

Superfícies Parametrizadas

Doherty Andrade¹ & Jorge Ferreira de Lacerda²

RESUMO: Neste trabalho apresentamos a parametrização das superfícies mais comumente utilizadas em cálculo, usamos a primeira forma quadrática para determinar áreas, e calculamos volumes por meio do teorema da divergência.

Palavras-chave: Superfícies parametrizadas. Cálculo Integral. *

Sumário

1	Introdução	66
2	Primeira Forma Quadrática	69
3	Área de uma superfície	73
4	Superfícies de Revolução	75
5	Integral de um campo escalar sobre uma superfície	76
6	Volumes via Teorema da Divergência	78

1. Introdução

Uma superfície parametrizada é uma função σ de classe C^1 tendo por domínio uma região simples D (do tipo I ou do tipo II).

Uma superfície é a imagem M de uma superfície parametrizada

$$\begin{aligned}\sigma : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((x(u, v), y(u, v), z(u, v)))\end{aligned}$$

satisfazendo:

- σ é de classe C^1

¹ doherty200@hotmail.com

² jflacerda@uem.com

* Publicado em 14-12-2017.

- σ é injetora no interior de D e se q_1 pertence ao interior de D e $q_2 \in \partial D$, então

$$\sigma(q_1) \neq \sigma(q_2).$$

- $N_\sigma = \sigma_u \times \sigma_v$ (vetor normal a M) não se anula no interior de D .

Aqui, $\sigma_u \times \sigma_v$ denota o produto vetorial das derivadas parciais σ_u e σ_v da função σ .

Uma tal função σ é chamada de uma parametrização de M .

Seja σ uma parametrização de M e $p_0 = \sigma(q_0)$ tal que $N_{\sigma(q_0)} \neq 0$. O plano tangente a M em um ponto p_0 é o plano que passa por p_0 e tem $N_{\sigma(q_0)}$ como vetor normal. O plano tangente de uma superfície S no ponto $p \in S$ é denotado por $T_p(S)$.

Exemplos

a) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . O gráfico de f é uma superfície M . Afirmamos que

$$\begin{aligned} \sigma : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

é uma parametrização para M .

De fato, notemos facilmente que σ é de classe C^1 e injetora sobre D ; além disso,

$$N_\sigma = \sigma_x \times \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0.$$

b) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$. O seu gráfico é uma superfície parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \end{aligned}$$

como vimos em a).

Uma parametrização alternativa para M pode ser:

$$\begin{aligned} \sigma : D' &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r), \end{aligned}$$

onde $D' = [0, 2] \times [0, 2\pi]$.

Aqui vemos que

$$\sigma_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$\sigma_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

Assim, $N = (-r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta, r) \neq 0$.

Vamos resumir:

1 Coordenadas Retangulares: Podemos olhar o gráfico de $z = f(x, y)$, onde f é uma função C^1 definida sobre um domínio D , como uma superfície parametrizada com parâmetros x e y . Basta tomar

$$x = x, \quad y = y \quad \text{e} \quad z = f(x, y).$$

2 Coordenadas Polares: Do mesmo modo podemos olhar uma superfície dada em coordenadas cilíndricas como $z = g(r, \theta)$, como uma superfície parametrizada. Basta definir

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \operatorname{sen}(\theta), \quad z = g(r, \theta).$$

3 Coordenadas Esféricas: Também podemos olhar uma superfície dada em coordenadas esféricas $\rho = h(\phi, \theta)$ como uma superfície parametrizada com parâmetros ϕ e θ . Basta definir

$$x = h(\phi, \theta) \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta),$$

$$y = h(\phi, \theta) \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta),$$

$$z = h(\phi, \theta) \cos(\phi).$$

4 TORO: O toro é exemplo de uma superfície de revolução. É a superfície obtida pela revolução de um círculo em torno de uma reta que não o intersecta. Por exemplo, o círculo no plano xz de centro $(b, 0, 0)$ e raio a com $a < b$ dado por

$$(x - b)^2 + z^2 = a^2$$

girando em torno do eixo z tem a seguinte parametrização

$$x = r \cos(\theta) = (b + a \cos(\phi)) \cos(\theta)$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta) = (b + a \cos(\phi)) \operatorname{sen}(\theta)$$

$$z = a \operatorname{sen}(\phi)$$

Veja a seção §4 para mais informações sobre as superfícies de revolução.

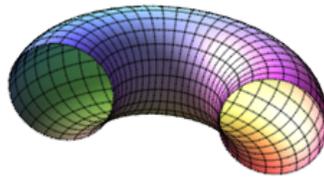
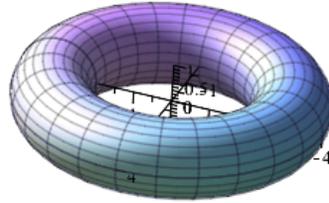


Figura 1: Toro

2. Primeira Forma Quadrática

O produto interno do $\mathbb{R}^3 \supset S$ induz em cada plano tangente $T_p(S)$ de uma superfície parametrizada S um produto interno, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se w_1 e w_2 pertencem a $T_p(S)$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual a $\langle w_1, w_2 \rangle$ no \mathbb{R}^3 . A primeira forma fundamental I_p é a aplicação que a cada vetor w do plano tangente $T_p(S)$ da superfície S associa o número real $\langle w, w \rangle_p$. Se σ é uma parametrização para S , então podemos escrever I_p em termos dos vetores tangentes σ_u e

σ_v : os coeficientes são dados por

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v$$

Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental nos casos anteriores:

[Clique aqui](#) para ver o caso da superfície dada em coordenadas retangulares,

[Clique aqui](#) para ver a superfície em coordenadas polares, e

[Clique aqui](#) para ver a superfície em coordenadas esféricas,

e também nos seguintes casos:

a **Parametrização do Plano:** Sejam w_1 e w_2 vetores ortonormais, então

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2,$$

onde $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é uma parametrização do plano.

b **Parametrização do Cilindro:** O cilindro $x^2 + y^2 = 1$, é parametrizado por

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

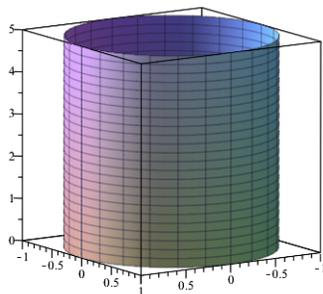


Figura 2: Cilindro

d **Parametrização do Elipsóide:** O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v).$$

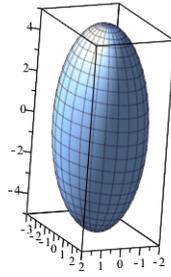


Figura 3: Elipsóide.

e **Parametrização do Parabolóide:** O parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$$

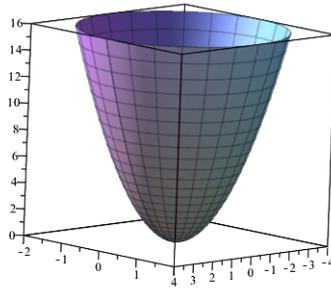


Figura 4: Parabolóide.

e **Parametrização da Helicóide:** A helicóide tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 2u),$$

$u \in [-2\pi, 2\pi]$ e $v \in \mathbb{R}$.

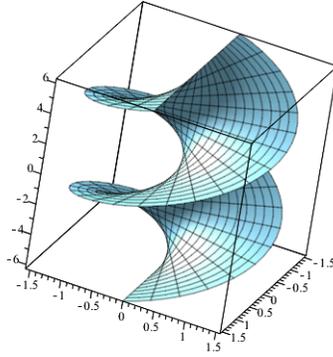


Figura 5: Helicóide.

e **Parametrização do Hiperbolóide de duas folhas:** O hiperbolóide de duas folhas tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (\cos(u) \sinh(v), \sin(u) \sinh(v), \cosh(v)),$$

para a parte superior e

$$X(u, v) = (\cos(u) \sinh(v), \sin(u) \sinh(v), -\cosh(v)),$$

para a parte inferior. Nessa figura, $v \in [-2, 2]$ e $u \in [-2\pi, 2\pi]$.

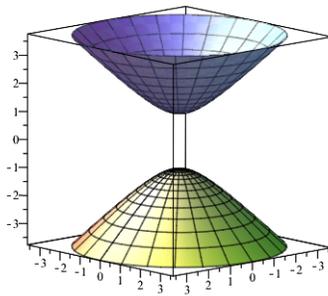


Figura 6: Hiperbolóide de duas folhas.

e **Parametrização do Hiperbolóide de uma folha:** O hiperbolóide de uma folha ou simplesmente hiperbolóide, tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), \sinh(u)),$$

Nessa figura, $u \in [-2, 2]$ e $v \in [0, 2\pi]$.

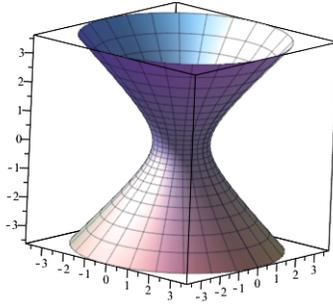


Figura 7: Hiperbolóide

3. Área de uma superfície

Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular contida num sistema de vizinhanças coordenadas da parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$\iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R),$$

chamamos de área de R .

Note que

$$\|X_u \times X_v\|^2 + |\langle X_u, X_v \rangle|^2 = \|X_u\|^2 \cdot \|X_v\|^2,$$

de modo que

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Assim podemos reescrever

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

1 Calcule a área da esfera de centro O e raio $a > 0$.

Seja σ a parametrização da esfera

$$\sigma(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \cos(u) \sin(v), a \sin(u)),$$

onde $0 \leq u \leq \pi$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

É fácil obter que

$$\sigma_u = (-a \cos u \cos v, a \sin v \cos u, -a \sin u)$$

$$\sigma_v = (-a \sin u \sin v, a \cos v \sin u, 0),$$

segue que

$$E = a^2, F = 0, G = a^2 \sin^2 u.$$

Logo,

$$\|N\| = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin v.$$

Portanto,

$$A(M) = \iint_D \|N\| = \iint_D \sqrt{EG - F^2} = \iint_D a^2 \sin v \, du \, dv = 4\pi a^2.$$

2 Calcule a área da superfície M que é o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $x^2 + y^2 \leq 4$.

Uma parametrização para M é dada por

$$\sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r),$$

onde $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

É fácil obter que $E = 2$, $G = r^2$ e $F = 0$. Segue que

$$A(M) = \int \int_D \sqrt{2r^2} \, dr \, d\theta = 4\pi\sqrt{2}.$$

3 Calcule a área da superfície limitada pelo plano $2x + y + z = 4$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Sejam D o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização dada por

$$\sigma(x, y) = (x, y, 4 - 2x - y).$$

Pode-se determinar que $E = 5$, $F = 2$ e $G = 2$. Logo,

$$A(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dA = \iint_D \sqrt{6} \, dA = \sqrt{6} \text{ área de } D = \pi\sqrt{6}.$$

4 Calcule a área do toro.

[clique aqui](#) para ver a parametrização do toro.

Uma parametrização para o toro é dada por

$$\sigma(\phi, \theta) = ((b + a \cos \phi) \cos \theta, (b + a \cos \phi) \sin \theta, a \sin \phi),$$

onde $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$.

Vemos que (tomando $b = 3$ e $a = 1$),

$$\sigma_\phi = (-\text{sen } \phi \cos \theta, -\text{sen } \phi \cos \theta, \cos \phi)$$

$$\sigma_\theta = ((b + a \cos \phi) \text{sen } \theta, (b + a \cos \phi) \cos \theta, 0),$$

onde temos que

$$E = 1, F = 0, G = (3 + \cos \phi)^2.$$

Logo, a área de M é dada por

$$A(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(3 + \cos \phi)^2} = 12\pi^2.$$

4. Superfícies de Revolução

Uma maneira de obter uma superfície é girar uma curva plana C em torno de uma reta L no seu plano. Isto dá uma superfície de revolução com eixo L .

Definição 1 (Superfície de Revolução) *Seja C uma curva plana e L uma reta no mesmo plano da curva. A superfície obtida pela revolução da curva C em torno da reta L é chamada superfície de revolução. A reta L é chamada eixo e a curva C de geratriz.*

A esfera pode ser gerada pela revolução de uma semi-circunferência.

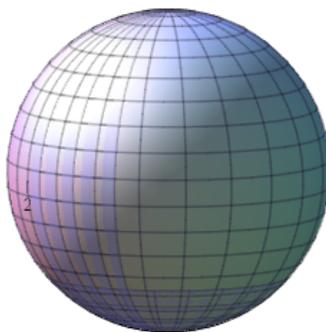


Figura 8: Esfera

O cilindro circular reto é obtido pela revolução de uma reta C em torno de uma reta paralela L .

Teorema 4.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva com f' contínua em $[a, b]$. Se A é a área da superfície de revolução obtida girando-se a curva $y = f(x)$ com $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , então temos*

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx. \quad (*)$$

Se o gráfico da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é girado em torno do eixo y , temos

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx.$$

Para deduzir (*) devemos dar uma parametrização de S . Defina a parametrização por

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \sin v$$

onde

$$a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Agora usando a expressão para a área de uma superfície parametrizada obtemos que

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_D \sqrt{[f(u)]^2 \sin^2 v + [f(u)]^2 \cos^2 v + [f(u)]^2 [f'(u)]^2} dv du \\ &= \int \int_D |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv du \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv du \\ &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du. \end{aligned}$$

5. Integral de um campo escalar sobre uma superfície

Seja M uma superfície confeccionada com material de densidade dada por $f(x, y, z)$. Seja $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \supset M$ uma parametrização para M . Queremos achar a massa de M . Para isto dividimos o domínio D em subretângulos D_i . A área de $\sigma(D_i)$ é aproximadamente

$$\sigma(D_i) \approx \|N(q_i)\| A(D_i),$$

onde q_i é um ponto de D_i . Segue que a massa de $\sigma(D_i)$ é aproximadamente

$$\sigma(D_i) \approx f(\sigma(q_i)) \|N(q_i)\| A(D_i).$$

Somando obtemos uma aproximação para a massa de M :

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(q_i)) \|N(q_i)\| A(D_i),$$

que é uma soma de Riemann que converge para

$$\int \int_D f(\sigma(q)) \|N(q)\| dA.$$

Generalizando este exemplo definimos:

Definição 2 Se f é um campo escalar contínuo, cujo domínio contém a superfície M , a integral de f sobre M , indicada por

$$\int \int_M f(p) dS \text{ ou } \int \int_M f dS,$$

é definida por

$$\int \int_M f dS = \int \int_D f(\sigma(q)) \|N(q)\| dA = \int \int_D f(\sigma(q)) \sqrt{EG - F^2} dA.$$

Se $f(x, y, z) \equiv 1$, então o que se obtém na integral acima coincide com a área da superfície.

1 Como exemplo, calcule a massa da esfera centrada na origem e de raio 2 situada no primeiro octante, onde a densidade é dada por $f(x, y, z) = xyz$.

Uma parametrização para a esfera é dada por

$$\sigma(u, v) = (2 \cos u \sen v, 2 \sen u \sen v, 2 \cos v),$$

onde $u, v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Podemos determinar facilmente

$$\sigma_u = (-2 \sen v \sen u, 2 \cos v \cos u, 0),$$

$$\sigma_v = (2 \cos v \cos u, 2 \cos v \sen u, -2 \sen v).$$

Logo, obtemos

$$E = 4 - \cos^2 v, \quad G = 4, \quad F = 0.$$

Portanto,

$$\text{massa}(M) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(2 \sen v \cos u + 4 \cos^2 v \right) \sqrt{4 - \cos^2 v} dv du = \frac{14}{3} \pi.$$

2 Mesmo situação com a helicóide dada por

$$\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sen u, au),$$

onde $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, 2]$.

Podemos determinar facilmente

$$\sigma_u = (-v \operatorname{sen} u, v \operatorname{cos} u, 2)$$

$$\sigma_v = (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0)$$

Donde obtemos

$$E = 4 + v^2, \quad G = 1, \quad F = 0$$

Portanto,

$$\text{massa}(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4 + v^2} \, du \, dv$$

6. Volumes via Teorema da Divergência

Usualmente, no cálculo diferencial, o volume de sólidos é calculado por meio de uma integral dupla ou tripla. O Teorema da Divergência fornece outra alternativa para o cálculo do volume de sólidos limitados por uma superfície.

Antes de apresentar esta alternativa vamos calcular, a título de exemplo, o volume do toro da maneira usual.

A superfície do toro (as vezes também chamada de Toro) é gerada pela rotação de uma circunferência em torno de uma reta que não a intersecte.

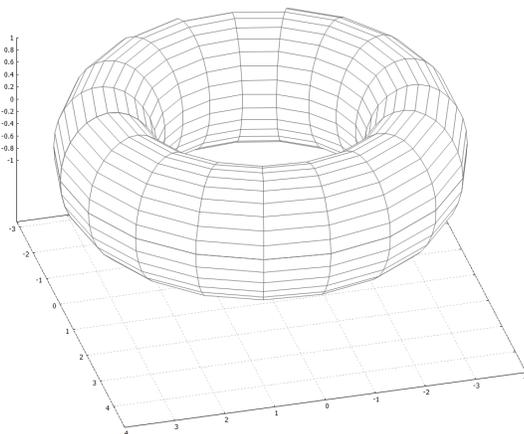


Figura 9: Toro

Considere a circunferência do plano xz de centro $(a, 0, 0)$ e raio b onde $a > b > 0$. A rotação desta circunferência em torno do eixo z gera um toro de equação cartesiana dada por

$$(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = b^2$$

Denotemos por T a superfície do toro e por \mathbf{T} a região limitada por esta superfície, denominada *toro sólido*.

O toro sólido é simétrico em relação ao plano $z = 0$. Portanto seu volume é o dobro do volume da porção do toro acima deste plano. Esta região é descrita por

$$0 \leq z \leq \sqrt{b^2 - (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2}, \quad a - b \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a + b$$

O volume do toro pode ser obtido, então, pela seguinte integral

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = 2 \int \int_D \sqrt{b^2 - (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2} dA$$

onde D é a região dada por $a - b \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a + b$.

Para facilitar o cálculo da integral acima, descrevemos a região D em coordenadas polares (r, θ) por

$$D : a - b \leq r \leq a + b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Assim

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = 2 \int_0^{2\pi} \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2 - (a - r)^2} r dr d\theta = 2 \cdot 2\pi \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2 - (a - r)^2} r dr$$

Fazendo a mudança de variável $u = r - a$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2 - (a - r)^2} r dr &= \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - u^2} (u + a) du = \\ &= \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - u^2} u du + a \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - u^2} du \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $w = b^2 - u^2$ obtemos $\int_{-b}^b \sqrt{b^2 - u^2} u du = \frac{-1}{2} \int_0^0 \sqrt{w} dw = 0$

Consultando uma tabela de integração encontramos

$$\int_{-b}^b \sqrt{b^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{b^2 - u^2} + \frac{b^2}{2} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{b}\right) \Big|_{-b}^b = \frac{\pi b^2}{2}$$

Assim

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = 2 \cdot 2\pi a \frac{\pi b^2}{2} = (2\pi a)(\pi b^2)$$

Observe que o volume do toro é equivalente ao volume de um cilindro cuja base é o círculo de raio b e altura, o comprimento do círculo de raio a .

VOLUMES PELO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA O Teorema da divergência relaciona uma integral de superfície com uma integral tripla e pode ser usado para obter o volume de um sólido limitado por uma superfície através de uma integral de superfície.

Seja $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Um campo de vetores em \mathbb{R}^3 é dado na forma $F = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, onde A , B e C são funções definidas em um subconjunto de \mathbb{R}^3 , chamado aqui de *domínio* do campo F , com valores em \mathbb{R}^3 .

Seja S uma superfície contida no domínio do campo F , parametrizada por $X(u, v)$, $u, v \in D$ e seja $\eta = X_u \times X_v$ o vetor normal da parametrização.

A integral do campo F sobre a superfície S é definida por

$$\int_S F \cdot dS = \int \int_D \langle F(X(u, v)), \eta \rangle dA$$

O teorema da divergência estabelece que se F é um campo de vetores definido em um aberto contendo um sólido \mathbf{S} limitado por uma superfície S com uma parametrização $X(u, v)$, $(u, v) \in D$ que orienta S positivamente, isto é, o vetor normal $\eta = X_u \times X_v$ aponta para fora do sólido \mathbf{S} , então

$$\int \int_S F \cdot dS = \int \int \int_{\mathbf{S}} \operatorname{div} F dV$$

onde o *Divergente* do campo F é a função escalar dada por

$$\operatorname{div} F = A_x + B_y + C_z$$

Para mais detalhes quanto aos termos e as hipóteses deste teorema, veja [1], J. Stewart, Cálculo, vol II.

Observação: Se a parametrização orienta S negativamente (η aponta para dentro de \mathbf{S}) a integral $\int \int_S F \cdot dS$ apenas troca de sinal. Assim, qualquer que seja a orientação dada pela parametrização, vale a relação

$$\left| \int \int_S F \cdot dS \right| = \left| \int \int \int_{\mathbf{S}} \operatorname{div} F dV \right|$$

Suponha que o campo F tem divergente constante não nulo, isto é, $\operatorname{div} F = k \neq 0$.

Então,

$$\int \int \int_{\mathbf{S}} \operatorname{div} F dV = \int \int \int_{\mathbf{S}} k dV = k \int \int \int_{\mathbf{S}} dV$$

Agora,

$$\int \int \int_{\mathbf{S}} dV = \text{Vol}(\mathbf{S})$$

Assim,

$$\text{Vol}(\mathbf{S}) = \frac{1}{k} \int \int \int_{\mathbf{S}} \text{div}F dV$$

Do teorema da divergência obtemos

$$\text{Vol}(\mathbf{S}) = \frac{1}{|k|} \left| \int \int_S F \cdot dS \right|$$

A relação acima, que denominamos *fórmula de volume*, mostra que podemos obter o volume de um sólido limitado por uma superfície integrando sobre ela qualquer campo com divergente constante não nulo.

Observação: Há muitas escolhas para o campo F com divergente constante, cada uma delas produzindo um integrando $\langle F, \eta \rangle$ para a integral a ser calculada na obtenção do volume.

Vamos usar esta fórmula para calcular o volume do toro experimentando algumas escolhas para o campo F .

Uma parametrização da superfície de um toro é dada, na forma de equações, por

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u;$$

em que $0 \leq u, v \leq 2\pi$, com correspondente forma vetorial

$$X(u, v) = (a + b \cos u) \cos v \mathbf{i} + (a + b \cos u) \sin v \mathbf{j} + b \sin u \mathbf{k}.$$

Calculemos o vetor normal desta parametrização:

$$X_u = -b \sin u \cos v \mathbf{i} - b \sin u \sin v \mathbf{j} + b \cos u \mathbf{k}$$

$$X_v = -(a + b \cos u) \sin v \mathbf{i} + (a + b \cos u) \cos v \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

Assim, após simplificações, o vetor normal é dado por

$$\eta = X_u \times X_v = -b(a + b \cos u) [\cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}]$$

Considere o campo $F = 0\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

O divergente de F é dado por $\text{div}F = 1$.

Aplicando a fórmula de volume obtemos

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = \left| \int \int_S F \cdot dS \right|$$

Calculemos, então, a integral de superfície dada na fórmula:

Para aplicar a definição da integral de superfície precisamos dos seguintes cálculos:

$$F(X(u, v)) = 0\mathbf{i} + (a + b \cos u) \sin v \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\langle F(X(u, v)), \eta \rangle = -b(a + b \cos u)^2 \cos u \sin^2 v$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -b(a + b \cos u)^2 \cos u \sin^2 v \, du \, dv = \\ &= -b \int_0^{2\pi} \sin^2 v \, dv \int_0^{2\pi} (a + b \cos u)^2 \cos u \, du \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} (a + b \cos u)^2 \cos u \, du = a^2 \int_0^{2\pi} \cos u \, du + 2ab \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du + b^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 u \, du.$$

Consultando uma tabela de integração encontramos,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos u \, du = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^3 u \, du = 0.$$

$$\text{Assim, } \int_0^{2\pi} (a + b \cos u)^2 \cos u \, du = 2\pi ab.$$

O volume do toro é, então, dado por

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = | -b\pi(2\pi ab) | = (2\pi a)(\pi b^2)$$

Tomemos agora o campo $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Note que $\text{div}F = 3$. Para este campo obtemos, após simplificações,

$$\langle F(X(u, v)), \eta \rangle = -ab^2 - (a^2b + b^3)\cos u - ab^2 \cos^2 u$$

Observe que, para esta escolha do campo F , o integrando $F \cdot \eta$ depende somente da variável u . Assim

$$\int \int_S F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [-ab^2 - (a^2b + b^3)\cos u - ab^2 \cos^2 u] \, du \, dv$$

Levando em conta que $\int_0^{2\pi} \cos u \, du = 0$ e que o integrando não depende de v , obtemos a integral mais simples que aquela dada pela primeira escolha do campo F .

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot dS &= 2\pi \int_0^{2\pi} (-ab^2 - ab^2 \cos^2 u) \, du = 2\pi(-ab^2) \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 u) \, du = \\ &= 2\pi(-ab^2)(2\pi + \pi) = 6\pi^2(-ab^2). \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de volume com $k = 3$ obtemos,

$$\text{Vol}(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} |6\pi^2(-ab^2)| = 2\pi^2 ab^2 = (2\pi a)(\pi b^2)$$

Questão: Existe um campo F para o qual o integrando $\langle F, \eta \rangle$ é constante?

Exercício: Use a fórmula de volume para obter o volume do elipsóide de semi eixos a , b e c com parametrização dada por $x = a \operatorname{senu} \cos v$, $y = b \operatorname{senu} \operatorname{senv}$, $z = c \cos u$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

Referências

- [1] J. Stewart, Cálculo vol 2, Pioneira, 1999. 80
- [2] Z. Abud and P. Boulos, Cálculo vol 2.
- [3] Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência disponível em www.dma.uem.br/kit. Visitado em janeiro de 2017.