



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М.П., Федорова Н.А.

Армирование плоских
конструкций по
изогональным траекториям

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Федорова Н.А. Армирование плоских конструкций по изогональным траекториям // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 33. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-33](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-33)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-33>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

М.П. Галанин, Н.А. Федорова

**Армирование плоских конструкций
по изогональным траекториям**

Москва — 2017

Галанин М.П., Федорова Н.А.

Армирование плоских конструкций по изогональным траекториям

Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования в рамках линейной неоднородной анизотропной теории упругости получены разрешающие системы дифференциальных уравнений. Детерминантным методом исследован их тип. Многообразие структур армирования на базе ортогональных систем координат достигается в результате построения изогональных траекторий к данным координатным линиям.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, изогональные траектории

Mikhail Pavlovich Galanin, Natalia Alexandrovna Feodorova

Reinforcement of planar constructions along isogonal trajectories

The resolving ODE systems are obtained for the anisotropic non-homogeneous linear elasticity problem of limiting deformations of planar constructions reinforced with curvilinear trajectories determining. The determinant method is used to study these systems type. A variety of reinforcement structures is obtained by isogonal trajectories designing for current coordinate lines of an orthogonal coordinate system.

Key words: reinforcement, structural model, isogonal trajectories

Оглавление

Введение	3
Определение изогональных траекторий	4
Примеры построения изогональных траекторий к данным координатным линиям	4
Иzegoнальные траектории в полярной системе координат	7
Армирование по изогональным траекториям	10
Библиографический список.....	16

Введение

Для безопасной работы конструкций с концентраторами напряжений, в окрестности которых возникают большие градиенты полей напряжений, их армируют высокопрочными волокнами с целью восприятия волокнами этих градиентов. Если волокна не выполняют эту роль, нагрузка влияет на связующее.

До недавнего времени армирование плоских конструкций осуществлялось прямолинейными волокнами. Однако такая структура армирования может быть эффективной лишь в частных случаях нагружения, при которых внутренние силовые линии преимущественно направлены вдоль траекторий армирования. Реальные конструктивные элементы работают в более сложных условиях нагружения. Для таких конструкций необходимо вводить специальные структуры армирования, согласованные с характером полей градиентов напряжений, проводить поиск структур армирования, снижающих нагрузки, действующие на конструкцию.

Отметим работы [1,2], в которых разработан метод конечных суперэлементов для прямого численного моделирования характеристик дисперсно-армированных материалов. В данной работе развит иной подход.

На основе структурной модели [3] в работах [4-6] разработана методика создания плоских конструкций путем армирования семействами непрерывных криволинейных волокон.

Влияние сложного нагружения на распределение силовых линий полей напряжений иллюстрирует пример задачи о равномерно нагруженном эксцентрическом кольце. Эта задача в биполярной системе координат сформулирована в [7]. Решения в [7] найдены в виде тригонометрического ряда по криволинейным координатам биполярной системы (ξ, η) . В настоящей работе получены приведенные ниже результаты для неравномерно нагруженного эксцентрического кольца. Для неравномерной нагрузки на граничном контуре вида $Const + \cos(\alpha^* \eta)$ (α^* – заданная амплитуда) контурные графики компонент напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_{\xi\eta}$ в биполярной системе координат приведены на рис. 1 – 3 соответственно.

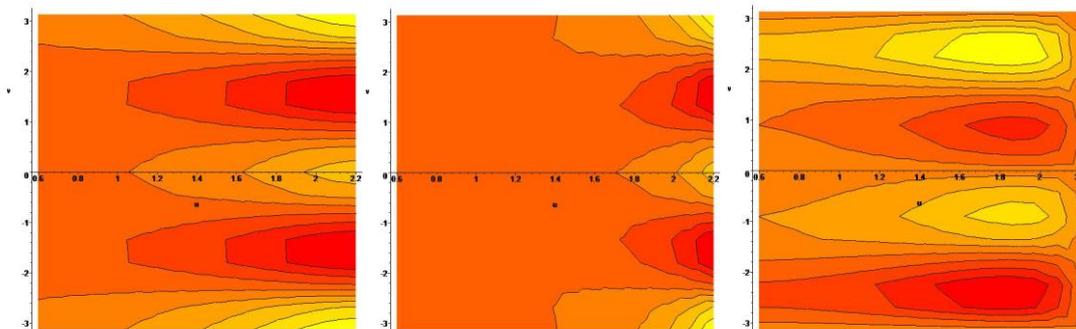


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Из рисунков следует, что перераспределение полей напряжений необходимо проводить вдоль криволинейных траекторий. Поиск конфигураций криволинейного армирования может быть выполнен посредством построения изогональных траекторий.

Определение изогональных траекторий

Изогональная траектория – это плоская линия, пересекающая все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства под одним и тем же углом α [8].

Если однопараметрическое семейство плоских кривых задано неявным образом в виде уравнения

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

где a – параметр, то изогональные траектории строятся в соответствии с уравнением

$$\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} - \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1} \frac{dy_1}{dx_1}} = k. \quad (2)$$

В (2) $k = \operatorname{tg} \alpha$ – известное значение, α – фиксированный угол, под которым изогональная траектория пересекает все кривые заданного на плоскости однопараметрического семейства. Исключая параметр a из уравнений (1), (2), получим соотношение, связывающее координаты x_1, y_1 точки изогональной траектории и угловой коэффициент касательной k , т.е. дифференциальное уравнение изогональных траекторий семейства (1). Общий интеграл полученного уравнения дает семейство изогональных траекторий [8], зависящее от одного параметра.

Примеры построения изогональных траекторий к данным координатным линиям

1. Рассмотрим биполярную систему координат (ξ, η) . В биполярной системе координат координатные линии $\xi = \xi_0 = \text{Const}$ представляют собой эксцентрические окружности с центрами на оси OX , описываемые выражением

$$(x - a \operatorname{cth} \xi_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(\operatorname{sh} \xi_0)^2}. \quad (3)$$

Координатные линии $\eta = \eta_0 = Const$ – дуги окружностей с центрами на оси OY , проходящие через две точки $x = \pm a$ (полюсы), описываются выражением

$$x^2 + (y + a \operatorname{ctg} \eta_0)^2 = \frac{a^2}{(\sin \eta_0)^2}. \quad (4)$$

После введения соответствующей каждому из уравнений (3), (4) линейной замены координат приведем их к уравнению однопараметрического семейства окружностей вида

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

где b – параметр семейства. Для данного уравнения построим семейство изогональных траекторий, следуя (2) и [8]. В текущих точках траектории x_1, y_1 дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{x_1}{y_1} \frac{dy_1}{dx_1}} = k. \quad (5)$$

После преобразований уравнение (5) запишем в виде однородного дифференциального уравнения, решение которого имеет вид

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{k \operatorname{arctg} \frac{x_1}{y_1}}, \quad (6)$$

где C – произвольная константа. Каждому семейству окружностей соответствует свое семейство изогональных траекторий в виде семейства спиралей (6).

2. Рассмотрим эллиптическую систему координат. В ней координатными линиями являются софокусные ξ -эллипсы и η -гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = 1, \quad (7)$$

где $2a$ – фокусное расстояние. Связь между декартовыми (x, y) и эллиптическими координатами (ξ, η) задается формулами

$$x = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (8)$$

Запишем (7) в виде однопараметрического семейства кривых и построим, следуя (2), соответствующее семейство изогональных траекторий. Введем параметр $b^2 = a^2 \operatorname{ch} \xi$, тогда однопараметрическое семейство имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1. \quad (9)$$

Семейство изогональных траекторий проще находить, если известно дифференциальное уравнение исходного однопараметрического семейства кривых. Чтобы получить дифференциальное уравнение заданного семейства плоских кривых, необходимо продифференцировать (7), затем из полученного уравнения и уравнения семейства исключить параметр b . В итоге получим дифференциальное уравнение семейства

$$xy(y')^2 + y'(x^2 - y^2 - a^2) - xy = 0. \quad (10)$$

При рассмотрении семейства гипербол его дифференциальное уравнение совпадает с (10), но при этом параметры плоских кривых удовлетворяют условию $b^2 - a^2 < 0$, $b^2 = a^2 \cos^2 \eta$. Для семейств эллипсов и гипербол получим в соответствии с изложенным выше способом дифференциальное уравнение изогональных траекторий

$$x_1 y_1 (y_1' - k)^2 + (y_1' - k)(k y_1' + 1)(x_1^2 - y_1^2 - a^2) - x_1 y_1 (k y_1' + 1)^2 = 0. \quad (11)$$

Разрешая (11) относительно y_1' , получим два дифференциальных уравнения первого порядка. Представим их форму после ввода промежуточных обозначений. Пусть

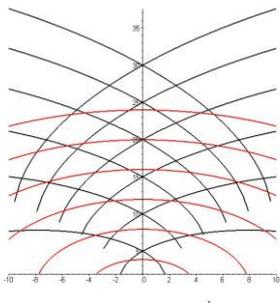
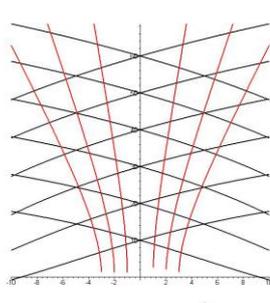
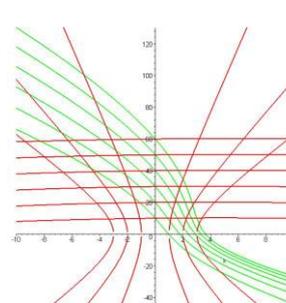
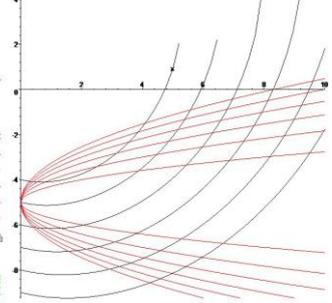
$$S1 = -k^2 + x_1^2 - y_1^2 - a^2 + k^2 y_1^2 + a^2 k^2 - 4x_1 y_1,$$

$$S2 = a^4 - 2a x_1^2 + k^4 x_1^4 + 2k^2 x_1^4 - 2a k^4 x_1^2 + 2x_1^2 y_1^2 + 2y_1^4 k^2 + k^4 y_1^4 + 2a k^4 y_1^2 + 4k^2 x_1^2 y_1^2 + 2k^4 x_1^2 y_1^2 + x_1^4 + y_1^4 + a^2 k^2 y_1^2 - a^2 k^2 x_1^2 + 2a^2 y_1^2 + 2a^4 k^2 + a^4,$$

тогда искомые уравнения принимают вид

$$y_1' = \frac{S1 \pm \sqrt{S2}}{2(ky_1^2 + a^2k + x_1y_1k^2 - x_1y_1 - kx_1^2)}, \quad S2 \geq 0. \quad (12)$$

Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам эллипсов представлены на рис. 4 для $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = \operatorname{tg} \alpha$. Из вида уравнений (12) следует, что при построении изогональных траекторий могут возникнуть зоны сингулярности для определенных значений k и определенных размеров плоской конструкции. При технологическом конструировании изделий всегда можно выбрать соответствующие размеры вне зоны сингулярности. Иллюстрации изогональных траекторий к рассмотренным семействам гипербол приведены на рис. 5 – 6 для $k = 1$ и $k = 0,1$. Пример изогональных траекторий к семейству парабол вида $y = ax^2$ показан на рис. 7 для $k = 3$.

Рис. 4. $k=1$.Рис. 5. $k=1$.Рис. 6. $k=0,1$.Рис. 7. $k=3$.

Как видим, уравнения изогональных траекторий содержат параметр k , при изменении значения которого получаем множество разнообразных траекторий. Располагая армирующие семейства волокон вдоль найденных траекторий, определяем разнообразные структуры армирования, управлением которыми можно перераспределять поля напряжений и деформаций внутри пластины.

Изогональные траектории в полярной системе координат

Пусть задана полярная система координат (ρ, θ) . Запишем соотношение (2), отражающее геометрическое определение изогональных траекторий, связывающее направления траекторий и направления семейства, в полярной системе координат. Учтем, что тангенс угла μ между полярным радиусом и касательной в фиксированной точке для любой линии, заданной уравнением $\rho = \rho(\theta)$ в полярных координатах, равен $\operatorname{tg} \mu = \rho / \rho'$. Последняя формула выражает геометрический смысл производной функции $\rho = \rho(\theta)$. Тогда соотношение (2), соответствующее полярной системе координат, имеет вид

$$\frac{\rho'}{\rho} = \left(k \frac{\rho_1}{\rho_1'} + 1 \right) / \left(\frac{\rho_1}{\rho_1'} - k \right) \quad (13)$$

В (13) величина $k = tg \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, – постоянный угол, под которым данное семейство пересекается семейством изогональных траекторий.

Рассмотрим уравнение однопараметрического семейства кривых в полярной системе координат $\Phi(\rho, \theta, a) = 0$. Чтобы построить изогональные траектории, нужно составить дифференциальное уравнение семейства, затем заменить в нем $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ на производные по формуле (13). В результате получим дифференциальное уравнение для определения изогональной траектории в полярной системе координат. Если $\alpha = \pi/2$, то производная ρ' заменяется на $-\rho^2 / \rho'$ (осуществляется предельный переход в (13) при $k \rightarrow \infty$).

Пример 1. Рассмотрим пример построения семейства изогональных траекторий к семейству кардиоид. Пусть задано семейство кардиоид в полярной системе координат:

$$\rho = a(1 + \cos \theta),$$

где a – параметр семейства. Дифференцируем уравнение семейства по θ , из полученного уравнения и уравнения семейства исключаем параметр a , находим искомое дифференциальное уравнение семейства:

$$\rho'(1 + \cos \theta) + \rho \sin \theta = 0. \quad (14)$$

Заменим в (14) производные по формуле (13), индексы опустим, получим уравнение для изогональных траекторий вида

$$\rho'(1 + \cos \theta - k \sin \theta) + \rho(k + \sin \theta + k \cos \theta) = 0.$$

Интеграл данного уравнения удастся найти в аналитическом виде

$$\rho(\theta) = C(k^2 \cos \theta - \cos \theta + 2k \sin \theta - k^2 - 1).$$

В случае $k = tg a$ кривые, пересекающие заданное семейство кардиоид под углом a , задаются выражением

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta - 2a)).$$

Семейство кардиоид и изогональные ему траектории, пересекающие кривые данного семейства под углом $\alpha = \pi/4$, изображены на рис. 8.

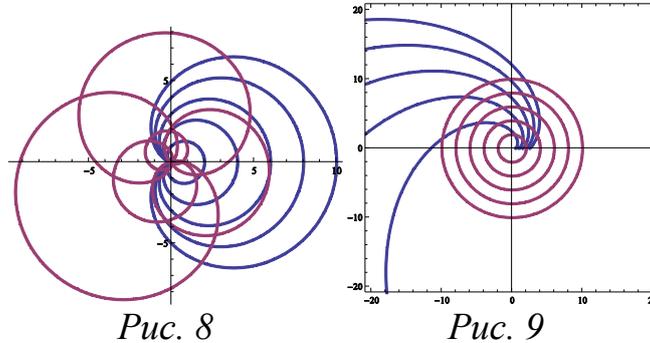


Рис. 8

Рис. 9

Пример 2. Рассмотрим семейство логарифмических спиралей $\rho(\theta) = ae^{\theta}$. Дифференциальное уравнение семейства $\rho' = \rho$. Изогональные траектории найдем, решив уравнение (13) для фиксированных значений k . При $k=1$ решение этого уравнения $\rho = Const$, т.е. заданное семейство спиралей под углом $\frac{\pi}{4}$ пересекает семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 9).

Пример 3. Введем специальную структуру армирования: прямолинейные радиальные направления – это пучок прямых с центром в начале координат. Пусть тангенс угла пересечения семейства прямых изогональными траекториями равен $k = \operatorname{tg} \alpha$, причем $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Уравнение изогональных траекторий к данному семейству в полярной системе координат дает семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Ce^{\frac{\theta}{k}}$, где C – произвольная константа.

Множество структур армирования на основе выбранного прямолинейного радиального направления представлено на рис. 10 – 12 для значений $k = 1, 2, 3$ соответственно.

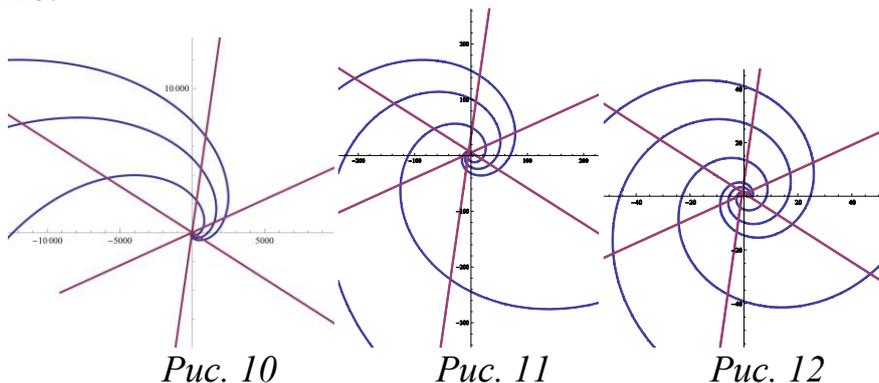


Рис. 10

Рис. 11

Рис. 12

Заметим, что при технологической реализации процесса изготовления армированной конструкции необходимо произвести вырез в виде некоторой окружности в начале координат, а затем расположить волокна вдоль радиальных направлений. В качестве второго семейства армирующих волокон можно выбрать построенные изогональные траектории, то есть найденные разнообразные семейства логарифмических спиралей.

Армирование по изогональным траекториям

При армировании m семействами непрерывных криволинейных волокон угол армирования φ_m является функцией координат и геометрически представляет собой угол между касательной к кривой и положительным направлением оси абсцисс. В полярной системе координат φ_m вводится как угол между волокном m -го семейства, определяемого касательной в точке M , и радиальным направлением OM . В работе $m = 1, 2$.

Зададим некоторую криволинейную ортогональную систему координат (ξ, η) . Направим траектории армирования следующим образом: одна траектория армирования совпадает с линией криволинейной ортогональной системы координат, другая ей изогональна, т.е. пересекает ее под постоянным углом α , $k = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда один угол армирования, например, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, второй угол армирования $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k$. Другой вариант армирования – $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k$.

Запишем условие постоянства сечений волокон m -го семейства в соответствии с [9]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_m \cos \varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_m \sin \varphi_m) = 0. \quad (16)$$

В (16) $H_1(\xi, \eta)$, $H_2(\xi, \eta)$ – дифференциальные коэффициенты Ламе, ω_m – интенсивности армирования, $m = 1, 2$, φ_m – углы армирования m -ым семейством волокон. Для указанных структур армирования из уравнения (16) в первом случае ($\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k$) получим

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_1 \sin \varphi_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_2 \cos \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_2 \sin \varphi_2) = 0. \quad (17)$$

Дополнительные условия на интенсивности ω_1, ω_2 зададим на том контуре, где волокна входят в конструкцию. Предположим, что $\omega_1^0(\eta), \omega_2^0(\eta), \omega_1^0(\xi)$ – известные функции, заданные на линиях $\xi = \xi^0 = Const, \eta = \eta^0 = Const$. Первое уравнение в (17) можно проинтегрировать и получить

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{H_2(\xi, \eta^0)\omega_1^0(\xi)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Поскольку криволинейная ортогональная система координат вводится аналитическими функциями комплексного переменного, то в каждой точке (ξ, η) коэффициенты Ламе равны между собой $H_1(\xi, \eta) = H_2(\xi, \eta)$. При записи второго уравнения в (17) воспользуемся заменой $\omega_3 = H_1\omega_2 = H_2\omega_2$. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\omega_3) + k \frac{\partial}{\partial \eta}(\omega_3) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) является однородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка, начальными данными являются условия на интенсивности ω_1, ω_2 на контуре, где волокна входят в конструкцию. Ищем семейство решений, содержащих произвольную функцию, для чего предварительно построим обыкновенное дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\eta}{k}. \quad (19)$$

Общий интеграл (19) равен $-k\xi + \eta = Const$. Тогда общее решение (18)

$$\omega_3 = F_1(-k\xi + \eta),$$

где F_1 – любая непрерывно дифференцируемая функция. Укажем очевидное решение $\omega_3 = Const$. Далее решаем задачу Коши. Пусть $\omega_3 = H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(\eta)$ при $\xi = \xi^0$. Разрешая общий интеграл (19) относительно переменной η , записываем искомое решение в виде

$$\omega_2 = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(-k\xi + \eta + k\xi^0)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Во втором случае ($\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \arctg k$) уравнения (16) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_1 \cos \varphi_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(H_2 \omega_2 \cos \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_1 \omega_2 \sin \varphi_2) = 0.$$

Решения находим аналогично (17):

$$\omega_1(\xi, \eta) = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_1^0(\eta)}{H_2(\xi, \eta)}, \quad \omega_2 = \frac{H_2(\xi^0, \eta)\omega_2^0(-k\xi + \eta + k\xi^0)}{H_2(\xi, \eta)}.$$

Полученные значения для интенсивностей армирования используем далее в работе для вычисления коэффициентов при построении разрешающей системы уравнений. Различные решения для интенсивностей приводят к различным разрешающим уравнениям поставленной задачи армирования среды.

В работе [5] установлена разрешающая система трех дифференциальных уравнений в криволинейных ортогональных координатах относительно трех компонент тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \eta^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi \partial \eta} + C_4 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} + C_6 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + C_7 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + C_8 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + \\ + C_9 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} + C_{10} \varepsilon_{11} + C_{11} \varepsilon_{22} + C_{12} \varepsilon_{12} = 0, \\ a_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + a_{14} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + a_{15} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + a_{16} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} + \\ + F_1(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \Phi_1 = 0, \\ a_{21} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + a_{25} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi} + a_{26} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \eta} + \\ + F_2(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}) + H_1 H_2 \Phi_2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) Φ_1, Φ_2 – компоненты вектора массовых сил, F_1, F_2 – заданные функции своих аргументов, коэффициенты a_{ij} ($i=1, j=1,6$) выражены через параметры армирования (интенсивности армирования, тригонометрические функции углов армирования), механические свойства материала связующего и армирующих волокон в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= H_2(\Omega m_3 + E_1 \omega_1 \cos^4 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^4 \varphi_2) \\ a_{12} &= H_1(E_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2), \\ a_{13} &= H_2(\Omega v m_3 + E_1 \omega_1 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^2 \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= H_1(E_1\omega_1 \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^3 \varphi_2 \cos \varphi_2), \\
a_{15} &= 2H_2(E_1\omega_1 \cos^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 + E_2\omega_2 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2), \\
a_{16} &= 2H_1(E_1\omega_1 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + E_2\omega_2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 + \Omega m_4/2), \\
a_{21} &= H_2(E_1\omega_1 \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 + E_2\omega_2 \sin \varphi_2 \cos^3 \varphi_2), \\
a_{22} &= H_1(\nu m_3 \Omega + E_1\omega_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_2), \\
a_{23} &= H_2(E_1\omega_1 \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 + E_2\omega_2 \cos \varphi_2 \sin^3 \varphi_2), \\
a_{24} &= H_1(\Omega m_3 + E_1\omega_1 \sin^4 \varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^4 \varphi_2), \\
a_{25} &= 2H_2(\Omega m_4/2 + E_1\omega_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + E_2\omega_2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2), \\
a_{26} &= 2H_1(E_1\omega_1 \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_2\omega_2 \sin^3 \varphi_2 \cos \varphi_2).
\end{aligned}$$

Здесь $\Omega = 1 - (\omega_1 + \omega_2)$, E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего, E_m – модуль Юнга материала m -го семейства армирующих волокон, $m_3 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $m_4 = \frac{E}{1+\nu}$. Коэффициенты C_s ($s = \overline{1,12}$) имеют вид

$$\begin{aligned}
C_1 &= H_1^2, C_2 = H_2^2, C_3 = -2H_1H_2, C_4 = -H_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi}, \\
C_5 &= H_1^2 \left(-\frac{2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} + \frac{4}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right), \\
C_6 &= H_2^2 \left(-\frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{4}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \right), C_7 = -H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \eta}, \\
C_8 &= 2H_1H_2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} - \frac{1}{H_1H_2} (H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \eta} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \eta}) \right), \\
C_9 &= 2H_1H_2 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1H_2} (H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi}) \right), \\
C_{10} &= 2 \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + H_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \eta^2} - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right), \\
C_{11} &= 2 \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} + H_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial \xi^2} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \right), \\
C_{12} &= 2 \left(-\frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} - H_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial H_2}{\partial \eta} - \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \right. \\
&\quad \left. - H_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial H_2}{\partial \eta} + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right) \right).
\end{aligned}$$

В системе (20) первое уравнение является уравнением совместности деформаций в произвольной криволинейной системе координат, два остальных

уравнения – это уравнения равновесия плоской задачи в криволинейной системе координат, выраженные через компоненты деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Для коэффициентов a_{ij} в соответствии с введенным способом армирования по изогональным траекториям получены выражения

$$\begin{aligned}
a_{11} &= H_2(\Omega m_3 + E_1 \omega_1 + E_2 \omega_2 \frac{1}{(1+k^2)^2}), a_{12} = H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2}, \\
a_{13} &= H_2(\Omega \nu m_3 + E_2 \omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}), a_{14} = H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2}, \\
a_{15} &= 2H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2}, a_{16} = 2H_1(E_2 \omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} + \Omega m_4/2), \\
a_{21} &= H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k}{(1+k^2)^2}, a_{22} = H_1(\nu m_3 \Omega + E_2 \omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}), \\
a_{23} &= H_2 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2}, a_{24} = H_1(\Omega m_3 + E_2 \omega_2 \frac{k^4}{(1+k^2)^2}), \\
a_{25} &= 2H_2(\Omega m_4/2 + E_2 \omega_2 \frac{k^2}{(1+k^2)^2}), a_{26} = 2H_1 E_2 \omega_2 \delta_\alpha \frac{k^3}{(1+k^2)^2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

В (21) значения $\delta_\alpha = \pm 1$ учитывают выбор знака в формулах тригонометрии в зависимости от величины угла армирования.

Исследуем тип разрешающей системы (20) для армирования вдоль изогональных траекторий. Для этого найдем корни λ характеристического уравнения [10]:

$$\begin{vmatrix}
1 & \lambda^2 & -2\lambda \\
(a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda) & (a_{13}\lambda^2 + a_{14}\lambda) & (a_{15}\lambda^2 + a_{16}\lambda) \\
(a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda) & (a_{23}\lambda^2 + a_{24}\lambda) & (a_{25}\lambda^2 + a_{26}\lambda)
\end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

Уравнение (22) представляет собой полное алгебраическое уравнение четвертого порядка. Его коэффициенты зависят от технических характеристик материала связующего и арматуры, интенсивностей армирования волокнами первого и второго семейства и параметра k , который задается при построении траекторий, изогональных к данному семейству кривых.

Исследуем корни характеристического уравнения при фиксированном материале, но изменяя интенсивности армирования и параметр k . Рассмотрим следующие варианты комбинации выбора материала для матрицы (связующего) и арматуры (армирующих волокон). В качестве материала связующего выберем алюминий, который армируем стальными волокнами;

пусть связующее – медь, которую армируем волокнами из вольфрама; пусть связующее – графит, который армируем стальными волокнами. Зададим различные варианты значений интенсивности и параметра k . Результаты представлены в табл.1. В ней i – мнимая единица.

Таблица 1

**Корни характеристического уравнения в зависимости от параметра
изогонального армирования k**

Материалы связующего и арматуры	Интенсивности армирования ω_1, ω_2	Угол наклона изогональной траектории $k = 1$	$k = \sqrt{3}$	$k = 1/\sqrt{3}$
Алюминий+сталь	$\omega_1 = 0,2;$ $\omega_2 = 0,2$	0,5;1,3; $-0,36 \pm 0,27i$	0,005; 7,98; $-0,36; -4,75$	$0,28 \pm 1,02i;$ $-0,36; -4,75$
Алюминий+сталь	$\omega_1 = 0,3;$ $\omega_2 = 0,3$	Все корни действительные	Все корни действительные	$0,33 \pm 0,85i;$ $-0,35 \pm 0,48i$
Медь+вольфрам	$\omega_1 = 0,2;$ $\omega_2 = 0,2$	0,48;1,35; $-0,8 \pm 0,257i$	Все корни действительные	$0,28 \pm i;$ $-0,307 \pm 0,58i$
Графит+сталь	$\omega_1 = 0,2;$ $\omega_2 = 0,2$	Все корни действительные	Все корни действительные	$0,318 \pm 0,42i;$ $-0,46 \pm 0,344i$

Установлено, что все четыре корня могут быть действительными, корни могут быть действительными и комплексно сопряженными, также и все корни могут быть комплексно сопряженными. Основное влияние на характер корней оказывают значение параметра k – тангенса угла армирования по изогональной траектории – и значение интенсивностей армирования ω_1, ω_2 .

Как видим из табл.1, разные значения углов армирования приводят к различным типам систем разрешающих дифференциальных уравнений (гиперболическому, эллиптическому, смешанному типам) [10], а следовательно, и к разным постановкам краевых задач. Им соответствуют существенно разные решения, что позволяет управлять напряженно-деформируемым состоянием конструкции.

Многообразие структур армирования на базе ортогональной системы координат достигается путем построения изогональных траекторий к данным координатным линиям, оно зависит от выбора параметра k и значений

интенсивностей армирования. Таким образом, с изменением структур армирования существенным образом изменяются поля напряжений и деформаций.

Итогом работы является метод получения многообразия новых структур армирования путем построения изогональных траекторий к некоторым заданным координатным линиям. Решения новых краевых задач неоднородной анизотропной теории упругости дают широкие возможности управления полями напряжений и деформаций в плоских тонкостенных конструкциях за счет целевого выбора криволинейных структур армирования.

Библиографический список

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Метод конечных суперэлементов для решения задач математической физики в неоднородных областях // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. № 3. С. 34–49.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Темис Ю.М., Щеглов, И.А., Яковлев Д.А. Применение метода конечных суперэлементов для расчета характеристик дисперсно-армированных композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 3. С. 54–68.
3. Nemirovsky Yu.V. On the elastic-plastic behavior of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. Vol. 12, 1970. P. 898–903.
4. Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с.
5. Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям // Вестник Сам. Гос. Техн. Ун-та. Сер. Физ.-мат. наук. Самара, 2010. № 5(21). С. 96–104. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/vsgtu/v121/p96>.
6. Федорова Н.А. Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат // Журнал Сибирского федерального университета, математика и физика. 2011. 4(3). С. 400-405. URL: <http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/2430/fedorova.pdf;jsessionid=98F3FB99F9EF7C423E682FA6CF6DFCB5?sequence=1>.
7. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: ГИТ-ТЛ, 1950. 232 с.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТЛ, 1953. 468 с.
9. Бушманов С.П., Немировский Ю.В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов, №2, 1983. С. 278–284.
10. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 447 с.