a2 (-D1 + r))
  ( 1 - ( (-D1 + r)^(3/2) (8 D1^2 + 35 D2^2 - 42 D2 r + 15 r^2 + 4 D1 (-7 D2 + 3 r)) ) /
    ( 8 (-D1 + D2)^(7/2) ) );
RgtCLD11[r_, D1_, D2_] := (b0 + b1 sqrt(D2 - r) + b2 (D2 - r))
  ( 1 - ( (D2 - r)^(3/2) (35 D1^2 + 8 D2^2 + 12 D2 r + 15 r^2 - 14 D1 (2 D2 + 3 r)) ) /
    ( 8 (-D1 + D2)^(7/2) ) );
CLDApprx11[r_, D1_, D2_] := LeftCLD11[r, D1, D2] + RgtCLD11[r, D1, D2];
LEFTCFApprx11[r_, D1_, D2_] :=
  - 1 / ( 205 920 (-D1 + D2)^(7/2) ) (
    429 b1 (D2 - r)^2 ( 175 D1^2 (D2 - r)^2 + 128 D1^3 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) -
      384 D1^2 D2 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) + 384 D1 D2^2 sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) - 128 D2^3
      sqrt(-D1 + D2) (D2 - r) - 14 D1 (D2 - r)^2 (16 D2 + 9 r) + (D2 - r)^2 (79 D2^2 + 66 D2 r + 30 r^2) ) +
    429 a1 ( 128 D1^6 - 21 D2^6 + 70 D2^5 r + 175 D2^2 r^4 - 126 D2 r^5 + 30 r^6 -
      128 D2^3 r^2 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r) + 64 D1^5 (-7 D2 - 5 r + 2 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) - 16 D1^4
      (-35 D2^2 - 70 D2 r - 15 r^2 + 24 D2 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r) + 16 r sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) +
      D1^2 (35 D2^4 - 5 r^4 + 6 D2^2 r (175 r - 128 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) +
        D2^3 (700 r - 128 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) + 4 D2 r^2 (35 r - 96 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) ) +
      8 D1^3 (-35 D2^3 + r^2 (-5 r + 16 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) +
        3 D2 r (-35 r + 32 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) + D2^2 (-175 r + 48 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) ) +
      D1 (56 D2^5 - 350 D2^4 r + 256 D2^3 sqrt(D1 - D2) (D1 - r) r + 280 D2 r^4 - 54 r^5 +
        4 D2^2 r^2 (-175 r + 96 sqrt(-D1 + D2) (-D1 + r)) ) ) - 80
    ( (D2 - r)^2 (-39 b0 (33 D1^3 sqrt(-D1 + D2) + D2^3 (-33 sqrt(-D1 + D2) + 16 sqrt(D2 - r)) - 4 D2^2 sqrt(D2 - r) r -
      7 D2 sqrt(D2 - r) r^2 - 5 sqrt(D2 - r) r^3 - 33 D1^2 (3 D2 sqrt(-D1 + D2) - D2 sqrt(D2 - r) + sqrt(D2 - r) r) +
      11 D1 (D2^2 (9 sqrt(-D1 + D2) - 4 sqrt(D2 - r)) + 2 D2 sqrt(D2 - r) r + 2 sqrt(D2 - r) r^2) ) +
      b2 (D2 - r) (-429 D1^3 sqrt(-D1 + D2) + D2^3 (429 sqrt(-D1 + D2) - 304 sqrt(D2 - r)) +
        28 D2^2 sqrt(D2 - r) r + 141 D2 sqrt(D2 - r) r^2 + 135 sqrt(D2 - r) r^3 +
        143 D1^2 (9 D2 sqrt(-D1 + D2) - 5 D2 sqrt(D2 - r) + 5 sqrt(D2 - r) r) -
        13 D1 (D2^2 (99 sqrt(-D1 + D2) - 68 sqrt(D2 - r)) + 26 D2 sqrt(D2 - r) r + 42 sqrt(D2 - r) r^2) ) ) -
      39 a0 (-5 D2^5 sqrt(-D1 + D2) + 22 D2^4 sqrt(-D1 + D2) r - 33 D2^3 sqrt(-D1 + D2) r^2 + 33 D2^2 r^3 sqrt(-D1 + r) -
        22 D2 r^4 sqrt(-D1 + r) + 5 r^5 sqrt(-D1 + r) + 16 D1^5 (sqrt(-D1 + D2) - sqrt(-D1 + r)) +
        4 D1^4 (-9 D2 sqrt(-D1 + D2) - 11 sqrt(-D1 + D2) r + 11 D2 sqrt(-D1 + r) + 9 r sqrt(-D1 + r)) +

```



$$\begin{aligned}
& D1^3 \left( D2^2 \left( 17 \sqrt{-D1 + D2} - 33 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^2 \left( 33 \sqrt{-D1 + D2} - 17 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 110 D2 r \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + D1 \left( 3 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 22 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r + \right. \\
& \quad \left. 22 D2 r^3 \sqrt{-D1 + r} - 3 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 99 D2^2 r^2 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^2 \left( 5 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} - 5 r^3 \sqrt{-D1 + r} + 33 D2 r^2 \left( -3 \sqrt{-D1 + D2} + 2 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 33 D2^2 r \left( -2 \sqrt{-D1 + D2} + 3 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
a2 & \left( 70 D2^6 \sqrt{-D1 + D2} - 195 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} r + 429 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r^3 - 715 D2^2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
& \quad \left. 546 D2 r^5 \sqrt{-D1 + r} - 135 r^6 \sqrt{-D1 + r} + 304 D1^6 \left( \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& D1^5 \left( -732 D2 \sqrt{-D1 + D2} - 1092 \sqrt{-D1 + D2} r + 884 D2 \sqrt{-D1 + r} + 940 r \sqrt{-D1 + r} \right) + \\
& D1^4 \left( D2^2 \left( 387 \sqrt{-D1 + D2} - 715 \sqrt{-D1 + r} \right) + \right. \\
& \quad \left. 26 D2 r \left( 111 \sqrt{-D1 + D2} - 115 \sqrt{-D1 + r} \right) + 9 r^2 \left( 143 \sqrt{-D1 + D2} - 95 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^2 \left( 75 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} - 663 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r - 10 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 13 D2 r^3 \right. \\
& \quad \left. \left( 99 \sqrt{-D1 + D2} - 20 \sqrt{-D1 + r} \right) + 429 D2^2 r^2 \left( 9 \sqrt{-D1 + D2} - 10 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1 \left( -225 D2^5 \sqrt{-D1 + D2} + 975 D2^4 \sqrt{-D1 + D2} r - 1287 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} r^2 - 1300 \right. \\
& \quad \left. D2 r^4 \sqrt{-D1 + r} + 264 r^5 \sqrt{-D1 + r} + 143 D2^2 r^3 \left( -9 \sqrt{-D1 + D2} + 20 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) + \\
& D1^3 \left( 121 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 39 D2 r^2 \left( -99 \sqrt{-D1 + D2} + 80 \sqrt{-D1 + r} \right) + r^3 \left( -429 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{-D1 + D2} + 100 \sqrt{-D1 + r} \right) + 13 D2^2 r \left( -147 \sqrt{-D1 + D2} + 220 \sqrt{-D1 + r} \right) \right) \Big) \Big) \Big) \Big) ;
\end{aligned}$$

$$RGHTCFApprx11[r_-, D1_-, D2_-] := \frac{1}{205920 (-D1 + D2)^{7/2}}$$

(429 b1)

$$\begin{aligned}
& \left( 21 D1^6 - 128 D2^6 - 35 D1^4 D2 (D2 - 10 r) + 5 D2^2 r^4 + 54 D2 r^5 - \right. \\
& \quad \left. 30 r^6 - 14 D1^5 (4 D2 + 5 r) + 64 D2^5 \left( 2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 5 r \right) + \right. \\
& \quad \left. 8 D2^3 r^2 \left( 16 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 5 r \right) - 16 D2^4 r \left( 16 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 15 r \right) - \right. \\
& \quad \left. 2 D1 \left( -224 D2^5 + 140 D2 r^4 - 63 r^5 + 16 D2^4 \left( 12 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) - 12 D2^3 r \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) + 2 D2^2 r^2 \left( 96 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 35 r \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. 4 D1^3 \left( -70 D2^3 - 64 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} r + 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} r^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. D2^2 \left( 32 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. D1^2 \left( -560 D2^4 - 175 r^4 + 8 D2^3 \left( 48 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) + 4 D2 r^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left( 96 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) - 6 D2^2 r \left( 128 \sqrt{(-D1 + D2) (D2 - r)} + 175 r \right) \right) \right) + \\
80 & \left( -39 b0 \left( 5 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} + 16 D2^5 \left( -\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 D2^4 \left( 11 \sqrt{-D1 + D2} - 9 \sqrt{D2 - r} \right) r + D2^3 \left( -33 \sqrt{-D1 + D2} + 17 \sqrt{D2 - r} \right) r^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^3 + 3 D2 \sqrt{D2 - r} r^4 - 5 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
 & D1^4 \sqrt{-D1 + D2} (3 D2 + 22 r) + D1^3 \sqrt{-D1 + D2} (-5 D2^2 + 22 D2 r + 33 r^2) + \\
 & D1^2 \left( D2^3 (-17 \sqrt{-D1 + D2} + 33 \sqrt{D2 - r}) + 33 D2^2 (2 \sqrt{-D1 + D2} - 3 \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
 & \quad \left. 99 D2 (-\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r}) r^2 - 33 \sqrt{D2 - r} r^3 \right) + \\
 & D1 \left( 4 D2^4 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 11 \sqrt{D2 - r}) + 110 D2^3 (-\sqrt{-D1 + D2} + \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
 & \quad \left. 33 D2^2 (3 \sqrt{-D1 + D2} - 2 \sqrt{D2 - r}) r^2 - 22 D2 \sqrt{D2 - r} r^3 + 22 \sqrt{D2 - r} r^4 \right) \Big) + \\
 & b2 \left( 70 D1^6 \sqrt{-D1 + D2} + 304 D2^6 (\sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{D2 - r}) + 4 D2^5 \right. \\
 & \quad \left( -273 \sqrt{-D1 + D2} + 235 \sqrt{D2 - r} \right) r + 9 D2^4 (143 \sqrt{-D1 + D2} - 95 \sqrt{D2 - r}) r^2 + \\
 & \quad D2^3 (-429 \sqrt{-D1 + D2} + 100 \sqrt{D2 - r}) r^3 - 10 D2^2 \sqrt{D2 - r} r^4 + 264 D2 \sqrt{D2 - r} r^5 - \\
 & \quad 135 \sqrt{D2 - r} r^6 + 75 D1^4 D2 \sqrt{-D1 + D2} (D2 + 13 r) - 15 D1^5 \sqrt{-D1 + D2} (15 D2 + 13 r) + \\
 & \quad D1^3 \sqrt{-D1 + D2} (121 D2^3 - 663 D2^2 r - 1287 D2 r^2 + 429 r^3) + \\
 & \quad D1^2 \left( D2^4 (387 \sqrt{-D1 + D2} - 715 \sqrt{D2 - r}) + 13 D2^3 (-147 \sqrt{-D1 + D2} + 220 \sqrt{D2 - r}) r + \right. \\
 & \quad \left. 429 D2^2 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 10 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 143 D2 (-9 \sqrt{-D1 + D2} + 20 \sqrt{D2 - r}) r^3 - \right. \\
 & \quad \left. 715 \sqrt{D2 - r} r^4 \right) + D1 \left( D2^5 (-732 \sqrt{-D1 + D2} + 884 \sqrt{D2 - r}) + 26 D2^4 \right. \\
 & \quad \left( 111 \sqrt{-D1 + D2} - 115 \sqrt{D2 - r} \right) r + 39 D2^3 (-99 \sqrt{-D1 + D2} + 80 \sqrt{D2 - r}) r^2 + 13 \\
 & \quad \left. D2^2 (99 \sqrt{-D1 + D2} - 20 \sqrt{D2 - r}) r^3 - 1300 D2 \sqrt{D2 - r} r^4 + 546 \sqrt{D2 - r} r^5 \right) \Big) \Big) - \\
 & \frac{1}{205920 (-D1 + D2)^{7/2}} (D1 - r)^2 \left( 429 a1 \left( 128 D1^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} - \right. \right. \\
 & \quad 384 D1^2 D2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \\
 & \quad \left. 384 D1 D2^2 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} - 128 D2^3 \sqrt{(-D1 + D2) (-D1 + r)} + \right. \\
 & \quad \left. (D1 - r)^2 (79 D1^2 - 224 D1 D2 + 175 D2^2 + 66 D1 r - 126 D2 r + 30 r^2) \right) - \\
 & 80 \left( -39 a0 \left( -33 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 33 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 22 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \right. \\
 & \quad \left. 5 r^3 \sqrt{-D1 + r} + D1^3 (33 \sqrt{-D1 + D2} - 16 \sqrt{-D1 + r}) + \right. \\
 & \quad \left. D1^2 (-99 D2 \sqrt{-D1 + D2} + 44 D2 \sqrt{-D1 + r} + 4 r \sqrt{-D1 + r}) + \right. \\
 & \quad \left. D1 (-22 D2 r \sqrt{-D1 + r} + 7 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 33 D2^2 (3 \sqrt{-D1 + D2} - \sqrt{-D1 + r})) \right) \Big) + \\
 & a2 (D1 - r) \left( -429 D2^3 \sqrt{-D1 + D2} + 715 D2^2 r \sqrt{-D1 + r} - 546 D2 r^2 \sqrt{-D1 + r} + \right. \\
 & \quad 135 r^3 \sqrt{-D1 + r} + D1^3 (429 \sqrt{-D1 + D2} - 304 \sqrt{-D1 + r}) + \\
 & \quad \left. D1 (-338 D2 r \sqrt{-D1 + r} + 141 r^2 \sqrt{-D1 + r} + 143 D2^2 (9 \sqrt{-D1 + D2} - 5 \sqrt{-D1 + r})) \right) + \\
 & \quad \left. D1^2 (28 r \sqrt{-D1 + r} + 13 D2 (-99 \sqrt{-D1 + D2} + 68 \sqrt{-D1 + r})) \right) \Big) \Big);
 \end{aligned}$$

EXTRCNTRBLft11[r\_, D1\_, D2\_, a\_, b\_] :=

```

(D2 - r)4
(7
  a
  (5 D12 - 4 D1 D2 + D22 - 6 D1 r + 2 D2 r + 2 r2) +
  b (-35 D13 + 4 D23 + 9 D22 r + 12 D2 r2 + 10 r3 + 21 D12 (2 D2 + 3 r) -
    21 D1 (D22 + 2 D2 r + 2 r2));
EXTRCNRBRgt11[r_, D1_, D2_, a_, b_] :=
-  $\frac{1}{420}$ 
(D1 - r)4
(b
  (D1 - r)
  (3 D12 - 14 D1 D2 + 21 D22 + 8 D1 r - 28 D2 r + 10 r2) -
  7 a (D12 + 5 D22 - 6 D2 r + 2 r2 + 2 D1 (-2 D2 + r)));

```

K = 2

```

LeftCLD22[r_, D1_, D2_] :=  $\left(1 + \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}}$ 
  (16 (D1 - D2)3 - 40 (D1 - D2)2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)2 - 105 (D2 - r)3) (-D1 + r)5/2
  (a0 + a4 (D1 - r)2 + a2 (-D1 + r) +  $\sqrt{-D1 + r}$  (a1 + a3 (-D1 + r)))
RgtCLD22[r_, D1_, D2_] := (b0 + (b1 + b3 (D2 - r))  $\sqrt{D2 - r}$  + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)2)
   $\left(1 - \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}}$  (D2 - r)5/2 (-231 D13 + 16 D23 + 40 D22 r +
  70 D2 r2 + 105 r3 + 99 D12 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D22 + 20 D2 r + 35 r2))
CLDApprx22[r_, D1_, D2_] :=  $\left(1 + \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}}$ 
  (16 (D1 - D2)3 - 40 (D1 - D2)2 (D2 - r) + 70 (D1 - D2) (D2 - r)2 - 105 (D2 - r)3) (-D1 + r)5/2
  (a0 + a4 (D1 - r)2 + a2 (-D1 + r) +  $\sqrt{-D1 + r}$  (a1 + a3 (-D1 + r))) +
  (b0 + (b1 + b3 (D2 - r))  $\sqrt{D2 - r}$  + b2 (D2 - r) + b4 (D2 - r)2)
   $\left(1 - \frac{1}{16 (-D1 + D2)^{11/2}}$  (D2 - r)5/2 (-231 D13 + 16 D23 + 40 D22 r + 70 D2 r2 + 105 r3 +
  99 D12 (2 D2 + 5 r) - 11 D1 (8 D22 + 20 D2 r + 35 r2))
LEFTCFApprx22[r_, D1_, D2_] :=
(29393 a1 (-512 D18 + 2816 D17 D2 - 6336 D16 D22 + 7392 D15 D23 - 4620 D14 D24 + 1386 D13 D25 +

```

$$\begin{aligned}
& 462 D1^2 D2^6 - 462 D1 D2^7 + 99 D2^8 + 1280 D1^7 r - 7040 D1^6 D2 r + 15840 D1^5 D2^2 r - \\
& 18480 D1^4 D2^3 r + 11550 D1^3 D2^4 r - 6930 D1^2 D2^5 r + 2310 D1 D2^6 r - 330 D2^7 r - 960 D1^6 r^2 + \\
& 5280 D1^5 D2 r^2 - 11880 D1^4 D2^2 r^2 + 13860 D1^3 D2^3 r^2 + 160 D1^5 r^3 - 880 D1^4 D2 r^3 + 1980 D1^3 \\
& D2^2 r^3 - 13860 D1^2 D2^3 r^3 + 20 D1^4 r^4 - 110 D1^3 D2 r^4 + 8910 D1^2 D2^2 r^4 + 6930 D1 D2^3 r^4 + \\
& 6 D1^3 r^5 - 3498 D1^2 D2 r^5 - 7722 D1 D2^2 r^5 - 1386 D2^3 r^5 + 580 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 + \\
& 1980 D2^2 r^6 - 700 D1 r^7 - 1100 D2 r^7 + 225 r^8 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} (-D1 + r)^{5/2} - \\
4199 a3 & (1225 D1^9 + 275 (D1 - D2)^9 + 693 (D1 - D2)^8 r + 6468 (-D1 + D2)^3 r^6 - \\
& 9900 (D1 - D2)^2 r^7 + 5775 (-D1 + D2) r^8 - 1225 r^9 - 1536 (-D1 + D2)^{11/2} (-D1 + r)^{7/2} - \\
& 525 D1^8 (11 D1 - 11 D2 + 21 r) + 300 D1^7 (33 (D1 - D2)^2 + 154 (D1 - D2) r + 147 r^2) - \\
& 420 D1^2 r^4 (231 (D1 - D2)^3 + 495 (D1 - D2)^2 r + 385 (D1 - D2) r^2 + 105 r^3) + \\
& 420 D1^3 r^3 (308 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 770 (D1 - D2) r^2 + 245 r^3) - \\
& 210 D1^4 r^2 (462 (D1 - D2)^3 + 1650 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 735 r^3) - \\
& 84 D1^6 (77 (D1 - D2)^3 + 825 (D1 - D2)^2 r + 1925 (D1 - D2) r^2 + 1225 r^3) + 42 D1^5 r \\
& (924 (D1 - D2)^3 + 4950 (D1 - D2)^2 r + 7700 (D1 - D2) r^2 + 3675 r^3) + 21 D1 (-33 (D1 - D2)^8 + \\
& 1848 (D1 - D2)^3 r^5 + 3300 (D1 - D2)^2 r^6 + 2200 (D1 - D2) r^7 + 525 r^8) - 1120 \\
(323 a0 & (143 (-D1 + D2)^3 + 195 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 105 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3) \\
& (-D1 + r)^{9/2} - 2 a0 (-D1 + D2)^{11/2} (16 D1^2 + 7 D2^2 + 16 D1 (D2 - 3 r) - 30 D2 r + 39 r^2) + \\
& (-D1 + D2)^{11/2} (-693 a4 (D1 - D2)^4 + 1596 (D1 - D2)^3 (a2 + a4 (D1 - r)) - \\
& 4522 a2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 4199 (D1 - r)^3 (2 a2 + a4 (-D1 + r))) - \\
& (-D1 + r)^{11/2} (2907 (D1 - D2)^2 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r) + \\
& 1463 (-D1 + D2) (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& 273 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 2261 (-D1 + D2)^3 (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r))) + \\
(D2 - r)^2 & (29393 b1 (-281 (D1 - D2)^6 + 388 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 97 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 + \\
& 34 (-D1 + D2)^3 (D1 - r)^3 - 145 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 + \\
& 250 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 + 225 (D1 - r)^6 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{D2 - r}) + \\
4199 b3 & (-1118 (D1 - D2)^6 + 1329 (D1 - D2)^5 (D1 - r) + 621 (D1 - D2)^4 (D1 - r)^2 + \\
& 118 (D1 - D2)^3 (D1 - r)^3 - 600 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^4 + 1575 (-D1 + D2) (D1 - r)^5 + \\
& 1225 (D1 - r)^6 + 1536 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{D2 - r}) (D2 - r) + 1120 \\
(323 b0 & (78 (-D1 + D2)^{11/2} + (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + \\
& 21 (D1 - r)^3) (D2 - r)^{5/2} + 4199 (-D1 + D2)^{11/2} (2 b2 + b4 (D2 - r)) (D2 - r) + \\
& (D2 - r)^{7/2} (-3296 b4 (D1 - D2)^4 - 7 (-D1 + D2) (1330 b2 + 377 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& 273 (19 b2 + 15 b4 (D1 - r)) (D1 - r)^3 - 48 (-D1 + D2)^3 (114 b2 + 61 b4 (-D1 + r)) + \\
& 2 (D1 - D2)^2 (D1 - r) (4712 b2 + 255 b4 (-D1 + r)))))) / \\
(56434560 & (-D1 + D2)^{11/2}); \text{RGHTCFApprx22}[r_, D1_, D2_] := \\
(29393 b1 & (99 D1^8 - 462 D1^7 D2 + 462 D1^6 D2^2 + 1386 D1^5 D2^3 - 4620 D1^4 D2^4 + 7392 D1^3 D2^5 - \\
& 6336 D1^2 D2^6 + 2816 D1 D2^7 - 512 D2^8 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} (D2 - r)^{5/2} - 330 D1^7 r + \\
& 2310 D1^6 D2 r - 6930 D1^5 D2^2 r + 11550 D1^4 D2^3 r - 18480 D1^3 D2^4 r + 15840 D1^2 D2^5 r - \\
& 7040 D1 D2^6 r + 1280 D2^7 r + 13860 D1^3 D2^3 r^2 - 11880 D1^2 D2^4 r^2 + 5280 D1 D2^5 r^2 - \\
& 960 D2^6 r^2 - 13860 D1^3 D2^2 r^3 + 1980 D1^2 D2^3 r^3 - 880 D1 D2^4 r^3 + 160 D2^5 r^3 + 6930 D1^3 D2 r^4 + \\
& 8910 D1^2 D2^2 r^4 - 110 D1 D2^3 r^4 + 20 D2^4 r^4 - 1386 D1^3 r^5 - 7722 D1^2 D2 r^5 - 3498 D1 D2^2 r^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 6 D2^3 r^5 + 1980 D1^2 r^6 + 3740 D1 D2 r^6 + 580 D2^2 r^6 - 1100 D1 r^7 - 700 D2 r^7 + 225 r^8) + \\
& 4199 b3 (-275 D1^9 + 1782 D1^8 D2 - 4356 D1^7 D2^2 + 3696 D1^6 D2^3 + 4158 D1^5 D2^4 - \\
& 13860 D1^4 D2^5 + 22176 D1^3 D2^6 - 19008 D1^2 D2^7 + 8448 D1 D2^8 - 1536 D2^9 + \\
& 1536 (-D1 + D2)^{11/2} (D2 - r)^{7/2} + 693 D1^8 r - 5544 D1^7 D2 r + 19404 D1^6 D2^2 r - \\
& 38808 D1^5 D2^3 r + 48510 D1^4 D2^4 r^2 - 77616 D1^3 D2^5 r + 66528 D1^2 D2^6 r - 29568 D1 D2^7 r + \\
& 5376 D2^8 r + 97020 D1^3 D2^4 r^2 - 83160 D1^2 D2^5 r^2 + 36960 D1 D2^6 r^2 - 6720 D2^7 r^2 - \\
& 129360 D1^3 D2^3 r^3 + 41580 D1^2 D2^4 r^3 - 18480 D1 D2^5 r^3 + 3360 D2^6 r^3 + 97020 D1^3 D2^2 r^4 + \\
& 55440 D1^2 D2^3 r^4 + 2310 D1 D2^4 r^4 - 420 D2^5 r^4 - 38808 D1^3 D2 r^5 - 91476 D1^2 D2^2 r^5 - \\
& 24024 D1 D2^3 r^5 - 42 D2^4 r^5 + 6468 D1^3 r^6 + 49896 D1^2 D2 r^6 + 42504 D1 D2^2 r^6 + 4032 D2^3 r^6 - \\
& 9900 D1^2 r^7 - 26400 D1 D2 r^7 - 7800 D2^2 r^7 + 5775 D1 r^8 + 5250 D2 r^8 - 1225 r^9) - \\
& 1120 (b4 (-D1 + D2)^{11/2} (-3296 (D1 - D2)^4 + 15200 (D1 - D2)^3 (D1 - r) - \\
& 25194 (D1 - D2)^2 (D1 - r)^2 + 16796 (D1 - D2) (D1 - r)^3 - 4199 (D1 - r)^4) - \\
& 19b2 (288 (D1 - D2)^3 + 496 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 490 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 273 (D1 - r)^3) \\
& (D2 - r)^{11/2} - b4 (3296 (D1 - D2)^3 + 6224 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + \\
& 6734 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 4095 (D1 - r)^3) (D2 - r)^{13/2} + 38b2 (-D1 + D2)^{11/2} \\
& (144 (D1 - D2)^3 + 663 (D1 - D2) (D1 - r)^2 - 221 (D1 - r)^3 + 544 (D1 - D2)^2 (-D1 + r)) + \\
& 323 (-b0 (32 (D1 - D2)^3 + 48 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 42 (D1 - D2) (D1 - r)^2 + 21 (D1 - r)^3) \\
& (D2 - r)^{9/2} - 2b0 (-D1 + D2)^{11/2} (7 D1^2 + 16 D1 D2 + 16 D2^2 - 30 D1 r - 48 D2 r + 39 r^2)) - \\
& (D1 - r)^2 (-29393 a1 ((1386 (-D1 + D2)^3 + 1980 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 1100 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + \\
& 225 (D1 - r)^3) (D1 - r)^3 + 512 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{-D1 + r}) + 4199 a3 (D1 - r) \\
& ((6468 (-D1 + D2)^3 + 9900 (D1 - D2)^2 (D1 - r) + 5775 (-D1 + D2) (D1 - r)^2 + 1225 (D1 - r)^3) \\
& (D1 - r)^3 + 1536 (-D1 + D2)^{11/2} \sqrt{-D1 + r}) + \\
& 1120 (-4199 (-D1 + D2)^{11/2} (6 a0 + (-2 a2 + a4 (D1 - r)) (D1 - r)) + \\
& (-D1 + r)^{5/2} (969 (D1 - D2)^2 (65 a0 + 3 (-15 a2 + 11 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r) + \\
& 133 (-D1 + D2) (255 a0 + 11 (-17 a2 + 13 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^2 + \\
& 21 (323 a0 + 13 (-19 a2 + 15 a4 (D1 - r)) (D1 - r)) (D1 - r)^3 + 323 (-D1 + D2)^3 \\
& (143 a0 - 7 (D1 - r) (13 a2 + 9 a4 (-D1 + r)))))) / (56434560 (-D1 + D2)^{11/2});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBLft22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] & := \frac{1}{2520} (D2 - r)^5 \\
& (-9 a (14 D1^3 - D2^3 - 3 D2^2 r - 5 D2 r^2 - 5 r^3 - 14 D1^2 (D2 + 2 r) + 2 D1 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2)) + \\
& b (126 D1^4 + 5 D2^4 + 16 D2^3 r + 30 D2^2 r^2 + 40 D2 r^3 + 35 r^4 - 168 D1^3 (D2 + 2 r) + \\
& 36 D1^2 (3 D2^2 + 8 D2 r + 10 r^2) - 36 D1 (D2^3 + 3 D2^2 r + 5 D2 r^2 + 5 r^3))) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EXTRCNTRBRgt22}[r_, D1_, D2_, a_, b_] & := \frac{1}{2520} (D1 - r)^5 \\
& (9 a (D1^3 - 6 D1^2 D2 + 14 D1 D2^2 - 14 D2^3 + (3 D1^2 - 16 D1 D2 + 28 D2^2) r + 5 (D1 - 4 D2) r^2 + 5 r^3) - \\
& b (D1 - r) (4 D1^3 - 27 D1^2 D2 + 72 D1 D2^2 - 84 D2^3 + \\
& 15 (D1^2 - 6 D1 D2 + 12 D2^2) r + 15 (2 D1 - 9 D2) r^2 + 35 r^3)) ;
\end{aligned}$$