

УДК 532.613.5

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В СНАРЯДНОМ ПОТОКЕ  
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ В ТРУБЕ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ**

**Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.**

**Ключевые слова:** газожидкостная смесь, снарядный поток, дискретная структура, периодические ячейки.

**Գրիգորյան Շ.Ա., Օհանյան Գ.Գ.**

**Պարբերական կառուցվածք ունեցող արկային հոսքում արագությունների  
բաշխումը գլանային խողովակում**

**Հիմնաբառեր.** գազահեղուկ խառնուրդ, արկային հոսք, դիսկրետ կառուցվածք, պարբերական բջիջներ:

Դիտարկված է գլանային փակ խողովակում գազահեղուկ խառնուրդի լիովին կազմավորված արկային հոսքում  $N$  բջիջներում արագությունների որոշման խնդիրը: Հեղուկ և գազ պարունակող երկու խցանները կազմում են տարրական բջիջ: Արկային հոսքի դիսկրետ կառուցվածքը պարբերական է ըստ տարրական բջիջի: Օգտագործելով Աբելեսի թեորեմը ստացված են տրանսցենդենտ հավասարումներ, որոնք լուծվում են թվայնորեն: Դրանց արմատների ամենափոքր արժեքը համապատասխանում է ալիքի տարածման արագությանը ֆիքսված բջջում: Կառուցված են արագությունների բաշխման գրաֆիկները, կախված բջիջների քանակից ( $N$  թվից), որոնց վերլուծությունից հետևում է, որ  $N$  թվի մեծացմամբ ալիքի արագությունը համապատասխան բջջում նույնպես մեծանում է: Մեծ  $N$  արժեքների դեպքում տարրական բջիջներից կազմված դիսկրետ համակարգում արագությունը ձգտում է իր մեծությամբ համասեռ խառնուրդի ձայնի արագությանը:

**Grigoryan Sh.H., Oganyan G.G.**

**Velocity distribution of a plug flow of a periodic structure in a cylindrical tube**

**Keywords:** gas-fluid mixture, plug flow, discret structure, periodic sells.

The problem of determining the velocities in the plug regime of the flow of a gas-liquid mixture in a closed cylindrical tube is considered. The discrete structure of the plug flow is periodic of elementary cell. For the derivation of the transcendental equation the Abeles formula is used. The values of velocities in each cell is obtained. With increasing their number, the velocities increase and in the limit, tend to the speed of sound in homogeneous gas-liquid mixture.

Рассмотрена задача определения скоростей волн в полностью сформировавшемся снарядном потоке течения газожидкостной смеси в замкнутой трубе в виде пробок жидкости и газа. Система из двух чередующихся пробок образует элементарную ячейку. Их число равно  $N$  и они заполняют весь объем трубы. Структура снарядного потока, состоящая из системы  $N$  элементарных ячеек, – дискретная. Она является периодической относительно элементарной ячейки. С использованием формулы Абелеса получены трансцендентные уравнения, при численной реализации которых наименьший из их корней соответствует значению скорости распространения волны в каждой фиксированной по  $N$  ячейке. Получены графики распределения скоростей в ячейках в зависимости от числа  $N$ , из анализа которых следует вывод, что с увеличением номера  $N$  скорости волны в соответствующей ячейке также возрастает. При больших  $N$  она стремится к значению скорости звука в гомогенной (без межфазных границ) газожидкостной смеси.

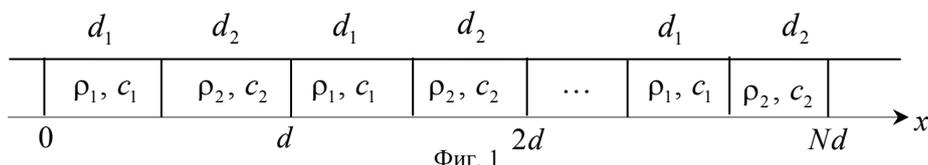
**1. Постановка задачи.** Пусть в замкнутой цилиндрической трубе с абсолютно жёсткими стенками течёт бесстолкновительная монодисперсная смесь сжимаемой невязкой жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. При течении смеси может произойти разделение фаз в виде пробок жидкости и снарядоподобных пузырей газа, приводящих к образованию снарядного потока, наблюдаемого в экспериментах [1–3]. В случае его полного формирования реализуется дискретная

структура из чередующихся пробок жидкости и газа. Система из двух таких пробок образует элементарную ячейку, которая периодически повторяется по длине трубы и их число равно  $N$ . Целью исследования является определение значений скоростей распространения волны в каждой из  $N$  ячейке.

Линейные уравнения осесимметричного течения и неразрывности в каждой из фаз (пробок) в случае пренебрежения радиальной составляющей движения возьмём в виде [2,4]

$$\frac{\partial V_m}{\partial x} + \frac{1}{\rho_m c_m^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_m^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad m = 1, 2 \quad (1.1)$$

Начало цилиндрической системы координат размещено в сечении  $x = 0$ , при этом ось  $x$  совпадает с осью трубы,  $\rho_i, c_i$  – плотности и скорости звука в пробках (фазах). Идеализованная схема рассматриваемого снарядного потока представлена на фиг.1



Здесь  $d_i (i = 1, 2)$  – длины жидких и газовых пробок,  $d = d_1 + d_2$ ,  $N$  – число элементарных ячеек, состоящих из двух пробок. На границах раздела сред (фаз) должны выполняться условие непрерывности как давления, так и скоростей частиц сред

$$V_1(d_1) = V_2(d_1), \quad P(d_1) = P(d_1) \quad (1.2)$$

Будем полагать зависимость параметров от времени гармонической, что позволяет записать искомые функции в форме

$$V_m(x, t) = V_m(x) e^{i\omega t}, \quad P(x, t) = P(x) e^{i\omega t}$$

где  $\omega$  – вынуждающая частота. Для определения амплитуд  $V_m$  и  $P$ , в силу (1.1), получим систему стационарных уравнений:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_m^2} P(x) = 0, \quad \frac{dV_m}{dx} + i \frac{\omega}{\rho_m c_m^2} P(x) = 0,$$

общие решения которых запишутся в виде

$$P(x) = A_m e^{-ik_m x} + B_m e^{ik_m x}, \quad V_m(x) = \frac{1}{\rho_m c_m} (A_m e^{-ik_m x} - B_m e^{ik_m x}), \quad k_m = \frac{\omega}{c_m}$$

Здесь  $A_m$  и  $B_m$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных значений на входах в соответствующую пробку.

**2. Локальная и интегральная передаточные матрицы.** Для первой пробки получим

$$A_1 = \frac{1}{2} [P(0) + \rho_1 c_1 V_1(0)], \quad B_1 = \frac{1}{2} [P(0) - \rho_1 c_1 V_1(0)].$$

Общие решения уравнений удобно представить в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} P(x) \\ V_1(x) \end{bmatrix} = F_1(x) \begin{bmatrix} P(0) \\ V_1(0) \end{bmatrix}, \quad F_1(x) = \begin{bmatrix} \cos(k_1 x) - i\rho_1 c_1 \sin(k_1 x) \\ -\frac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 x) \quad \cos(k_1 x) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Для второй пробки при определении  $A_2, B_2$  используются значения функций на входе  $x = d_1$  в неё. Общие решения, записанные вновь в матричной форме, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} P(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix} = F_2 \begin{bmatrix} P(d_1) \\ V_2(d_1) \end{bmatrix},$$

$$F_2(x - d_1) = \begin{bmatrix} \cos[k_2(x - d_1)] - i\rho_2 c_2 \sin[k_2(x - d_1)] \\ -\frac{i}{\rho_2 c_2} \sin[k_2(x - d_1)] \quad \cos[k_2(x - d_1)] \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Выразим значения параметров сред (фаз) на входах в первую и вторую пробки через параметры в произвольных точках тех же пробок, для чего умножим слева решения (2.1) и (2.2) на обратные матрицы  $m^{(1)}(x) = F_1^{-1}(x)$  и  $m^{(2)}(x - d_1) = F_2^{-1}(x - d_1)$ . В результате, их можно представить в иной форме записи

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ V_1(0) \end{bmatrix} = m^{(1)}(x) \begin{bmatrix} P(x) \\ V_1(x) \end{bmatrix},$$

$$m^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_1 x) & i\rho_1 c_1 \sin(k_1 x) \\ \frac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 x) & \cos(k_1 x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(d_1) \\ V_2(d_1) \end{bmatrix} = m^{(2)}(x - d_1) \begin{bmatrix} P(x) \\ V_2(x) \end{bmatrix},$$

$$m^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} \cos[k_2(x - d_1)] & i\rho_2 c_2 \sin[k_2(x - d_1)] \\ \frac{i}{\rho_2 c_2} \sin[k_2(x - d_1)] & \cos[k_2(x - d_1)] \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что на выходах  $x = d_1$  и  $x = d_1 + d_2 = d$  из первой и второй пробок, соответственно, получим:

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix} = m^{(1)}(d_1) \begin{bmatrix} P(d_1) \\ V_1(d_1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P(d_1) \\ V_2(d_1) \end{bmatrix} = m^{(2)}(d_2) \begin{bmatrix} P(d) \\ V_2(d) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Матрицы  $m^{(1)}(d_1)$  и  $m^{(2)}(d_2)$  называются локально передаточными для первой и второй пробок. Они связывают значения параметров сред на входах и выходах из них и их элементы имеют вид:

$$\begin{aligned} m_{11}^{(1)} &= \cos(k_1 d_1), & m_{12}^{(1)} &= i\rho_1 c_1 \sin(k_1 d_1), \\ m_{21}^{(1)} &= \frac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 d_1), & m_{22}^{(1)} &= \cos(k_1 d_1) \\ m_{11}^{(2)} &= \cos(k_2 d_2), & m_{12}^{(2)} &= i\rho_2 c_2 \sin(k_2 d_2), \\ m_{21}^{(2)} &= \frac{i}{\rho_2 c_2} \sin(k_2 d_2), & m_{22}^{(2)} &= \cos(k_2 d_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь верхние индексы указывают на принадлежности к первой и, соответственно, к второй пробке. Поскольку  $\det[m^{(1)}] = \det[m^{(2)}] = 1$ , постольку матрицы являются унимодулярными.

Система из двух пробок образует элементарную ячейку. Комбинирование соотношений (2.3) и учёт условий непрерывности (1.2) приводит к формуле

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ V_1(0) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P(d) \\ V_2(d) \end{bmatrix}, \quad M = m^{(1)} m^{(2)} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

в которой элементы матрицы  $M$  определяются, в соответствии с (2.4), как

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2), \\ M_{12} &= i\rho_1 c_1 \sin(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) + i\rho_2 c_2 \sin(k_2 d_2) \cos(k_1 d_1), \\ M_{21} &= \frac{i}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) + \frac{i}{\rho_2 c_2} \sin(k_2 d_2) \cos(k_1 d_1), \\ M_{22} &= \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Матрица  $M$  называется интегральной передаточной для элементарной ячейки и является унимодулярной, поскольку, в силу (2.5), имеем:

$$\det[M] = \det[m^{(1)}] \det[m^{(2)}] = 1.$$

Она связывает значения параметров смеси на входе и выходе из ячейки.

Определим объёмное газосодержание как отношение длины газовой пробки  $d_2$  к длине ячейки  $d = d_1 + d_2$

$$\alpha = \frac{d_2}{d}, \quad d_2 = \alpha d, \quad d_1 = (1 - \alpha)d. \quad (2.7)$$

Период колебаний в ячейке, согласно [5], равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \left( \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2} \right) = 4 \left( \frac{1 - \alpha}{c_1} + \frac{\alpha}{c_2} \right) d = 4 \frac{d}{a_1}, \quad d = \frac{\pi a_1}{2 \omega}, \quad (2.8)$$

где  $a_1$  – пока неопределённая скорость волны в ячейке, которая должна быть вещественной величиной. Скорость волны  $a_1$  из (2.8), имеет вид:

$$a_H = \frac{c_1 c_2}{\alpha c_1 + (1 - \alpha) c_2}.$$

Полученное значение совпадает со скоростью по модели Генри [6], в которой не учитывается отражение волны от межфазной границы  $x = d_1$ . Элементы  $M_{11}$  и  $M_{22}$  переписуются в виде:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \frac{a_1}{c_1} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \alpha \frac{a_1}{c_2} \right] - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \frac{a_1}{c_1} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \alpha \frac{a_1}{c_2} \right] \\ M_{22} &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \frac{a_1}{c_1} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \alpha \frac{a_1}{c_2} \right] - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (1 - \alpha) \frac{a_1}{c_1} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \alpha \frac{a_1}{c_2} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Известно [1,2,4,6], что в гомогенной (без межфазных границ) газожидкостной смеси при малых значениях газосодержания и давления скорость звука определяется формулой

$$a^2 = \frac{\gamma P}{\alpha (1 - \alpha) \rho_1}, \quad a < c_2 < c_1, \quad 0.01 \leq \alpha < 0.5 \quad (2.10)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты газа. Если в системе их двух пробок параметры сред связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} k_1 d_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \operatorname{tg} k_2 d_2,$$

то, согласно определению (2.6), получим  $M_{11} = 0$ . При заданных значениях  $\alpha, c_1, c_2$  и  $\rho_1, \rho_2$  вещественная скорость волны сжатия, которая должно быть меньше  $a$ , определится из решения трансцендентного уравнения  $M_{11} = 0$ , следующего из (2.6). Его наименьший корень соответствует скорости распространения волны сжатия в рассматриваемой модели снарядного потока в элементарной ячейке.

**3. Система периодически повторяющихся  $N$  элементарных ячеек.** Обобщая формулы (2.5) на случай  $N$  элементарных ячеек, можно получить

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ V_1(0) \end{bmatrix} = M^N \begin{bmatrix} P(Nd) \\ V_2(Nd) \end{bmatrix}, \quad M^N = M \cdot M \cdots M \cdot M \quad (3.1)$$

где  $M^N$  – интегральная передаточная матрица для системы из  $N$  периодически повторяющихся ячеек, являющаяся вновь унимодулярной, поскольку  $|M^N| = |M||M|\dots|M| = 1$ .

В работе Егера [5] теоретический период колебаний системы  $n$  водоводов определяется как сумма периодов, отнесённых к её отдельным звеньям

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \left[ \left( \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2} \right) + \dots + \left( \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}} + \frac{d_n}{c_n} \right) \right],$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – скорости волны сжатия в звеньях;  $d_1, d_2, \dots, d_n$  – длины звеньев. Если в качестве звеньев принять длины элементарных ячеек, то применительно к системе периодически повторяющихся  $N$  ячеек, показанной на фиг.1, период можно определить выражениями:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \left[ \left( \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2} \right) + \dots + \left( \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] = 4 \frac{Nd}{a_N} \quad (3.2)$$

$$d = \frac{\pi}{2} \frac{1}{N} \frac{a_N}{\omega}, \quad d_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{N} \frac{a_N}{\omega}, \quad d_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{N} \frac{a_N}{\omega}$$

Здесь  $a_N$  – обобщённая для  $N$  ячеек скорость волны давления в системе. Соотношения (3.2) должны быть подставлены в выражения (2.6).

По формуле Сильвестра [7,8], выражающей целую степень матрицы  $[M]$  через функцию самой матрицы и её собственных чисел, имеем:

$$[M]^N = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} [M] - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} [I]. \quad (3.3)$$

Здесь  $[I]$  – единичная матрица,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – собственные числа унимодулярной матрицы  $[M]$ , определяемые, согласно (2.5), из уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(M_{11} + M_{22}) + 1 = 0.$$

Согласно теореме Виетта,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  и  $\lambda_1 + \lambda_2 = M_{11} + M_{22}$ . Обозначим  $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$ . Тогда,

$$\frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sin N\varphi}{\sin \varphi} = U_{N-1}(\varphi), \quad \cos \varphi = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sin(N-1)\varphi}{\sin \varphi} = U_{N-2}(\varphi),$$

где  $U_{N-1}(\varphi)$ ,  $U_{N-2}(\varphi)$  – полиномы Чебышева второго рода. Подставляя (3.4) в (3.3), получим окончательную формулу Абелеса [7,8]

$$[M]^N = \begin{bmatrix} M_{11}U_{N-1} - U_{N-2} & M_{12}U_{N-1} \\ M_{21}U_{N-1} & M_{22}U_{N-1} - U_{N-2} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

При  $N = 1$ , в силу (3.4), матрица переходит в (2.5).

Вещественные значения  $a_N$  определяются из решений уравнений, следуемых из (3.5)

$$M_{11}U_{N-1}(\varphi) - U_{N-2}(\varphi) = 0, \quad M_{22}U_{N-1}(\varphi) - U_{N-2}(\varphi) = 0, \quad (3.6)$$

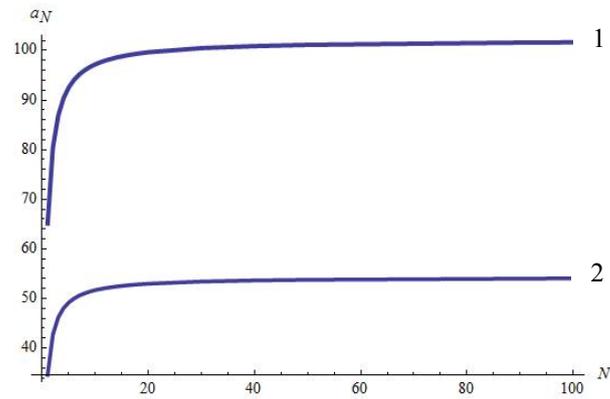
наименьшие корни которых при выполнении условий  $a_N < a$  и фиксированных  $N$  соответствуют скоростям распространения волн сжатия в элементарных ячейках. В случае численной реализации первого из них условия выполняются, в то время как для второго уравнения имеют место неравенства  $a < a_N$ , что с точки зрения физического процесса неприемлемо. Первое трансцендентное уравнение в силу (3.4) и (3.2), переписывается в форме

$$\begin{aligned} & \left( \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{N} \frac{a_N}{c_1} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{N} \frac{a_N}{c_2} \right] - \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{N} \frac{a_N}{c_1} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{N} \frac{a_N}{c_2} \right] \right) \times \\ & \times \sin \left[ N \arccos \left[ B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N) \right] \right] - \sin \left[ (N-1) \arccos \times \right. \\ & \left. \times \left[ B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N) \right] \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} B(\alpha, c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, N, a_N) = & \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{N} \frac{a_N}{c_1} \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{N} \frac{a_N}{c_2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1-\alpha}{N} \frac{a_N}{c_1} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{N} \frac{a_N}{c_2} \right]. \end{aligned}$$

При заданных значениях параметров  $\alpha, c_1, c_2$  и  $\rho_1, \rho_2$  соотношение (3.7) позволяет определить величины  $a_N$  для каждого из фиксированных  $N$ .

Приведём некоторые графики численных расчётов скоростей в каждой из периодически повторяющейся



Фиг.2

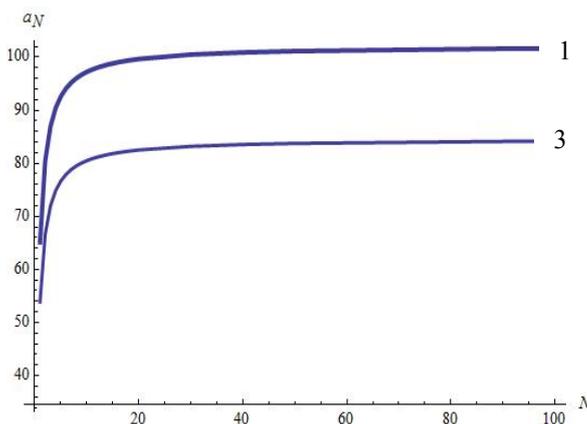
ся  $N$  элементарной ячейке, рассчитанные по уравнению (3.7) для водовоздушной смеси.

Фиг.2 иллюстрирует зависимость скорости распространения волны сжатия от давления. Кривая 1 отнесена к смеси с параметрами  $\alpha = 0.05$ ,  $P = 0.355$ МПа,  $\rho_2 = 3.1956$ кг/м<sup>3</sup>,  $c_2 = 394.37$ м/с,  $a = 102.39$ м/с, а кривая 2 – к  $\alpha = 0.05$ ,  $P = 0.1$ МПа,  $\rho_2 = 1.2928$ кг/м<sup>3</sup>,  $a = 54.34$ м/с. Видно, что с уменьшением давления скорость волны в соответствующих ячейках убывает.

На фиг.3 показаны те же связи, однако, в зависимости от величины газосодержания. Кривая 1 взята из фиг.2, а кривая 3 отнесена к смеси с теми же параметрами, однако, с  $\alpha = 0.075$  и  $a = 84.72$ м/с. Видно, что с увеличением газосодержания  $\alpha$  скорости в ячейках убывают.

Выявим поведения скорости в зависимости от сорта газа.

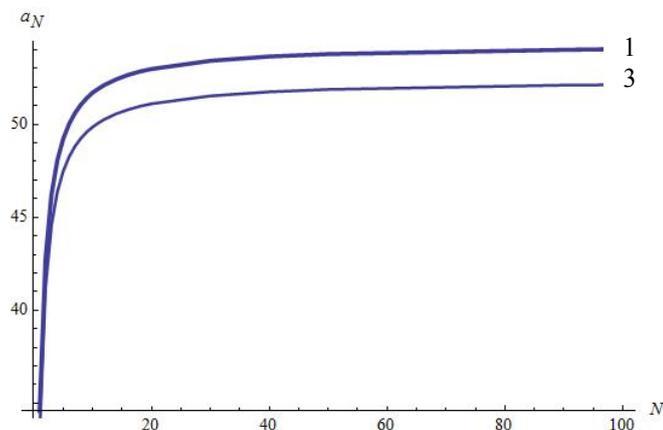
На фиг.4 приведены распределение скоростей при  $P = 0.1$ МПа и  $\alpha = 0.05$ . Кривая 2 отнесена к водовоздушной смеси и заимствована из фиг.2, а кривая 4 – к смеси воды с пузырьками углекислого газа, для которой  $\gamma = 1.3$ ,  $\rho_2 = 1.9768$ кг/м<sup>3</sup>,  $c_2 = 256.7$ м/с,  $a = 52.37$ . С переходом от воздуха к углекислому газу, т.е. с уменьшением скорости звука в газе, скорости волн в ячейках убывают – переход от кривой 2 к 4.



Фиг.3

Необходимо отметить, что с возрастанием числа ячеек  $N$  скорость волны сжатия  $a_N$  асимптотически стремится к скорости  $a$  в модели гомогенной смеси, описываемой формулой (2.10).

**Заключение.** При течении газожидкостной смеси в замкнутой трубе может образоваться снарядный поток, характеризуемый строго дискретной структурой из чередующихся пробок жидкости и газа. Полагается, что такая структура для двух пробок, образующих элементарную ячейку, является периодической для  $N$  числа ячеек, заполняющих весь объём трубы. Первая ячейка характеризуется интегральной



Фиг.4

передаточной матрицей второго ранга. Возводя её в целую степень  $N$ , найдём аналогичную матрицу для системы  $N$  ячеек, которая, согласно теореме Абелеса, выражается через саму матрицу и её собственные числа. Получены

трансцендентные уравнения, численная реализация которых позволяют определять вещественные значения скоростей распространения волны сжатия в каждой ячейке, как наименьший корень этих уравнений. Выявлено, что при больших числах  $N$  скорость волны во всей системе стремится к значению скорости звука в однородной (без межфазных границ) газожидкостной смеси.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two-Component Slug Flow // Trans. of the ASME. V.101. №1. 1979. Русский перевод – Распространение импульса давления в двухкомпонентном снаряжном потоке. // Теорет. основы инж. расчетов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с. Nakoryakov V.Ye., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. Wave dynamics of gas and vapor-liquid media. M: Energoatomizdat, 1990. – 248 p.
3. Козулин И.А., Кузнецов В.В. Статические характеристики двухфазного газожидкостного потока в вертикальном микроканале // ПМТФ. 2011. Т.25. №6. С.129-139. Kozulin I.A., Kuznetsov V.V. Statistical characteristics of a two-phase gas-liquid flow in a vertical microchannel. ПМТФ. 2011. Т.25. № 6. P.129-139.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. P.1. M.: Nauka, 1987. 464 p.
5. Jaeger G. The theory of Resonance in Hydropower Systems. Discussion of Incident and Accidents Occurring in Pressure Systems. // Trans. of the ASME. Vol.85. Ser.D. №4. 1963. Русский перевод – Приложение теории резонанса к системе водоводов ГЭС.

- Рассмотрение причин аварий напорных трубопроводов. // Техническая механика. Т.85. Сер.D. №4. 1963. С184-195.
6. Henry R.E., Grolmes M.A., Fauske H.K. Pressure Pulse Propagation in Two-phase One – and Two-Component Mixtures. ANL – 7792. Mar. 1971. 86pp.
  7. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с. Bass F.G., Bulgakov A.A., Tetervov A.P. High-frequency properties of semiconductors with superlattices. Moscow: Nauka, 1989. 289 p.
  8. Angot A. Complements de Mathematiques. Paris. 1957. Русский перевод – Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 772с.

**Сведения об авторах:**

**Григорян Шушаник Акоповна** – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика и математ. моделирования» Российско-Армянского (Славянского) университета.

**Адрес:** 0051, Ереван, ул. Овсепя Эмина, 123.

**Тел.:** (37494) 284 718. **E-mail:** [grig-shushanik@rambler.ru](mailto:grig-shushanik@rambler.ru)

**Оганян Гагик Гришаевич** – к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,

**Тел.** (+374 93) 946-947, **E-mail:** [oganyangagik@gmail.com](mailto:oganyangagik@gmail.com)

Поступила в редакцию 10.10.2017